

Empilements de jetons sur une grille hexagonale

Hervé Hocquard¹ et Mickael Da Ronch²

¹Université de Bordeaux, Maths à Modeler Aquitaine

²Haute École Pédagogique du Valais, Maths à Modeler Suisse

15 septembre 2026

Résumé

Dans cet article nous présentons quelques résultats concernant un problème d'optimisation combinatoire relevant d'empilements de jetons sur une grille hexagonale de côté $n \geq 1$. Nous prouvons d'abord que la pile de taille maximale que nous pouvons construire sur une telle grille est d'exactement 32 jetons. Ce résultat nous permet d'en déduire une borne inférieure sur le problème initial concernant le nombre minimum de piles (noté $\mathcal{X}(\mathcal{H}_n)$) que l'on peut construire sur une grille hexagonale $(H_n)_{n \geq 1}$, à savoir que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\mathcal{X}(\mathcal{H}_n) \geq \left\lceil \frac{3n^2 - 3n + 1}{32} \right\rceil.$$

Des résultats complets sont donnés pour les petites valeurs $n \in \{1, \dots, 4\}$, le cas $\mathcal{H}_5$ étant encadré ($2 \leq \mathcal{X}(\mathcal{H}_5) \leq 3$), et la caractérisation de la borne supérieure pour ce problème reste ouverte dans le cas général.

1 Présentation du problème d'empilements de jetons sur une grille hexagonale de côté $n \geq 1$

Dans cet article, on se propose d'étudier un problème d'optimisation combinatoire d'empilements de jetons sur une grille hexagonale de côté $n \geq 1$, notée $\mathcal{H}_n$. Ce problème a fait l'objet d'une proposition d'activité dans la revue *Petit x* (DA RONCH & HOCQUARD, 2026b). Il s'agit de déterminer le nombre minimum $\mathcal{X}(\mathcal{H}_n)$ de piles réalisables sur une grille hexagonale $\mathcal{H}_n$ de côté $n \geq 1$ comportant initialement un jeton par case, sachant qu'on peut déplacer une pile P_1 sur une pile voisine P_2 , si et seulement si, $|P_2| \geq |P_1|$. Autrement dit la pile P_1 de jetons doit avoir au plus autant de jetons que P_2 pour pouvoir être déplacée (Figure 1). De plus, une pile doit être déplacée totalement et non partiellement et elle ne peut être déplacée vers une case vide (pile de taille 0).

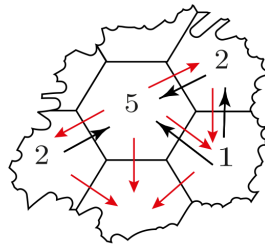


FIGURE 1 – Exemple de déplacements autorisés (noir) et interdits (rouge) sur un fragment de grille hexagonale.

Rappelons qu’initialement, ce problème a été étudié dans le cas de la théorie des graphes, sur des familles de graphes spécifiques issues du jeu d’acquisition (*Total Acquisition Game*), introduit par LAMPERT et SLATER (1995). Par la suite, MACDONALD et al. (2014) se sont intéressés à ce problème sur des classes de graphes particulières telles que les graphes grilles (produits cartésiens de chemins). Leurs travaux ont permis d’obtenir des bornes sur le nombre minimum $\mathcal{X}$ de piles sur cette famille de graphes. Une analyse mathématique plus restrictive de ce problème, portant sur des grilles rectangulaires et carrées, a été proposée dès 2019 par le premier auteur de cet article, en restant dans le même cadre que MACDONALD et al. (2014) où seuls les déplacements horizontaux et verticaux entre cases voisines sont autorisés. Ce problème a d’ailleurs fait récemment l’objet d’un article dans la revue *Repère IREM* (DA RONCH & HOCQUARD, 2026a), proposant une analyse mathématique et didactique approfondie de cette situation, illustrée par des traces écrites d’élèves de différents niveaux d’enseignement, allant du primaire jusqu’au lycée. Ce problème a aussi été présenté dans le cadre d’un atelier, destiné aux formateurs et formatrices d’enseignants de mathématiques, proposé dans le cadre du colloque de la *CORFEM* en 2019 (BEFFARA & BUAT-MÉNARD, 2019). Dans la continuité de ce travail, nous avons souhaité étendre ce problème aux grilles hexagonales et triangulaires. Dans cet article, nous nous intéresserons uniquement au premier cas ; un second article traitera du second.

Le problème étudié dans cet article s’énonce ainsi.

- **Instances.** Étant donné une grille hexagonale de côté n (n entier non nul) et un jeton sur chacune des cases.
- **Question.** Combien de piles peut-on faire au minimum avec ces jetons ?

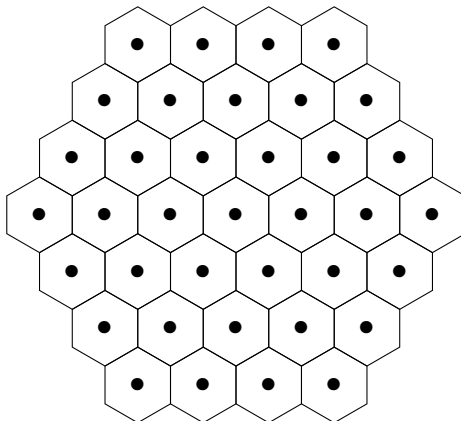


FIGURE 2 – Exemple de grille hexagonale de côté $n = 4$ avec des jetons sur chacune des cases.

Pour aborder ce problème, nous commençons par étudier quelques cas particuliers de petites tailles. En effet, dans le contexte de la résolution d'un problème général, et cela quel que soit le niveau d'enseignement, réduire la complexité du problème en étudiant des cas particuliers de petites tailles fait partie des connaissances visées dans la processus d'expérimentation en résolution de problèmes. C'est aussi précisément l'étude de ces cas particuliers qui permet d'établir des résultats locaux sur le problème, de repérer des invariants, c'est-à-dire des régularités permettant de comprendre ce qui, à partir du particulier, est généralisable, et amener ensuite à la formulation de conjectures de portée plus générale. Ainsi, pour aborder ce problème, nous commencerons à traiter les premiers cas des grilles hexagonales $\mathcal{H}_n$ pour $n \in \{1, 2, \dots, 5\}$.

2 Étude de cas particuliers de la grille $\mathcal{H}_n$ pour $1 \leq n \leq 5$

Si l'on considère la grille hexagonale $\mathcal{H}_1$, alors il y a qu'une seule case contenant un seul jeton, donc le minimum $\mathcal{X}(\mathcal{H}_1)$ de piles est 1.

Dans le cas de la grille $\mathcal{H}_2$, une première stratégie consiste à déplacer le jeton de la case centrale sur une des autres cases externes. Dans cette configuration, on sera nécessairement obligé de construire au moins deux piles de tailles différentes : la pile de deux jetons obtenue lors du déplacement du jeton central vers l'une des cases externes et la pile diamétralement opposée ne pourront jamais être réunies (Figure 3).

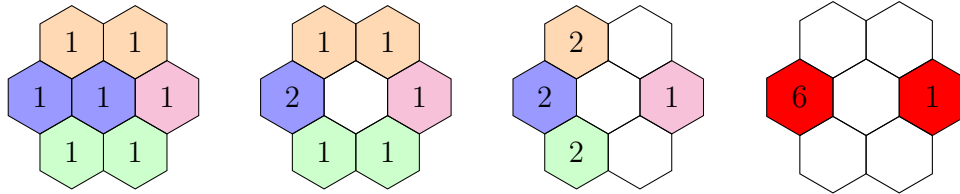


FIGURE 3 – Un exemple de stratégie non optimale donnant deux piles pour $\mathcal{H}_2$.

La question est alors de savoir si nous pouvons obtenir une seule pile pour la grille $\mathcal{H}_2$. Pour cela, nous proposons le cheminement ci-après qui permet de construire une seule pile de taille 7 située sur la case centrale (Figure 4).

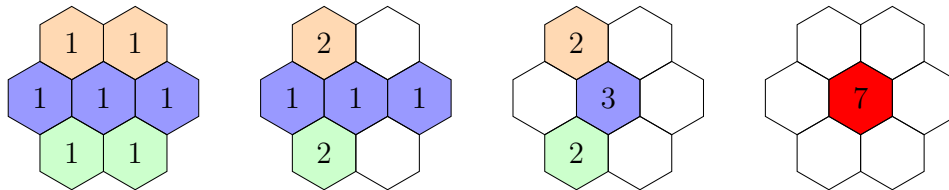


FIGURE 4 – Un exemple de stratégie donnant une seule pile de taille 7 pour $\mathcal{H}_2$.

Ainsi, le minimum $\mathcal{X}(\mathcal{H}_2)$ de piles pour $\mathcal{H}_2$ est aussi de 1.

Remarque 1. *Il est à noter qu'à partir de la première configuration, les jetons qui entourent la case centrale peuvent également être déplacés vers le centre un par un pour former une seule pile de taille 7.*

Pour l'étude de $\mathcal{H}_3$, afin d'identifier facilement la constitution des différentes piles, nous proposons une coloration. En effet, dans la Figure 5, par exemple, on obtient une pile bleue de 4 jetons, une pile rose de 2 jetons, etc.. De plus, les nombres qui apparaissent dans certains hexagones représentent la taille obtenue après absorption de jetons d'une même couleur et fige ainsi leur emplacement.

Naturellement, on cherche à généraliser l'idée qui a permis de regrouper les jetons en une seule pile pour $\mathcal{H}_2$: faire converger progressivement les jetons du bord vers le centre. La stratégie décrite par la Figure 5 met en œuvre cette idée en libérant d'abord les jetons situés sur le bord de $\mathcal{H}_3$. Cela permet de constituer 7 piles avec des tailles différentes (Figure 5 à gauche). Nous réitérons la procédure à destination de la case hexagonale centrale. D'abord, on empile la case orange vers la case rouge. Cela forme une case centrale de taille 2. Ensuite nous empilons la case rose de taille 2, sur la case centrale rouge maintenant de taille 2, ce qui donne alors une case centrale de taille 4. On réitère ce processus qui permet d'exhiber une seule pile de taille 19 (Figure 5 à droite).

Ainsi, le minimum $\mathcal{X}(\mathcal{H}_3)$ de piles pour $\mathcal{H}_3$ est également de 1.

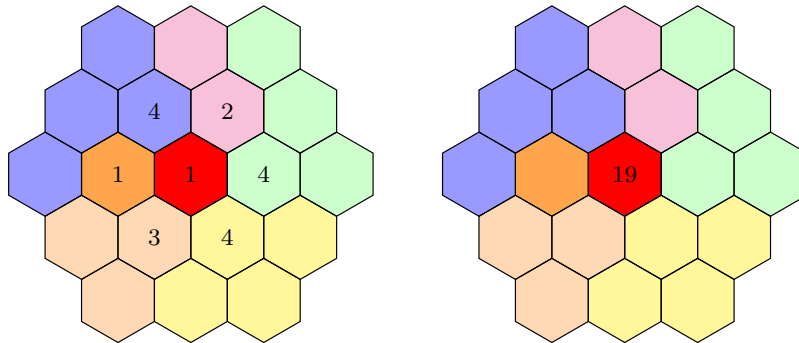


FIGURE 5 – Un exemple de stratégie permettant d'obtenir une seule pile pour $\mathcal{H}_3$.

