HAL open science

De l'expérimentation à la preuve en mathématiques : étude de cas d'une situation issue de la recherche en optimisation combinatoire

Mickael da Ronch, Hervé Hocquard

▶ **To cite this version:**

Mickael da Ronch, Hervé Hocquard. De l'expérimentation à la preuve en mathématiques : étude de cas d'une situation issue de la recherche en optimisation combinatoire. Repères IREM, 2026, 143, pp.5-36. ⟨hal-05434743v4⟩

HAL Id: hal-05434743

https://hal.science/hal-05434743v4

Submitted on 3 Aug 2026

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons CC BY-SA 4.0 - Attribution - ShareAlike - International License

DE L'EXPÉRIMENTATION À LA PREUVE EN MATHÉMATIQUES : ÉTUDE DE CAS D'UNE SITUATION ISSUE DE LA RECHERCHE EN OPTIMISATION COMBINATOIRE

Mickael DA RONCH[1]

Hervé HOCQUARD[2]

Résumé. Dans cet article, nous présentons un problème issu de la recherche contemporaine en mathématiques discrètes relatif à un problème d'empilement de jetons sur une grille rectangulaire. À partir de l'étude épistémologique, mathématique et didactique, nous déclinons ce problème sous la forme d'une Situation de Recherche pour la Classe. Nous montrons que la situation ainsi construite permet de travailler différentes composantes de l'activité mathématique en classe telles que l'expérimentation, la formulation et la validation qui sont pointées par les recommandations ministérielles et les *curricula* aussi bien en Suisse qu'en France comme étant les processus incontournables de la résolution de problèmes dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Pour ce faire, nous proposons plusieurs exemples de productions d'élèves, aussi bien issus du primaire que du secondaire, en France et en Suisse, qui permettront d'illustrer la richesse de cette situation.

Mots-clés. Résolution de problèmes, Situation de Recherche pour la Classe, expérimenter-formuler-prouver, condition nécessaire et suffisante, optimisation combinatoire.

Introduction et contextualisation

La résolution de problèmes occupe une place centrale dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à tous les niveaux de la scolarité obligatoire. En France comme en Suisse, cet aspect fondamental de l'activité mathématique est explicitement mis en avant dans les prescriptions curriculaires dès le cycle 2. Dans le contexte suisse romand, le Plan d'Études Romand (PER) identifie ainsi la résolution de problèmes comme l'axe prioritaire de l'enseignement des mathématiques, en soulignant qu'il s'agit *« de se représenter, problématiser et modéliser des situations et de résoudre des problèmes en construisant et en mobilisant des notions, des concepts, des démarches et des raisonnements propres aux mathématiques »* (CIIP, 2023). De manière convergente, en France, le Bulletin officiel rappelle que, dès le cycle 2, *« la résolution de problèmes est au centre de l'activité mathématique des élèves »* (MENJ, 2024), car elle contribue au développement de leurs capacités à chercher, raisonner et communiquer. Les problèmes constituent ainsi un levier essentiel pour introduire de nouvelles notions, consolider des apprentissages et susciter des questionnements nouveaux.

Au-delà de cet ancrage curriculaire, de nombreuses recommandations, notamment en France, insistent également sur l'importance d'engager dès le plus jeune âge des démarches fondées sur la manipulation, la verbalisation et la structuration progressive vers l'abstraction

[1] mickael.daronch@hepvs.ch

[2] herve.hocquard@u-bordeaux.fr

(Villani et Torossian, 2018). Dans ce prolongement, ces recommandations réaffirment la nécessité de renforcer la place de la preuve en mathématiques. En effet, la preuve joue un rôle central dans l'activité mathématique, du primaire à l'université : elle contribue à la construction d'une démarche scientifique rigoureuse, au développement du raisonnement logique et à la formation de l'esprit critique, notamment en ce qui concerne la distinction entre le vrai et le faux et les raisons d'être du vrai et du faux en mathématiques. Cette perspective est d'ailleurs renforcée par le rapport Villani et Torossian (2018), qui souligne l'importance d'introduire progressivement ces jalons dès l'école primaire. Récemment en France, le rapport concernant la grande consultation nationale sur les mathématiques (Rapport INSMI, 2025) porté par l'INSMI[3] *« pour comprendre les perceptions et émotions autour des mathématiques, préciser les attentes des citoyennes et citoyens dans leur diversité »* propose plusieurs recommandations à l'issue de l'analyse des données recueillies auprès de près de 34 000 participants et participantes à cette étude. Le rapport de l'INSMI mentionne plusieurs recommandations dont le fait de rendre les mathématiques plus accessibles, plus ludiques et concrètes à l'école, mais aussi favoriser le décloisonnement entre la recherche académique en mathématiques et les citoyens et citoyennes car elles restent encore très méconnues.