L'étude de $\mathcal{H}_4$ devient plus complexe. Plusieurs essais sont en effet nécessaires pour aboutir à un résultat jugé raisonnable. Ces essais permettent là-encore de travailler la notion de contre-exemple en mathématiques, en exhibant une solution plus petite que celles trouvées dans des précédents essais. Une de ces stratégies consiste à partitionner la grille $\mathcal{H}_4$ sous la forme de triangles. On peut en effet constituer six formes s'apparentant à des triangles comme le montre la Figure 6, chacune constituée d'au moins six hexagones. Pour une des formes triangulaires, la case hexagonale centrale $\mathcal{H}_4$ a été ajoutée, ce qui porte à sept le nombre de cases hexagonales dans ce cas. Ensuite, il faut faire en sorte que les piles constituées sur chacune des formes triangulaires soient situées sur une zone frontière afin de pouvoir les empiler deux à deux. Par exemple, la forme triangulaire rouge permet d'avoir une seule pile de taille 6. Il en est de même pour la forme triangulaire

orange. Ces deux piles sont situées sur une zone frontière puisqu’elles sont sur deux cases hexagonales adjacentes ne possédant pas la même coloration. Il suffit donc d’empiler, deux à deux, les piles situées sur ces zones frontières afin d’obtenir une majoration du minimum (Figure 6). Ainsi, cette procédure permet de déterminer que le minimum de piles pour la grille hexagonale $\mathcal{H}_4$ est d’au plus 3. Autrement dit que le minimum de piles $\mathcal{X}(\mathcal{H}_4)$ pour $\mathcal{H}_4$ est inférieur ou égal à 3.

Remarque 2. *En revanche, il est à noter que cette stratégie ne permet pas de prouver que le minimum vaut 3. Elle permet seulement de donner un encadrement de ce minimum pour la grille $\mathcal{H}_4$ à savoir : $1 \leq \mathcal{X}(\mathcal{H}_4) \leq 3$. Par conséquent ce minimum vaut soit 1, soit 2, soit 3. Plusieurs essais permettent tout de même de conjecturer raisonnablement que 3 semble être ce minimum. Nous le prouverons d’ailleurs au cours de cet article.*

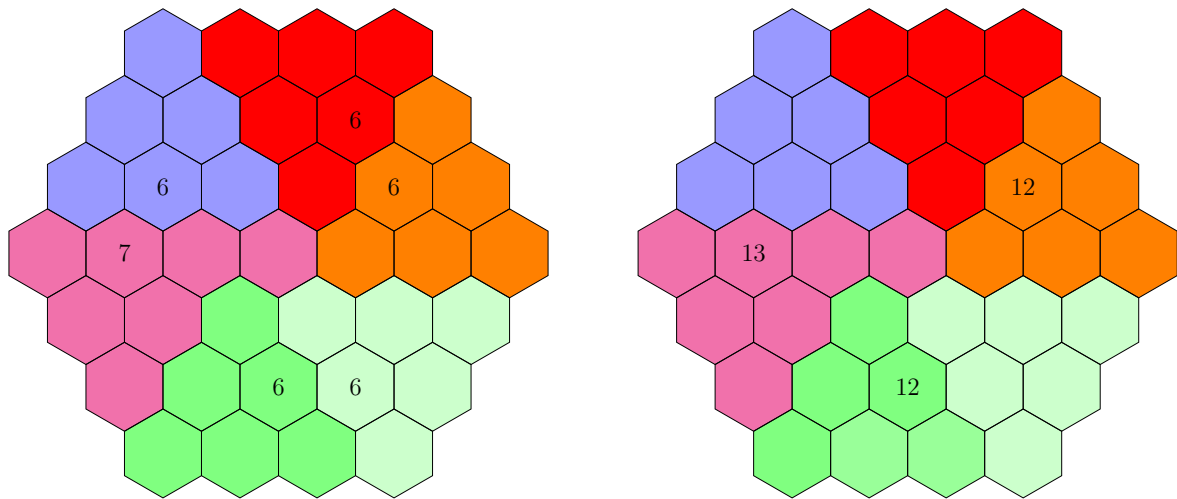


FIGURE 6 – Un exemple de stratégie en trois piles pour la grille $\mathcal{H}_4$.

Les essais réalisés ensuite sur la grille hexagonale $\mathcal{H}_5$ permettent aussi un travail sur les notions de contre-exemple, de majorant, de minorant et *a fortiori* d’encadrement en lien avec le terme « d’au plus » et « d’au moins ». Par exemple, on trouve une solution à sept piles (Figure 7), puis une, plus optimale, à six piles (Figure 8). Ainsi, pour la grille $\mathcal{H}_5$ nous obtenons un encadrement du minimum $\mathcal{X}(\mathcal{H}_5)$ à savoir : $1 \leq \mathcal{X}(\mathcal{H}_5) \leq 6$.

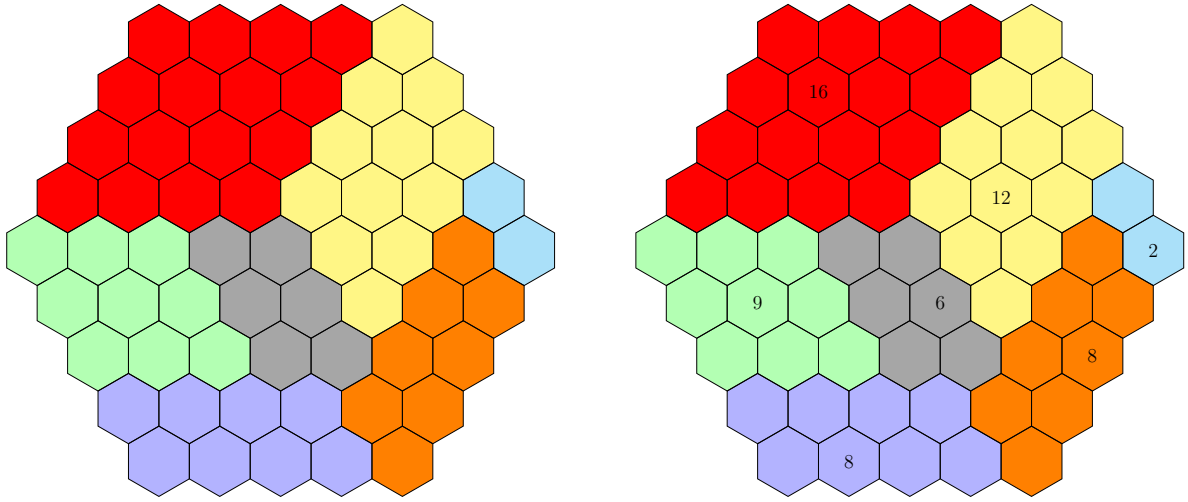


FIGURE 7 – Un exemple de stratégie en sept piles pour la grille $\mathcal{H}_5$.

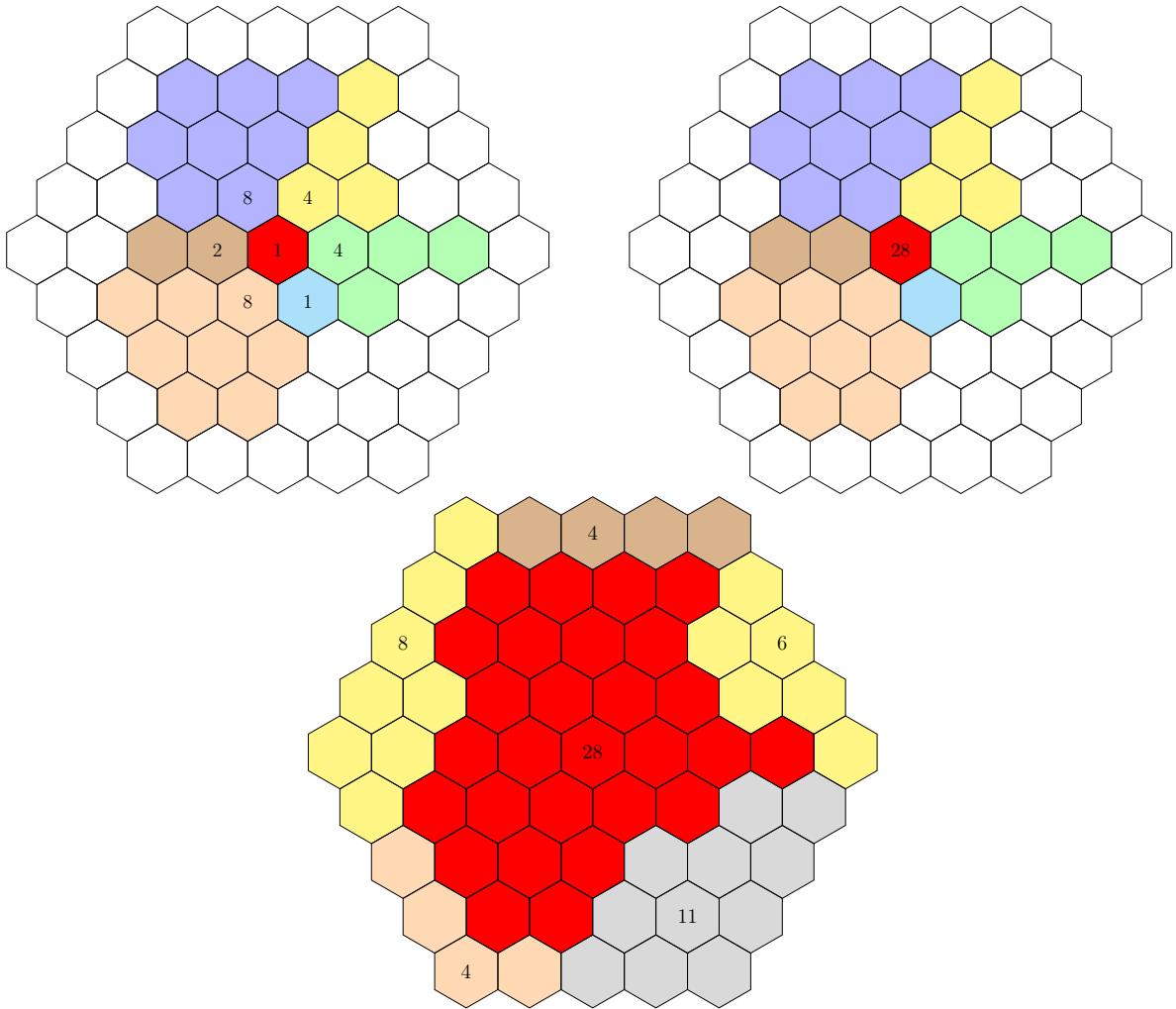


FIGURE 8 – Un exemple de stratégie en six piles pour la grille $\mathcal{H}_5$.

En somme, l'étude de cas particuliers a permis d'établir, par des arguments locaux, le minimum $\mathcal{X}(\mathcal{H}_n)$ pour les grilles $\mathcal{H}_n$ pour $n \in \{1, 2, 3\}$. Cette étude permet aussi de travailler la notion de contre-exemple. En effet, par exemple pour $\mathcal{H}_2$, on avait d'abord trouvé une solution à deux piles, et pourtant un contre-exemple avec une seule pile vient prouver que deux n'est pas le minimum. En réalité, ce qu'on pouvait dire lorsqu'on a trouvé une solution à deux piles, c'est uniquement que $1 \leq \mathcal{X}(\mathcal{H}_2) \leq 2$. Ainsi, la notion d'encadrement peut aussi être mobilisée en lien étroit avec les notions « d'au plus » ($\leq$) et « d'au moins » ($\geq$) qui sont fortement présentes dans les problèmes d'optimisation combinatoire. Par ailleurs, la structuration des stratégies évolue dès lors que la grille devient plus grande. Effectivement, dès que $n = 4$ ou $n = 5$, obtenir l'optimum n'est pas chose facile. En général, ce que l'on peut exhiber est seulement une majoration du nombre de piles, sans toutefois garantir que cette majoration soit la plus petite possible (borne supérieure).

Ainsi, à la suite de cette étude de cas, nous obtenons les résultats suivants.

Proposition 1. *Pour les grilles $\mathcal{H}_n$, avec $1 \leq n \leq 5$, on a :*

$$\begin{cases} \mathcal{X}(\mathcal{H}_n) = 1 \text{ pour } n \in \{1, 2, 3\}, \\ \mathcal{X}(\mathcal{H}_4) \leq 3, \\ \mathcal{X}(\mathcal{H}_5) \leq 6. \end{cases}$$

Dans la continuité de ces premiers résultats et afin d'étudier le problème dans sa généralité et de donner, entre autres, une réponse complète pour les grilles $\mathcal{H}_4$ et $\mathcal{H}_5$, il nous faut d'abord dénombrer le nombre de cases qui composent la grille $(\mathcal{H}_n)_{n \geq 1}$.

3 Dénombrement du nombre de cases d'une grille hexagonale de côté $n \geq 1$

Afin d'aborder la résolution du problème nous avons besoin de calculer l'aire de la grille hexagonale $(\mathcal{H}_n)_{n \geq 1}$, autrement dit, dénombrer le nombre de cases qui composent $(\mathcal{H}_n)_{n \geq 1}$. En effet, comme dans le cas des grilles rectangulaires (DA RONCH & HOCQUARD, 2026a), nous cherchons à déterminer le nombre minimum de piles sur cette grille. Pour cela, nous nous intéressons aux bornes supérieure et inférieure afin d'en déduire un encadrement, voire une égalité permettant de donner une valeur du minimum. Dans ces considérations, nous cherchons dans un premier temps à caractériser la borne inférieure pour ce problème. Pour cela, il nous faut changer de point de vue sur ce dernier en regardant un problème dual. À savoir :

- **Instances.** Une grille hexagonale $(\mathcal{H}_n)_{n \geq 1}$ et un jeton sur chacune des cases.
- **Question.** Quelle est la taille maximale d'une pile que l'on peut construire avec des jetons sur une grille $(\mathcal{H}_n)_{n \geq 1}$.

Afin de tenter d'apporter des éléments de réponse à cette question, nous proposons de commencer par dénombrer le nombre de cases qui composent la grille $(\mathcal{H}_n)_{n \geq 1}$. Nous donnons à cette occasion différentes approches, géométrique et arithmétique, permettant d'exhiber ce nombre en fonction du niveau d'enseignement. Par exemple, au collège, ce cas peut être abordé en utilisant une approche arithmético-géométrique fondée sur des constructions géométriques auxiliaires (découpage en triangles, réarrangement en rectangle). Au lycée, il peut être traité selon une approche arithmétique reposant sur le principe de récurrence.

Avant de détailler les aspects techniques de la visualisation, il convient d'introduire des conventions géométriques utilisées pour organiser les informations. La structure hexagonale repose sur un agencement en couronnes concentriques, permettant d'identifier chaque case hexagonale par une adresse unique notée $C_{i,j}$.

La grille se déploie par couches successives, où l'indice i désigne la distance au centre :

- Niveau 0 (C_0) : l'hexagone central, point d'origine de la structure.
- Niveau 1 ($C_{1,j}$) : la première couronne entourant le centre, composée de 6 cases.
- Niveau 2 ($C_{2,j}$) : la deuxième couronne enveloppant la précédente, composée de 12 cases.

Au sein d'une même couronne, chaque case reçoit un indice de position j . Pour assurer une cohérence de lecture, cette numérotation suit le sens horaire :

1. Le décompte débute systématiquement au sommet de la couronne (position « nord »).
2. L'indice progresse ensuite sur tout le périmètre de la couche.

Cette notation $C_{i,j}$ permet de localiser immédiatement n'importe quel élément : le premier nombre indique l'éloignement du centre, et le second sa position circulaire. Ce système facilite l'analyse des interactions de voisinage (Figure 9).

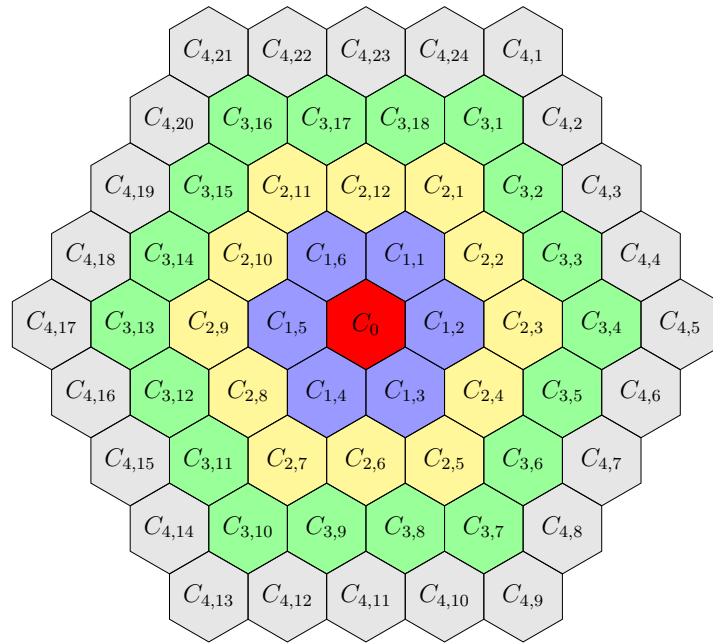


FIGURE 9 – Représentation d'une grille hexagonale de côté $n = 5$ dont le centre C_0 est entouré par 4 couronnes.

3.1 Preuve géométrique par découpages triangulaires

Notre grille a une case centrale rouge C_0 , qu'on garde de côté pour la fin. On découpe le reste. Autour de ce centre, la grille hexagonale peut être découpée en six parts exactement identiques. Chaque part a la forme d'un triangle (Figure 10).

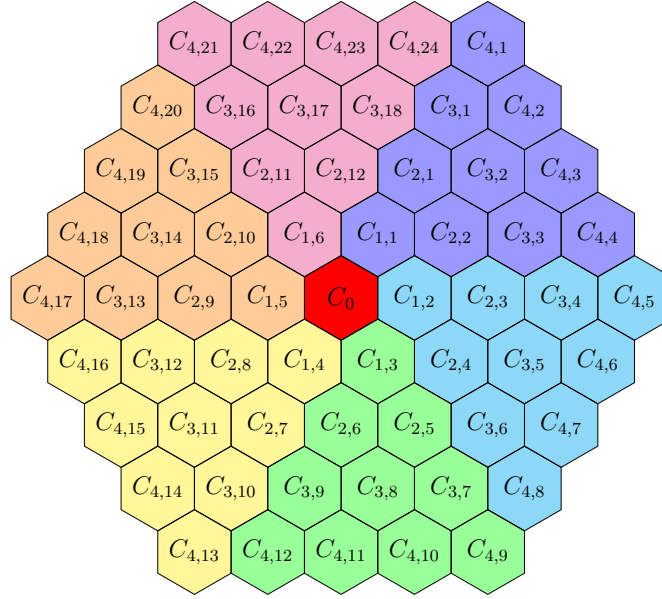


FIGURE 10 – Découpage d’une grille en 6 triangles de même taille.

On compte les cases d’un seul triangle. Regardons un de ces triangles sur une grille de taille n .

1. Sur la première couronne, il a 1 case.
2. Sur la deuxième couronne, il a 2 cases.
3. Sur la troisième couronne, il a 3 cases.

... et ainsi de suite jusqu’au bord (qui est la couronne numéro $n - 1$).

Le nombre de cases dans un seul triangle est donc donné par la somme suivante :

$$\mathcal{A}_{\triangle} = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1).$$

Ainsi, le nombre de cases d’une grille hexagonale $(\mathcal{H}_n)_{n \geq 1}$ vaut :

$$\mathcal{A}_{\hexagon} = 6\mathcal{A}_{\triangle} + 1 = 6 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)) + 1$$

puisque cette grille peut être partitionnée en six triangles auxquels on ajoute la case centrale.

Pour calculer cette somme, plusieurs approches peuvent être proposées en fonction du niveau d’enseignement.

Une approche géométrique bien connue consiste à partitionner une grille rectangulaire de largeur n et de hauteur $(n - 1)$ en deux « triangles » identiques constitués de cases. Un pointant vers le haut, l’autre vers le bas (Figure 11).

Ainsi, le nombre de cases du rectangle est donc de $n \times (n - 1)$ cases. Puisque l’aire de notre triangle est la moitié de l’aire de ce rectangle, un triangle contient exactement : $n \times (n - 1)/2$ cases.

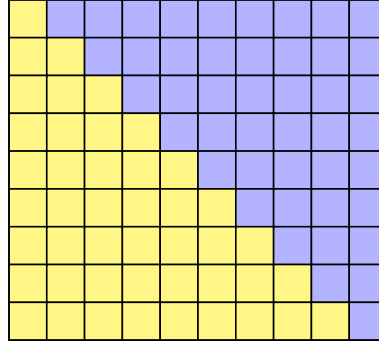


FIGURE 11 – Preuve géométrique de la somme des $(n - 1)$ premiers entiers.