Cependant, malgré ces orientations claires, plusieurs études internationales mettent en lumière deux tensions majeures. Premièrement, elles montrent l'existence d'un décalage entre les prescriptions curriculaires, comme le PER en suisse, et les ressources proposées aux enseignants (MER), qui ne répondent que partiellement aux exigences du curriculum au cycle 2 (Da Ronch et al., 2023 ; Mili et al., 2025). Deuxièmement, les recherches portant sur les pratiques enseignantes et leurs conceptions de la preuve, encore relativement peu nombreuses (p. ex. Mariotti et al., 2018 ; Stylianides, 2016 ; Da Ronch et al., 2025b, 2026 ; Gandit, 2008), révèlent un écart significatif entre la capacité des étudiants en formation à l'enseignement primaire par exemple à reconnaître la preuve intellectuelle et déductive comme rigoureuse et leur tendance spontanée à recourir à des approches empiriques ou perceptuelles caractéristiques de la preuve pragmatique (Da Ronch et al., 2025b, 2026). Dans cette perspective, ces constats soulignent la nécessité de renforcer, dans la formation initiale et continue, une appropriation active et diversifiée de l'activité de preuve, de manière à en faire un élément constitutif de la pratique mathématique en classe et à permettre son enseignement au moyen de ressources adaptées.

L'objectif central de cet article consiste à proposer des ressources susceptibles de répondre de manière cohérente aux prescriptions curriculaires et aux recommandations institutionnelles évoquées précédemment. Dans cette perspective, nous présentons d'abord les éléments théoriques qui permettent d'établir l'adéquation entre ces exigences et les choix didactiques opérés. Dans un second temps, nous décrivons et analysons une situation relative à un problème d'empilement de jetons sur une grille rectangulaire conçu pour répondre à ces besoins, en articulant une analyse *a priori* et une analyse *a posteriori* fondée sur des productions d'élèves à différents niveaux d'enseignement, du primaire au secondaire.

[3] INSMI : Institut National des Sciences Mathématiques et de leurs Interactions du CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique).

1. – Activité mathématique et Situations de Recherche en Classe

Le travail de Da Ronch (2022) met en évidence une certaine convergence dans l'acception de la notion d'activité mathématique, tant du point de vue des mathématiciens que de celui des didacticiens des mathématiques. L'activité mathématique est ainsi étroitement liée à la résolution de problèmes pour ces deux communautés. Néanmoins, certains éléments subtils montrent que cette activité, bien qu'ayant des traits communs avec la résolution de problèmes, n'en a pas toujours les mêmes finalités. Le mathématicien a pour objectif de produire des résultats communicables à sa communauté, il suit des standards internationaux en matière de communication suivant un modèle normatif, socialement et culturellement partagé par sa communauté de pratiques : le modèle DTP (*Definition* ; *Theorem* ; *Proof*) décrit par Thurston (1995).

Le résultat, et donc le produit fini, sont ainsi la priorité du travail du mathématicien en matière de communication au détriment du processus qui l'a conduit aux résultats. Or, comme le souligne Chevallard (1998), dans l'enseignement des mathématiques, le résultat au problème n'est en lui-même qu'un objectif secondaire de l'activité mathématique. Le cœur de l'activité réside davantage dans le développement de techniques régi par un environnement technologico-théorique qui le justifie. C'est donc bien la démarche mathématique et les processus inhérents qui sont importants dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Ainsi, il s'agirait avant tout d'identifier des situations en lien avec des problèmes mathématiques qui permettraient à l'élève de développer la démarche mathématique et ses processus afin qu'il

> *agisse, qu'il formule, qu'il prouve, qu'il construise des modèles, des langages, des concepts, des théories, qu'il échange avec d'autres, qu'il reconnaisse celles qui sont conformes à la culture, qu'il lui emprunte celles qui lui sont utiles, etc* (Brousseau, 1998, p. 49).

Néanmoins, la notion de problème mathématique étudiée dans Da Ronch (2022) montre une forte hétérogénéité des définitions en particulier dans l'enseignement primaire. Il existe en effet différents types de problèmes (p. ex. Da Ronch, 2022 ; Hersant, 2010) qui répondent à des exigences différentes et qui ne travaillent que quelques aspects de l'activité mathématique en classe. Notre position épistémologique sur ce sujet est assez claire : ***l'activité mathématique dans l'enseignement ne doit pas toujours être morcelée mais doit vivre pour ce qu'elle est réellement***. Ainsi, nous soutenons l'importance de proposer des situations en lien avec des problèmes mathématiques « robustes » dès l'école primaire afin de pouvoir travailler de manière exhaustive toutes les composantes de cette activité. À savoir, mettre en œuvre des dialectiques d'action, de formulation et de validation (Brousseau, 1998), qui nécessitent la mobilisation de connaissances particulières. Ces connaissances relèvent par exemple de l'étude de cas particuliers de petite taille qui permettent de réduire la complexité d'un problème plus général. Ces connaissances sont relatives au processus d'action ; de formulation de conjectures, de changement de registres de représentations sémiotiques des objets mathématiques en jeu (Duval, 1996), voire de modélisation qui, quant à eux, relèvent de connaissances liées au processus de formulation. Enfin, le processus de validation lié à la preuve s'appuie sur plusieurs hypothèses fondamentales, notamment le principe du tiers exclu, la nécessité éprouvée de faire une preuve et la recherche de vérité sur les raisons du vrai et du faux en mathématiques. Il obéit à des règles de la logique telles que l'implication, la condition nécessaire et la

condition suffisante. Les connaissances du processus de preuve sont donc celles des hypothèses et des règles de la logique mathématique (Da Ronch, 2022). Cette vision non morcelée de l'activité mathématique permet un travail important dans le va-et-vient entre les raisonnements inductif et déductif et permet ainsi de travailler la dialectique particulier-général fondamentale à l'activité mathématique (Gravier et Trouvé, 2025).