Ainsi la somme $1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) = n \times (n - 1)/2$. Par conséquent, le nombre de cases qui composent une grille hexagonale $(\mathcal{H}_n)_{n \geq 1}$ vaut :

$$\forall n \geq 1, \quad \mathcal{A}_{\square} = 6 \cdot n \times (n - 1)/2 + 1.$$

Soit au total :

$$\forall n \geq 1, \quad \mathcal{A}_{\square} = 6 \left[\frac{n \times (n - 1)}{2} \right] + 1 = 3n(n - 1) + 1.$$

Ainsi, on obtient le résultat suivant.

Proposition 2. *Pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{H}_n$ possède $3n(n - 1) + 1$ cases.*

Remarque 3. *On notera que la suite $(3n^2 - 3n + 1)_{n \geq 1}$ correspond aux nombres hexagonaux centrés, bien connus en théorie des nombres figurés.*

Remarque 4. *Pour calculer la somme S_{n-1} des $(n - 1)$ premiers entiers on aurait pu sommer de cette manière : pour tout $n \geq 1$*

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= 1 + 2 + \dots + n - 1 \\ S_{n-1} &= (n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1 \\ 2S_{n-1} &= n + n + \dots + n \end{aligned}$$

Ainsi, on aurait obtenu :

$$\forall n \geq 1, \quad S_{n-1} = \frac{n(n - 1)}{2}.$$

Le résultat relatif à la Proposition 2 peut aussi être démontré, au niveau lycée, par récurrence sur n . Nous en donnons une preuve dans la section ci-après.

3.2 Preuve par récurrence

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la propriété $\mathcal{P}(n)$: une grille hexagonale de côté n contient $H_n = 3n^2 - 3n + 1$ cases.

Initialisation : Pour $n = 1$:

- D’une part, la formule donne : $3(1)^2 - 3(1) + 1 = 3 - 3 + 1 = 1$.
- D’autre part, une grille de côté 1 est constituée uniquement de sa case centrale, soit 1 case.

L’égalité est vérifiée, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons qu’il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie (hypothèse de récurrence), c’est-à-dire que $H_k = 3k^2 - 3k + 1$.
Montrons qu’alors la propriété $\mathcal{P}(k + 1)$ est vraie, soit :

$$H_{k+1} = 3(k + 1)^2 - 3(k + 1) + 1.$$

Analyse géométrique :

Pour passer d’une grille de côté k à une grille de côté $k + 1$, on ajoute une couche périphérique (couronne). Cette couronne est composée de 6 côtés de $k + 1$ cases chacun. En soustrayant les 6 sommets pour éviter de les compter deux fois, le nombre de cases ajoutées est $6(k + 1) - 6 = 6k$.
On a donc la relation :

$$\begin{aligned} H_{k+1} &= H_k + 6k \\ H_{k+1} &= (3k^2 - 3k + 1) + 6k \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ H_{k+1} &= 3k^2 + 3k + 1 \end{aligned}$$

Or, développons l’expression visée pour $\mathcal{P}(k + 1)$:

$$\begin{aligned} 3(k + 1)^2 - 3(k + 1) + 1 &= 3(k^2 + 2k + 1) - 3k - 3 + 1 \\ &= 3k^2 + 6k + 3 - 3k - 2 \\ &= 3k^2 + 3k + 1 \end{aligned}$$

On constate que pour tout $k \geq 1$, $H_{k+1} = 3(k + 1)^2 - 3(k + 1) + 1$. L’hérédité est donc démontrée.

La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 1 et elle est héréditaire. D’après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie et on a :

$$H_n = 3n^2 - 3n + 1.$$

4 Taille de la plus haute pile sur une grille hexagonale de côté $n \geq 1$

Pour structurer notre preuve, nous devons définir la notion de **séquence**.

La séquence représente l’état final des six cases de la Couronne 1 (rouge) qui entourent directement le centre, juste avant que le centre ne commence à les absorber. Nous donnons ci-après un exemple (Figure 12).

- Soit la séquence $[1, 2, 4]$. Cela signifie que le centre (qui vaut 1) va d’abord absorber un voisin de taille 1 ($1 + 1 = 2$), puis un voisin de taille 2 ($2 + 2 = 4$), puis un voisin de taille 4 ($4 + 4 = 8$).
- Pour que la séquence soit valide, il faut respecter la règle d’or arithmétique : à chaque étape, le centre doit être supérieur ou égal à la case qu’il s’apprête à absorber.

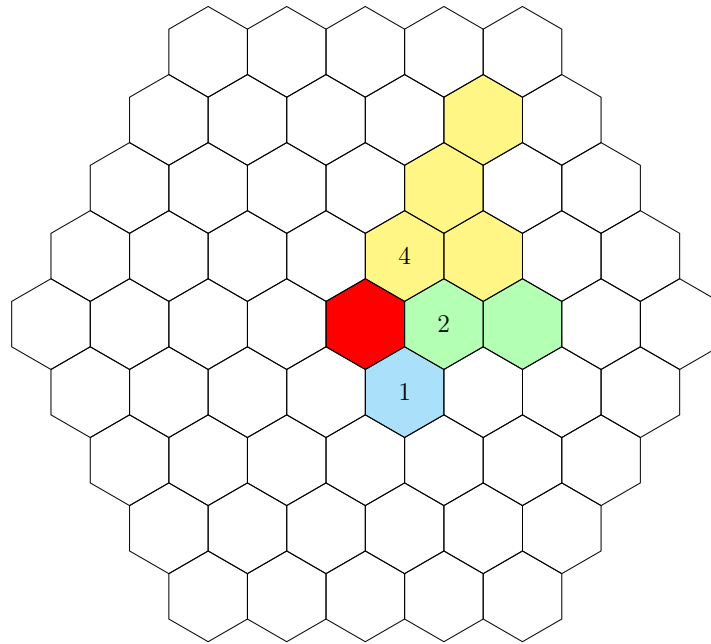


FIGURE 12 – Exemple d’une séquence $[1, 2, 4]$.

Avant d’entamer l’analyse, une précision s’impose : le modèle de la séquence, dans lequel les six cases de la Couronne 1 livrent chacune leur pile au centre, n’est qu’un scénario possible. Les règles du jeu autorisent en effet une case de la Couronne 1 à déverser sa pile sur une case *voisine de la même couronne* : nous appellerons un tel déplacement une **fusion latérale**. Nous verrons que cette possibilité, d’apparence anodine, joue un rôle décisif dans la valeur du maximum.

4.1 Le lemme du doublement

L’outil central de toute l’étude est le lemme élémentaire suivant.

Lemme 1 (Lemme du doublement). *Une pile ayant effectué k absorptions, avec $k \geq 1$, est de taille au plus 2^k .*

Démonstration. Par récurrence sur k ($k \geq 1$) : la règle d’or impose qu’à chaque étape la pile absorbée soit de taille inférieure ou égale à la pile absorbante, dont la taille fait donc au mieux que doubler. Partant de 1, on obtient au plus 2^k après k absorptions. $\square$

Notons également deux conséquences immédiates des règles, que nous utiliserons constamment : d’une part, une case ne peut recevoir qu’une *seule fois* la pile de chacune de ses voisines (une fois sa pile déplacée, la case émettrice est vide, et une case vide ne peut plus être ni traversée ni remplie) ; d’autre part, la *première* pile absorbée par une case vaut nécessairement 1, puisque la case absorbante vaut elle-même 1 à cet instant.

4.2 Une première exploration : et si les six voisines livraient ?

Cherchons la plus haute pile possible. La stratégie la plus naturelle consiste à faire converger toute la matière vers une case, que nous appellerons le *centre*. Par symétrie de la grille, toute case intérieure joue un rôle équivalent : le choix de la case cible n’a donc pas d’incidence sur l’analyse qui suit, et nous l’appelons « centre » sans perte de généralité. Nous demandons à ses six voisines de la Couronne 1 de lui livrer chacune leur pile. Explorons

d’abord ce scénario, que nous appellerons le **régime naïf** : les six voisines livrent, et aucune fusion latérale n’a lieu.

Dans ce régime, chaque voisine ne peut grandir qu’en absorbant par ses *portes* (ses trois voisines de la Couronne 2). Deux obstacles vont borner la croissance du centre.

Le budget des portes. La Couronne 2 compte 12 portes. Cependant, pour que le centre puisse démarrer, sa première absorption doit valoir 1 (règle rappelée plus haut) : l’une des six voisines reste donc à la taille 1 et n’absorbe rien. La porte située derrière cette voisine devient inexploitable : le centre ne l’absorbera pas, et déplacer latéralement le jeton de cette voisine créerait une case vide, un « trou » infranchissable, qui couperait le seul pont vers la Couronne 3. Cette porte est donc condamnée, et le budget effectif tombe à 11 portes actives, c’est-à-dire 11 absorptions distinctes réparties entre les six voisines.

Le partage des portes. Deux voisines du centre, adjacentes entre elles sur la Couronne 1, partagent une porte commune sur la Couronne 2 (Figure 13). Pour qu’une voisine atteigne 8, il lui faut ses trois portes en exclusivité ; mais si elle s’approprie une porte partagée, sa voisine ne dispose plus que de deux portes et plafonne alors à 4. Deux piles de taille 8 ne peuvent donc pas être adjacentes sur la Couronne 1.

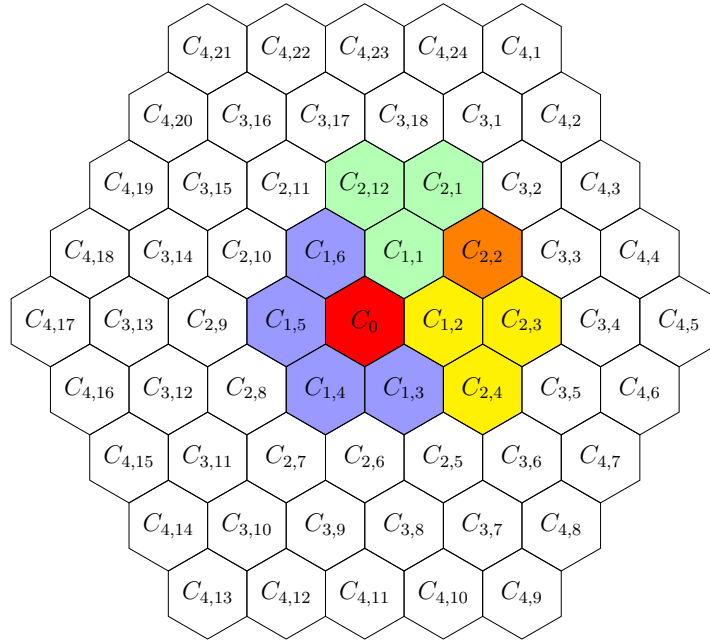


FIGURE 13 – Deux voisines de la Couronne 1 partagent une porte : elles ne peuvent atteindre 8 toutes les deux.

Il en découle qu’*au plus deux* voisines peuvent atteindre 8. En effet, trois piles de taille 8 devraient être deux à deux non adjacentes, donc occuper les trois positions alternées de la Couronne 1 ; elles monopoliseraient alors 9 portes, ne laissant à chacune des trois voisines intermédiaires qu’une seule porte, soit une taille plafonnée à 2 – insuffisant pour fournir le 4 dont le centre a besoin. La séquence idéale $[1, 2, 4, 8, 8, 8]$ est ainsi hors d’atteinte.

Reste à maximiser la pile du centre sous ces contraintes. L’intuition est la suivante : avec au plus deux piles de 8 (coût : 6 portes), il reste 5 portes pour bâtir la rampe qui hisse le centre jusqu’à 8, palier nécessaire pour absorber un 8 ; la rampe la plus économe est $[1, 2, 4]$ (3 portes), et les 2 portes restantes ne produisent qu’une pile de 4. On aboutit à la séquence $[1, 2, 4, 4, 8, 8]$ (Figure 14), qui livre au centre

$$1 + 1 + 2 + 4 + 4 + 8 + 8 = 28,$$

la variante $[1, 2, 2, 6, 8, 8]$ atteignant la même valeur (Figure 15). La proposition ci-dessous établit rigoureusement que cette valeur est optimale.

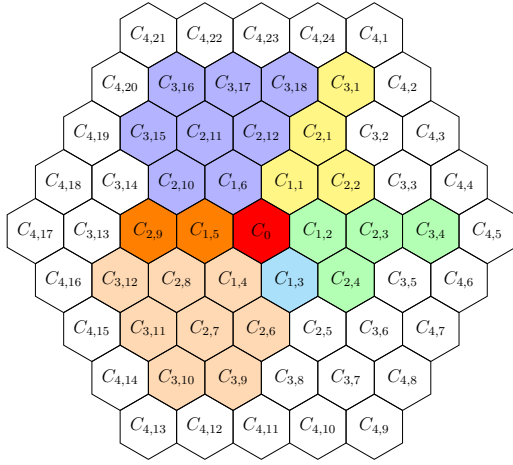


FIGURE 14 – Séquence $[1, 2, 4, 4, 8, 8]$.

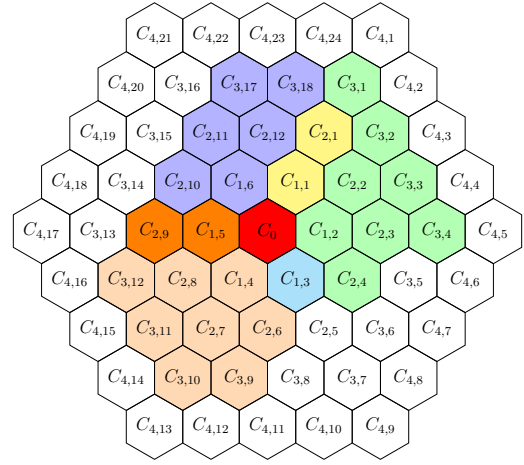


FIGURE 15 – Séquence $[1, 2, 2, 6, 8, 8]$.

Proposition 3 (Plafond du régime naïf). *Si les six voisines du centre lui livrent leur pile et qu’aucune fusion latérale n’a lieu, alors la hauteur de la pile finale est d’au plus 28, valeur atteinte par la séquence $[1, 2, 4, 4, 8, 8]$.*

Démonstration. Chaque voisine i ($1 \leq i \leq 6$) du centre ne grandit que par ses portes ; si elle en utilise c_i , le Lemme du doublement la borne par 2^{c_i} , et l’on peut supposer sa livraison égale à 2^{c_i} . Les entiers c_i vérifient $0 \leq c_i \leq 3$ (chaque voisine n’a que trois portes) et $\sum_{i=1}^6 c_i \leq 11$ (budget effectif des portes). Enfin, en notant $d_1 \leq \dots \leq d_6$ les six livraisons triées, la règle d’or impose la condition d’échelle $d_j \leq 1 + \sum_{k < j} d_k$ pour tout j . La hauteur finale vaut $S = 1 + \sum_i d_i$, que nous majorons en trois temps.

Au plus deux voisines atteignent 8. Supposons par l’absurde que trois d’entre elles y parviennent : elles consomment $3 \times 3 = 9$ portes, n’en laissant que 2 aux trois autres, dont les exposants vérifient donc $\sum c \leq 2$. Ces trois voisines livrent en tout au plus 2^c avec $\sum c \leq 2$, soit une somme majorée par $4 + 1 + 1 = 6$. Or, pour absorber ne serait-ce qu’une pile de 8, le centre doit d’abord atteindre la taille 8, c’est-à-dire accumuler 7 à partir des seules livraisons inférieures à 8 ; il ne dispose pour cela que de ces trois petites livraisons, dont la somme est au plus $6 < 7$. Le centre plafonne à 7 et ne peut absorber aucun 8 : contradiction.

Le cas de deux 8 donne au plus 28. Aucune des quatre voisines restantes ne peut non plus atteindre 8, puisque l’on vient de montrer qu’au plus deux voisines peuvent atteindre cette valeur. Les deux piles de 8 coûtent 6 portes ; il en reste 5 pour les quatre autres voisines. Pour absorber le premier 8, le centre doit atteindre 8, donc accumuler 7 au préalable. La façon la plus économe d’accumuler 7 à l’aide de puissances de 2 est $1 + 2 + 4$, d’exposants 0, 1, 2, soit un coût de 3 portes ; toute autre rampe atteignant 7 coûte au moins autant. Il ne reste alors que $5 - 3 = 2$ portes pour la dernière voisine, dont la livraison est ainsi bornée par $2^2 = 4$. La hauteur est donc majorée par

$$S \leq 1 + \underbrace{(1 + 2 + 4)}_{\text{rampe}} + \underbrace{4}_{\text{reste}} + \underbrace{8 + 8}_{\text{deux 8}} = 28,$$

valeur atteinte par la séquence $[1, 2, 4, 4, 8, 8]$ (Figure 14), ainsi que par la variante $[1, 2, 2, 6, 8, 8]$ (Figure 15).

Le cas d’au plus un 8 est strictement moins bon. Par définition de ce cas, au plus une voisine atteint 8 ; les cinq autres sont donc limitées à des livraisons dans $\{1, 2, 4\}$. La condition d’échelle impose $d_1 = 1$, puis $d_2 \leq 1 + d_1 = 2$: on retrouve exactement la rampe $[1, 2, 4]$ (coût 3 portes) qui amène le centre à 8. Les livraisons suivantes peuvent alors chacune atteindre leur maximum autorisé de 4, la dernière atteignant 8. On obtient ainsi la séquence $[1, 2, 4, 4, 4, 8]$, qui livre au centre

$$S = 1 + 1 + 2 + 4 + 4 + 4 + 8 = 24 < 28.$$

Dans tous les cas, $S \leq 28$. □

4.3 La bascule : pourquoi 28 n’est pas le maximum

Le régime naïf plafonne à 28, et l’on pourrait croire cette valeur indépassable. Mais l’hypothèse « les six voisines livrent » est trop restrictive. Rien dans les règles n’oblige les six voisines à livrer : l’une d’elles, notée M , peut au contraire déverser sa pile sur sa voisine V de la même couronne – c’est la *fusion latérale*. La case V gagne alors une quatrième absorption et peut atteindre $2^4 = 16$. Le centre ne reçoit plus que cinq livraisons, mais sa séquence n’est plus $[1, 2, 4, 4, 8, 8]$: elle devient $[1, 2, 4, 8, 16]$, où le sacrifice d’une livraison (un 4 perdu) est compensé par un cran de doublement supplémentaire (un 16 gagné). Le bilan est favorable, et cette séquence atteint

$$1 + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 32.$$

Autrement dit, la fusion latérale ne change pas les règles : elle change la *séquence*. C’est précisément là que la notion de séquence prend tout son sens – elle rend visible la bascule d’un régime à l’autre, et transforme deux valeurs isolées, 28 et 32, en deux états d’une même structure. Il reste à confirmer que 32 est bien atteignable et qu’aucune séquence ne peut faire mieux.

4.4 La borne absolue : on ne dépasse jamais 32

La bascule précédente suggère que 32 pourrait être le vrai maximum. Encore faut-il s’assurer qu’aucune stratégie, si astucieuse soit-elle, ne permet de faire mieux. C’est l’objet de la majoration suivante, qui unifie en un seul argument le régime naïf et le régime avec fusion.

Appelons c la case où se trouve la pile finale. Tout jeton qui rejoint cette pile y entre par l’une des six voisines de c (les cases de la Couronne 1), et chacune de ces voisines ne livre qu’une seule fois.

Proposition 4 (Majoration). *Sur toute grille hexagonale, la hauteur d’une pile est d’au plus 32.*

Démonstration. Notons m le nombre de voisines de c qui ne livrent *pas* leur pile au centre – parce qu’elles ont fusionné latéralement, ou qu’elles sont restées inutilisées. Deux cas se présentent.

Cas $m \geq 1$. La case c reçoit au plus $6 - m \leq 5$ livraisons. Le Lemme du doublement, appliqué à la pile de c elle-même, la majore alors par $2^5 = 32$.

Cas $m = 0$. Les six voisines livrent, et aucune fusion latérale n'a pu avoir lieu : si une case W avait déversé sa pile sur sa voisine, elle serait vide et n'aurait rien livré au centre, en contradiction avec $m = 0$. On est donc exactement dans le régime naïf, et la Proposition 3 majore la pile finale par $28 \leq 32$.

Dans les deux cas, la hauteur 33 est hors d'atteinte. $\square$

La répartition du travail entre les deux cas est éclairante : dès qu'une voisine est sacrifiée par fusion latérale, le doublement appliqué au centre suffit à lui seul à donner la borne ; et quand aucune ne l'est, c'est l'analyse fine du régime naïf – le décompte des portes – qui prend le relais et donne même une borne plus basse (28). La borne de 32 n'est donc atteinte que grâce à la fusion latérale ; reste à vérifier qu'elle l'est effectivement.

4.5 La fusion latérale à l'œuvre : une pile de 32

Il reste à réaliser concrètement la séquence $[1, 2, 4, 8, 16]$ entrevue lors de la bascule. Tout repose sur la tour de 16 construite en V : la case V absorbe d'abord par ses trois portes (1, puis 2, puis 4, atteignant 8), puis reçoit la fusion latérale de sa voisine M – sa quatrième absorption – pour atteindre $2^4 = 16$. La construction ci-dessous détaille les déplacements et le réalise sur $\mathcal{H}_5$ (Figure 16).

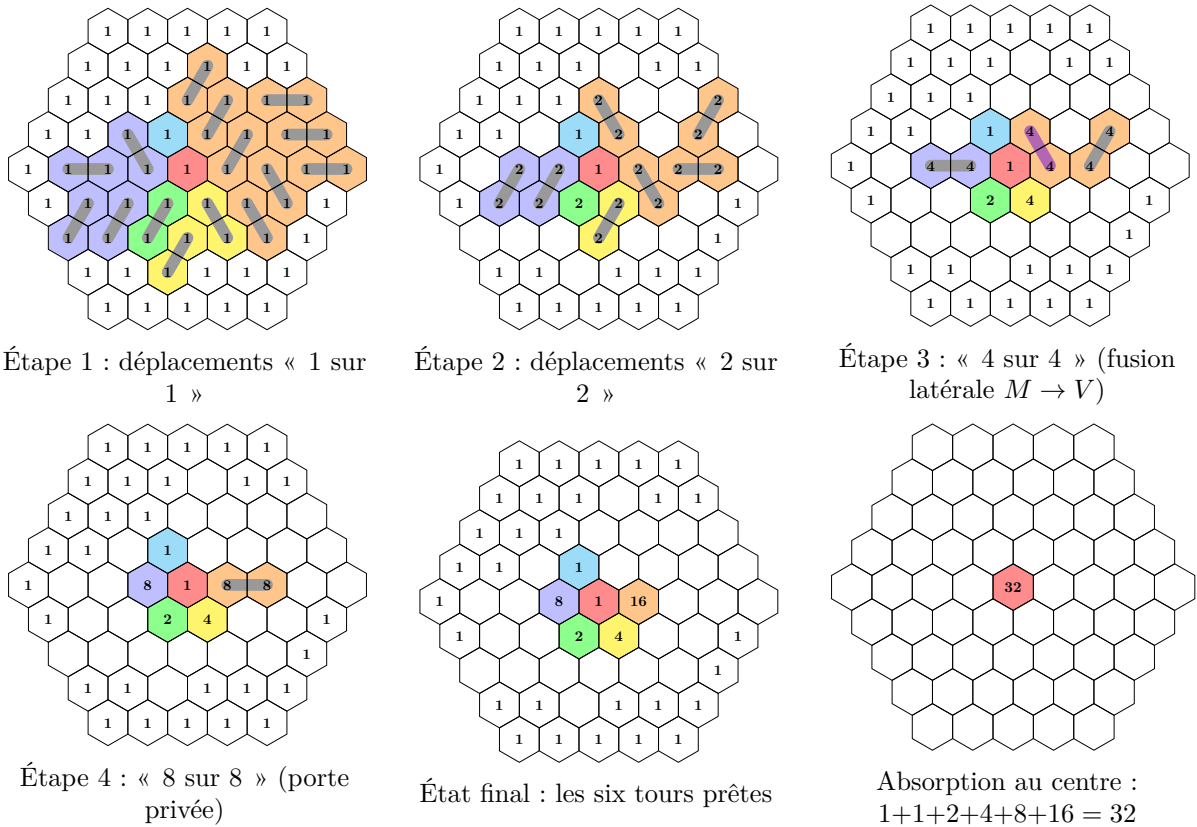


FIGURE 16 – Construction pas à pas d'une tour de 16 en V sur $\mathcal{H}_5$, avec les six bassins colorés : cyan (1), vert (2), jaune (4), bleu (8) et orange (16). Chaque segment relie une pile à la voisine (de taille supérieure ou égale) sur laquelle elle se déplace en totalité ; le segment violet de l'étape 3 est la fusion latérale $M(4) \rightarrow V(4)$. Les six tours se déversent enfin sur le centre : $1 + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 32$.

4.6 Le théorème des 32

La Proposition 4 (majoration) et la construction de la Figure 16 (minoration) se rejoignent exactement dès que la grille est assez profonde pour porter une porte privée de taille 8. On en déduit le théorème suivant.

Théorème 1. *Pour toute grille hexagonale $\mathcal{H}_n$, la hauteur d’une pile est d’au plus 32. De plus, pour tout $n \geq 4$, la hauteur maximale est exactement de 32.*

Remarque 5. *On pourrait croire, au vu de la Figure 16, que la construction d’une pile de 32 requiert la Couronne 4 et serait donc impossible sur $\mathcal{H}_4$. Il n’en est rien : rien n’oblige la pile finale à occuper le centre de la grille. En plaçant sa racine sur une case à distance 1 du centre de $\mathcal{H}_4$, celle-ci conserve ses deux premières couronnes complètes tout en disposant, du côté opposé, de la profondeur nécessaire pour monter une porte privée jusqu’à 8. La Figure 17 exhibe une telle pile de 32 sur $\mathcal{H}_4$, dont les 31 déplacements ont été vérifiés. La borne du théorème est donc atteinte dès $n = 4$.*

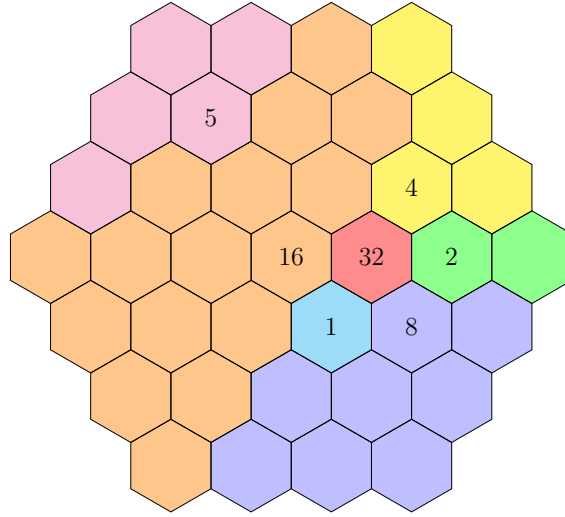


FIGURE 17 – Une pile de 32 et une pile de 5 sur $\mathcal{H}_4$ (partition $37 = 32 + 5$).

Remarque 6. *Cette construction a une conséquence directe sur le problème du minimum de piles. Sur $\mathcal{H}_4$, la pile de 32 ci-dessus n’utilise que 32 des 37 cases ; les cinq cases restantes, situées au bord, s’assemblent en une unique pile de 5. On obtient ainsi une partition $37 = 32 + 5$ en deux piles, ce qui montre que $\mathcal{X}(\mathcal{H}_4) = 2$ (voir Section 5.1).*

Remarque 7. *On retiendra la morale stratégique de ce théorème : la fusion latérale semble localement du gaspillage (une livraison au centre est sacrifiée), mais elle est le seul moyen de prolonger la chaîne des doublements. Ce phénomène fait écho au paradoxe discuté à la Section 5.3.*

Puisque la grille $\mathcal{H}_n$ contient exactement $3n^2 - 3n + 1$ cases (et donc autant de jetons initiaux), ce plafond absolu de 32 jetons par pile induit mécaniquement une borne inférieure sur le nombre de piles nécessaires pour vider le plateau. On en déduit le corollaire immédiat suivant.

Corollaire 1. *Pour tout $n \geq 1$, le nombre minimum de piles vérifie :*

$$\mathcal{X}(\mathcal{H}_n) \geq \left\lceil \frac{3n^2 - 3n + 1}{32} \right\rceil.$$

Autrement dit, pour tout $n \geq 1$, en posant $k = 3n^2 - 3n + 1$, le nombre minimum de piles vérifie :

$$\mathcal{X}(\mathcal{H}_n) \geq \begin{cases} \frac{k}{32} & \text{si } 32 \text{ divise } k \\ q + 1 & \text{sinon, avec } k = 32q + r \text{ et } 0 \leq r < 32. \end{cases}$$

Remarque 8. *Un exercice intéressant consiste à prouver que la quantité $3n^2 - 3n + 1$ n'est jamais divisible par 32. On obtient alors un affinement systématique de la borne inférieure :*

$$\forall n \geq 1, \quad \mathcal{X}(\mathcal{H}_n) \geq q + 1.$$

En effet, il suffit de remarquer que l'expression $3n^2 - 3n + 1$ peut s'écrire $3n(n - 1) + 1$. Or, on peut prouver que le produit de deux entiers consécutifs est toujours pair. Ainsi, $n(n - 1) \in 2\mathbb{N}$ et le multiplier par 3 ne change pas la parité de ce nombre. Par conséquent, comme $3n(n - 1)$ est pair, alors $3n(n - 1) + 1 = 3n^2 - 3n + 1$ est impair. Ce qui signifie qu'il ne pourra jamais être divisible par 2, donc a fortiori par $32 = 2^5$. Cette preuve est accessible dès le collège.

Au lycée, et en particulier en classe de terminale avec l'option mathématiques expertes, on pourra envisager un travail sur la notion de congruences en remarquant que 4 divise 32 : il suffit donc de prouver que $3n^2 - 3n + 1 \not\equiv 0 \pmod{4}$. Comme $3 \equiv -1 \pmod{4}$, on obtient $3n^2 - 3n + 1 \equiv -n^2 + n + 1 \pmod{4}$. Il suffit alors d'examiner les classes possibles de n modulo 4.

- Si $n \equiv 0 \pmod{4}$, alors $-n^2 + n + 1 \equiv 1 \pmod{4}$;
- Si $n \equiv 1 \pmod{4}$, alors $-n^2 + n + 1 \equiv 1 \pmod{4}$;
- Si $n \equiv 2 \pmod{4}$, alors $-n^2 + n + 1 \equiv 3 \pmod{4}$;
- Si $n \equiv 3 \pmod{4}$, alors $-n^2 + n + 1 \equiv 3 \pmod{4}$.

Ce travail sur les quatre classes possibles de n modulo 4 permet de prouver que dans tous les cas $3n^2 - 3n + 1 \equiv 1$ ou $3 \pmod{4}$. Ainsi, $3n^2 - 3n + 1$ n'est pas divisible par 4, donc pas non plus par 32.

En somme, on a donc prouvé la proposition suivante.

Proposition 5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $32 \nmid 3n^2 - 3n + 1$.*

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, puisque 32 ne divise jamais $k = 3n^2 - 3n + 1$, le cas de division exacte ci-dessus ne se produit jamais, et la borne du Corollaire 1 se simplifie en :

$$\mathcal{X}(\mathcal{H}_n) \geq q + 1$$

pour tout $n \geq 1$, avec q et r définis comme ci-dessus ($k = 32q + r$, $0 \leq r < 32$).

5 Retour sur le problème initial du minimum $\mathcal{X}$ de piles

5.1 Le cas de $\mathcal{H}_4$: exactement deux piles

La grille $\mathcal{H}_4$ possède 37 cases donc, d'après le Corollaire 1 appliqué à $n = 4$, le nombre minimum de piles est minoré par $\lceil 37/32 \rceil = 2$. Il est par conséquent formellement impossible de regrouper tous les jetons en une seule pile.

Cette borne inférieure est atteinte. En effet, la Figure 17 exhibe une partition de $\mathcal{H}_4$ en deux piles : une pile de 32, enracinée à distance 1 du centre de la grille et construite par la stratégie de la Section 4.6, et une pile de 5 formée des cinq cases restantes au bord. On a donc $\mathcal{X}(\mathcal{H}_4) \leq 2$, d'où l'égalité.

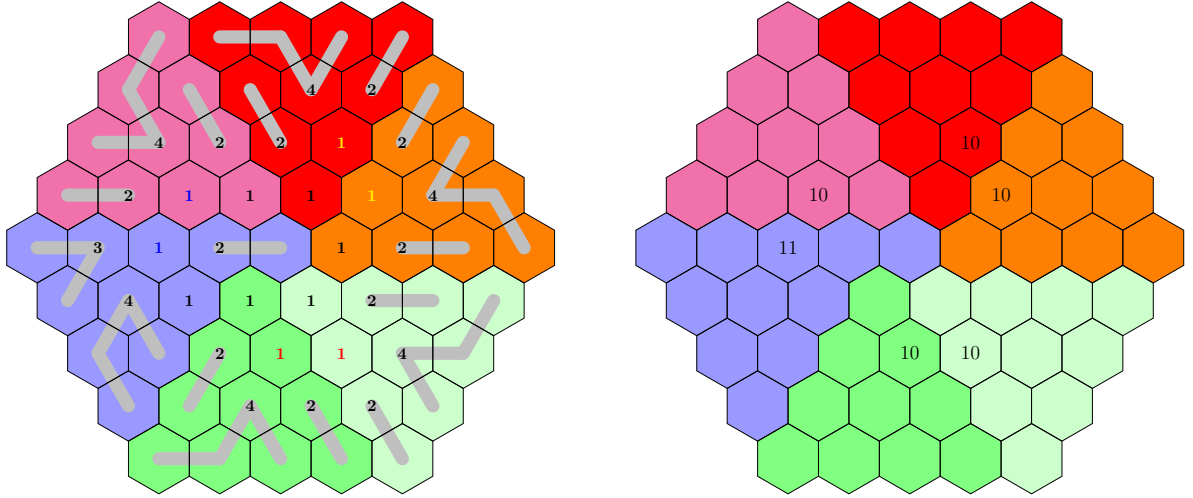
Théorème 2. *Le nombre minimum de piles sur la grille hexagonale $\mathcal{H}_4$ est exactement de 2.*

5.2 Le cas de $\mathcal{H}_5$

La grille $\mathcal{H}_5$ possède 61 cases donc, d'après le Corollaire 1 appliqué à $n = 5$, le nombre minimum de piles est minoré par $\lceil 61/32 \rceil = 2$: ainsi $\mathcal{X}(\mathcal{H}_5) \geq 2$.

Pour la borne supérieure, nous réinvestissons la stratégie de partition en secteurs introduite à la Section 2. Grâce à un découpage de la grille en six formes triangulaires et à un choix judicieux de déplacements (Figure 18), nous obtenons trois piles de tailles respectives 20, 20 et 21, ce qui prouve que $\mathcal{X}(\mathcal{H}_5) \leq 3$.

Par ailleurs, comme nous avons montré que $\mathcal{X}(\mathcal{H}_5) \leq 3$ et $\mathcal{X}(\mathcal{H}_5) \geq 2$ par le Corollaire 1, on en déduit donc l'inégalité suivante : $2 \leq \mathcal{X}(\mathcal{H}_5) \leq 3$.



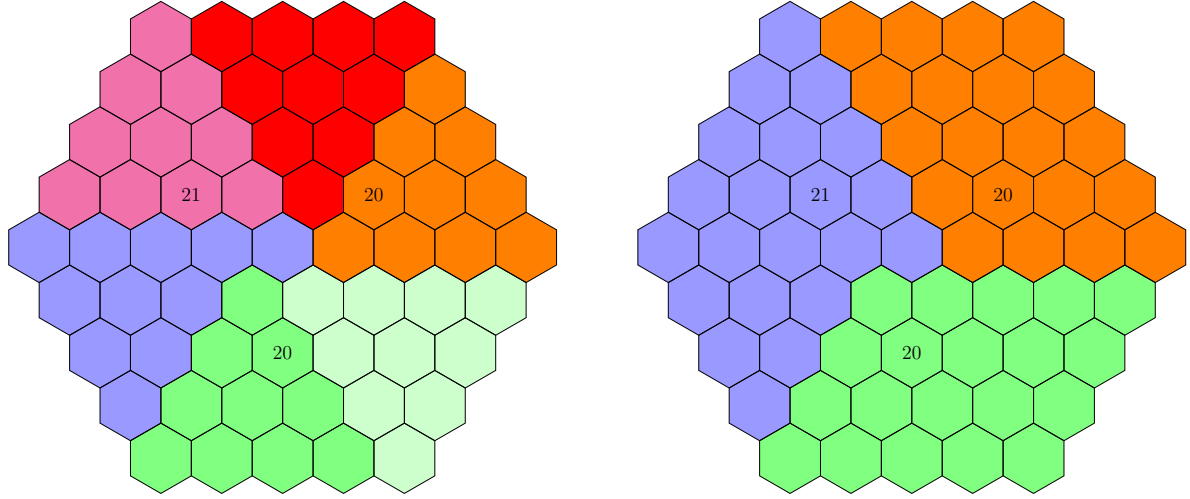


FIGURE 18 – Un exemple de stratégie en trois piles pour la grille $\mathcal{H}_5$.

Contrairement au cas de $\mathcal{H}_4$, où la borne inférieure de 2 était atteinte, cette borne supérieure de 3 ne coïncide pas avec la minoration : la valeur exacte de $\mathcal{X}(\mathcal{H}_5)$ reste indéterminée.

Proposition 6. *Le nombre minimum de piles sur la grille hexagonale $\mathcal{H}_5$ vérifie*

$$2 \leq \mathcal{X}(\mathcal{H}_5) \leq 3.$$

Remarque 9. *La question de savoir si $\mathcal{X}(\mathcal{H}_5) = 2$ ou 3 reste ouverte. Supposons qu'il existe une solution à deux piles, de tailles $a \leq b$ avec $a + b = 61$. D'après le Théorème 1, chaque pile est majorée par 32, donc $b \leq 32$ et par conséquent $a = 61 - b \geq 29$. Il ne reste ainsi que deux répartitions possibles : (29, 32) ou (30, 31).*

Ces deux configurations sont fortement contraintes. Chacune des deux piles, de taille au moins 29, exige un centre disposant de ses deux premières couronnes complètes et de la quasi-totalité de ses portes ; les deux bassins doivent alors se partager sans chevauchement les 61 cases de la grille, en particulier les couronnes centrales, ce qui laisse très peu de latitude. La répartition équilibrée (30, 31) semble à cet égard la plus favorable, les deux empreintes étant de tailles comparables. Une difficulté supplémentaire apparaît néanmoins : contrairement à $32 = 2^5$, dont la séquence $[1, 2, 4, 8, 16]$ enchaîne des doublements parfaits, les tailles 30 et 31 ne sont pas des puissances de 2, et les séquences correspondantes (par exemple $[1, 2, 4, 8, 15]$ pour 31) sont plus délicates à réaliser géométriquement. Nos tentatives de construction, comme notre recherche d'une preuve d'impossibilité, sont restées infructueuses. Nous conjecturons que $\mathcal{X}(\mathcal{H}_5) = 3$.

Nous donnons ci-après un tableau synthétisant nos résultats (Tableau 1).

Valeur de n	Minimum $\mathcal{X}(\mathcal{H}_n)$
$n = 1$	$\mathcal{X}(\mathcal{H}_1) = 1$
$n = 2$	$\mathcal{X}(\mathcal{H}_2) = 1$
$n = 3$	$\mathcal{X}(\mathcal{H}_3) = 1$
$n = 4$	$\mathcal{X}(\mathcal{H}_4) = 2$
$n = 5$	$2 \leq \mathcal{X}(\mathcal{H}_5) \leq 3$
$n = 6$	$\mathcal{X}(\mathcal{H}_6) \geq 3$
$\dots$	$\dots$
$n \geq 6$	$\mathcal{X}(\mathcal{H}_n) \geq \left\lceil \frac{3n^2 - 3n + 1}{32} \right\rceil$

TABLEAU 1 – Tableau de synthèse des résultats obtenus.

Dans la prochaine section nous évoquons un paradoxe entre la taille maximale de la pile qui s'avère être efficace localement mais qui pourtant induit des effets inverses dans la recherche du minimum global.

5.3 Le paradoxe de la pile de grande taille : efficacité locale contre optimum global

On pourrait intuitivement penser que la création d'une pile de très grande taille, proche du maximum absolu de 32 (Théorème 1), facilite la résolution. C'est pourtant l'inverse qui se produit. La pile de 32 de la Figure 16 occupe le centre de la grille et toute une couronne autour de lui ; une fois ces cases vidées, les 29 cases restantes ne forment plus une région connexe, mais *deux* composantes disjointes (de 12 et 17 cases). Or une pile ne peut jamais franchir une case vide : les deux composantes doivent donc être traitées séparément, et chacune produit au moins une pile. La stratégie de la pile maximale conduit ainsi à au moins trois piles au total, et en pratique à davantage, la fragmentation interne de chaque composante empêchant tout regroupement efficace. Loin de faciliter la résolution, la recherche d'une pile de taille maximale la dégrade : l'efficacité *locale* (concentrer la masse) s'oppose ici à l'optimum *global* (minimiser le nombre de piles).

Ce phénomène de fragmentation n'est toutefois pas systématique : sur $\mathcal{H}_4$, un choix de racine décentré (Remarque 5) évite justement cet écueil, puisque les cinq cases restantes forment alors une unique pile connexe plutôt que plusieurs fragments (Remarque 6), d'où l'égalité $\mathcal{X}(\mathcal{H}_4) = 2$. Le paradoxe mis en évidence ici concerne donc spécifiquement la construction *centrée* de la pile maximale sur $\mathcal{H}_5$, et non toute construction atteignant 32.

5.4 Perspectives et généralisation pour les grilles $\mathcal{H}_n$ avec $n \geq 6$

L'étude des grilles de faibles dimensions a permis de déterminer $\mathcal{X}(\mathcal{H}_n)$ pour $n \leq 4$ par partitionnement manuel, et d'encadrer $\mathcal{X}(\mathcal{H}_5)$ entre 2 et 3. Cependant, pour $n \geq 6$, l'augmentation quadratique du nombre de cases dans la couronne extérieure rend ces méthodes de découpage directes obsolètes.

5.4.1 Encadrement et borne asymptotique

Pour donner un ordre de grandeur du nombre de piles nécessaires, nous pouvons évoquer une estimation asymptotique assez grossière fondée sur la surface totale de la grille. Le terme *asymptotique* souligne que cette estimation n'a de sens que lorsque $n \rightarrow \infty$, la grille

devenant alors suffisamment grande pour que les effets de bord deviennent négligeables devant la surface totale :

$$\mathcal{X}(\mathcal{H}_n) \lesssim \frac{3n^2 - 3n + 1}{32}.$$

Il est important de souligner que cette expression ne constitue pas une borne supérieure ($\mathcal{X}_{sup}$) rigoureuse. Elle représente un cas idéal de pavage sans aucun chevauchement ni interstice, ce qui est impossible en pratique sur une structure hexagonale finie dès que n augmente, en raison des effets de bord : la forme hexagonale du contour ne se prête pas à un découpage exact en tuiles de 32 cases. Ces effets de bord imposent des pertes d'efficacité aux interfaces des piles, augmentant nécessairement le nombre réel de piles requises.

5.4.2 Approche algorithmique et émergence de motifs

Afin de dépasser les limites du partitionnement manuel, nous avons développé un algorithme en Python qui teste des *tuiles* candidates – des sous-ensembles connexes de cases susceptibles d'être regroupés en une seule pile – de tailles et de géométries variables.

Cette piste algorithmique repose sur deux observations clés faites durant nos travaux :

- **Flexibilité des tailles** : le code permet de générer des tuiles dont la taille oscille autour de 32 cases, offrant une adaptabilité nécessaire pour combler les zones de courbure de la grille.
- **Auto-organisation** : au fil des itérations, certaines tuiles reviennent de façon récurrente parmi les meilleures solutions trouvées ; nous appelons *motif* une telle tuile récurrente, candidate naturelle à devenir une brique élémentaire d'un pavage optimal pour les grandes dimensions.

Cette transition marque le passage d'une recherche de bornes théoriques, qui évalue la capacité nécessaire pour couvrir la surface, à un problème de *couverture exacte* (connu en informatique sous le nom d'*Exact Cover*, un problème combinatoire classique consistant à sélectionner, parmi une famille d'ensembles, une sous-famille qui partitionne exactement l'ensemble de départ). Transposé à notre problème, il s'agit de trouver l'agencement précis où chaque hexagone est couvert par exactement une tuile, sans chevauchement ni interstice – ces derniers étant responsables de l'écart entre la borne théorique et le nombre réel de piles.

L'objectif futur est d'utiliser les motifs identifiés pour transformer cette recherche de bornes en un problème d'optimisation combinatoire, afin d'affiner l'écart entre la borne inférieure théorique et les configurations réalisables.

6 Quelles notions mathématiques peuvent être mobilisées dans un contexte de classe ? Quelles situations proposées ?

Cet article vise à mettre en évidence la richesse mathématique du problème d'empilements de jetons sur des grilles hexagonales de côté $n \geq 1$. Les éléments de résolution mobilisent en effet une diversité de connaissances mathématiques susceptibles d'être travaillées en classe, sous réserve de choix didactiques appropriés de la part des enseignantes et

enseignants.

Le problème est proposé dans un cadre général, ce qui permet aux élèves, dans un premier temps, de se l'approprier en explorant des cas particuliers correspondant à de petites valeurs de n . Cette démarche favorise la compréhension d'un principe fondamental en résolution de problèmes : réduire la complexité d'une situation en étudiant des cas simples avant de viser une généralisation. Elle s'inscrit pleinement dans une approche expérimentale de l'activité mathématique et est une connaissance du processus d'expérimentation permettant le travail de la dialectique particulier-général. Notons qu'il est tout à fait possible de proposer des plateaux de grilles hexagonales avec des jetons favorisant la manipulation d'objets et donc l'adhésion des élèves dans la situation proposée. Toutefois, les élèves vont devoir rapidement sortir de ce cadre afin d'adopter leurs propres registres de représentation, passant d'objets manipulables à des objets abstraits représentés sous la forme de différents registres de représentation (symbolico-numérique par exemple) permettant de structurer leur activité de résolution du problème.

Par ailleurs, l'étude de ces cas particuliers permet aux élèves d'exhiber des solutions locales. Pour $n \in \{1, \dots, 5\}$, des raisonnements spécifiques permettent d'établir l'existence d'une valeur minimale. Dès que $n = 2$, plusieurs configurations sont possibles, bien qu'une seule réalise ce minimum. Cette situation ouvre alors un travail sur la notion de contre-exemple en mathématiques, en lien avec la réfutation d'énoncés, ainsi que sur la reformulation du problème. En effet, le problème d'optimisation initial consistant à déterminer un minimum, peut être reformulé comme un problème de décision relative à l'existence d'une solution strictement inférieure à une valeur donnée.

Cette reformulation permet d'introduire des notions telles que majorant et minorant, « au plus » ($\leq$) « au moins » ($\geq$), ainsi que celles de borne supérieure et de borne inférieure. Ces concepts sont étroitement liés aux notions de conditions nécessaires et suffisantes dans des problèmes d'optimisation combinatoire, et permettent d'engager différents types de raisonnements. En particulier, l'exhibition d'une solution constitue une condition suffisante permettant d'établir une majoration du minimum, sans garantir son optimalité. L'identification du minimum nécessite alors de déterminer une borne inférieure au problème, c'est-à-dire d'identifier le plus grand de ses minorants. Ainsi, par exemple pour $n = 4$ ou $n = 5$, les élèves peuvent prouver un encadrement du minimum voire être amenés à formuler des conjectures de ce dernier lorsque leurs essais ne permettent plus de réduire la valeur de la solution trouvée. Afin de caractériser la valeur exacte de ce minimum, il faut inciter les élèves à adopter un autre regard sur le problème mathématique.

Dans cette perspective, l'introduction d'un problème dual consistant à déterminer la taille maximale d'une pile réalisable sur une grille hexagonale $(\mathcal{H}_n)_{n \geq 1}$, constitue une approche nécessaire. L'étude du problème dual mobilise un ensemble spécifique de notions mathématiques étroitement articulées. Elle repose d'abord sur des considérations arithmétiques, à travers la construction de séquences d'absorption respectant des contraintes locales. La notion de dénombrement joue un rôle central, tant pour établir le nombre de cases d'une grille hexagonale que pour quantifier les ressources disponibles, notamment le nombre de « portes » permettant les transferts entre piles. Par exemple, dans le premier cas, le dénombrement du nombre de cases d'une grille

hexagonale de côté $n \geq 1$, mobilise diverses connaissances mathématiques. Il fait notamment appel aux sommes d'entiers, à l'aire de figures, en particulier rectangulaires, permettant une interprétation géométrique de la somme des $(n - 1)$ premiers entiers, ainsi qu'à des raisonnements par récurrence en fonction du niveau d'enseignement.

En outre, les notions de majorant, de minorant et d'encadrement, permettant de borner la taille maximale atteignable sont aussi utilisées. Les raisonnements mobilisés relèvent notamment du raisonnement par l'absurde, pour exclure certaines configurations, et de preuves constructives, pour exhiber des configurations atteignant certaines valeurs.

Par ailleurs, ce problème met particulièrement en lumière l'importance de l'acte de définition dans l'activité mathématique. La structuration d'objets tels que les « couronnes » de la grille, les relations de voisinage ou encore les « séquences d'absorption » est essentielle pour structurer l'analyse et rendre les arguments opératoires, communicables et intelligibles. Ces définitions permettent de passer d'une exploration intuitive à une représentation rigoureuse du problème. Enfin, l'étude du problème dual s'appuie sur une articulation entre raisonnements locaux (contraintes sur les piles voisines) et conséquences globales (taille maximale atteignable). La caractérisation de la borne inférieure permet aussi d'induire un travail sur la notion de division euclidienne voire de congruence : pour tout $n \geq 1$, $3n^2 - 3n + 1$ est-il divisible par 32 ? La preuve de non-divisibilité par 32 repose sur des arguments arithmétiques élémentaires, accessibles dès le collège, et peut également mobiliser la notion de congruence (raisonnement modulo 4), pour des élèves plus avancés en mathématiques comme au lycée pour des élèves en classe de terminale avec l'option mathématiques expertes.

Il convient également de souligner que le fait de ne résoudre qu'une partie du problème constitue une dimension essentielle du travail mathématique. En l'état, l'établissement d'une borne supérieure resserrée pour ce problème demeure un problème ouvert. Cette résolution partielle, loin de constituer une limite, représente au contraire une opportunité didactique forte : proposer aux élèves un problème dont certaines dimensions restent non résolues permet de donner à voir une image authentique de l'activité mathématique, faite de conjectures, d'explorations et de résultats partiels.

Enfin, dans un prochain article, nous établirons également des résultats sur le problème d'optimisation relevant cette fois-ci de grilles triangulaires de côté $n \geq 1$.

- **Instances.** Étant donné une grille triangulaire de côté n (n entier non nul) et un jeton sur chacune des cases.
- **Question.** Combien de piles peut-on faire au minimum avec ces jetons ?

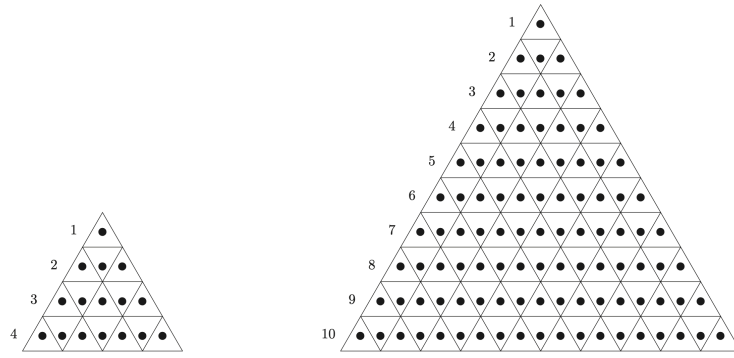


FIGURE 19 – Exemples de grilles triangulaires pour $n = 4$ et $n = 10$.

Références

- BEFFARA, E., & BUAT-MÉNARD, V. (2019). Empilement de jetons [XXVIème colloque CORFEM pour les professeurs et formateurs de mathématiques]. *Actes du colloque de la CORFEM 2019*. <https://www.univ-irem.fr/actes-du-colloque-corfem-2019>
- DA RONCH, M., & HOCQUARD, H. (2026a). De l'expérimentation à la preuve en mathématiques : étude de cas d'une situation issue de la recherche en optimisation combinatoire. *Repères IREM*, (143), 5-36. <https://hal.science/hal-05434743>
- DA RONCH, M., & HOCQUARD, H. (2026b). *Problème d'optimisation combinatoire : empilements de jetons sur des grilles particulières* [Article accepté à la revue *Petit x*]. <https://hal.science/hal-05446513>
- LAMPERT, D. E., & SLATER, P. J. (1995). The acquisition number of a graph. *Congressus Numerantium*, 109, 203-210.
- MACDONALD, L., WENGER, P. S., & WRIGHT, S. (2014). Total acquisition on grids. *Australasian Journal of Combinatorics*, 58(1), 137-156.