Pour ce faire, nous nous appuyons sur un modèle de situations qui a déjà fait ses preuves à différents niveaux de la scolarité (du primaire à l'université) et qui permet de répondre à ces besoins : le modèle des **Si**tuations de **R**echerche pour la **C**lasse (**SiRC**), décrit par Grenier et Payan (2023) et repris dans de nombreux travaux de recherche à travers différents contextes et niveaux d'enseignement (p. ex. Da Ronch, 2022 ; Da Ronch et al. 2020 ; Gravier et Ouvrier-Buffet, 2022 ; Ouvrier-Buffet et al., 2017 ; Gandit et al., 2022 ; Gandit, 2024 ; Deloustal-Jorrand et al., 2023). Ce modèle permet à la fois de construire et d'évaluer le potentiel de certains problèmes à générer une activité mathématique « authentique » telle que nous l'entendons. Il se caractérise en plusieurs points :

- une SiRC s'inscrit dans une problématique de recherche mathématique professionnelle ;
- la question initiale est facile d'accès ;
- des stratégies initiales existent, sans que soient indispensables des prérequis spécifiques ;
- plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche et plusieurs développements sont possibles ;
- une question résolue renvoie très souvent à une nouvelle question ;
- des variables de recherche existent, elles pourraient être des variables didactiques, à la charge de l'enseignant, mais dans ce cas-ci elles sont à la charge de l'élève (Grenier et Payan, 2003, p. 191–192).

Cette nomenclature fournit des conditions à la fois épistémologiques et didactiques et répond aux exigences et recommandations mentionnées dès l'introduction de cet article. En effet, le fait que la situation s'inscrive dans une problématique de recherche professionnelle permet de garantir *a priori* une activité mathématique proche de celle du mathématicien et ainsi rapprocher la recherche mathématique de l'école. Pour ce faire, les SiRC s'appuient sur des problèmes issus des mathématiques discrètes puisque ces problèmes ont très souvent des énoncés courts, faciles à comprendre et déclinables sous forme d'objets tangibles à manipuler (puisque discrets) favorisant ainsi l'aspect ludique des mathématiques (Rapport INSMI, 2025). Ceci rend donc plus facile l'adhésion des élèves à entrer dans l'activité et *de facto* la dévolution de la situation proposée (Brousseau, 1998). D'ailleurs, ces points sont aussi en adéquation avec les propos du rapport Villani-Torossian (2018) :

> *Les mathématiques discrètes, par exemple, sont trop marginales dans l'enseignement des mathématiques aujourd'hui, alors qu'elles constituent, d'une part, un lien avec la recherche contemporaine et l'informatique et d'autre part un champ dans lequel il est permis de raisonner et prendre du plaisir sur des problèmes motivants avec des connaissances mathématiques minimales* (*ibid.*, p. 36).

L'évolution progressive de la résolution du problème ouvre ainsi la voie à la mise en œuvre de stratégies variées, à de nouvelles questions et conduit l'élève à prendre à sa charge la responsabilité scientifique dans l'engagement dans la résolution du problème. En effet, certaines instances du problème n'étant pas fixées par l'enseignant, l'élève peut se les

approprier et engager un va-et-vient dans la dialectique particulier-général. Cette dialectique mobilise à la fois le raisonnement inductif, pour établir des preuves locales d'existence ou d'impossibilité et formuler des conjectures de portée plus générale, et le raisonnement déductif qui permet de statuer sur la validité ou la fausseté de ces dernières. Ainsi, les SiRC permettent, *a priori*, de travailler simultanément la manipulation d'objets mathématiques (tangibles et abstraits), la verbalisation des processus engagés et donnent une place centrale à la preuve en résolution de problèmes (enjeu de vérité, nécessité de faire une preuve). Tous ces éléments relevant de savoir-faire relatifs à l'activité mathématique doivent faire l'objet d'une institutionnalisation par l'enseignant ou l'enseignante dans et en dehors du contexte des SiRC lors d'une mise en œuvre en classe.

Dans la section suivante, nous présentons un problème issu de la recherche mathématique et montrons comment nous avons construit, à partir de celui-ci, une SiRC susceptible de générer, chez les élèves une activité mathématique authentique dès le cycle 2.

2. – Analyse épistémologique et mathématique d'un problème d'optimisation combinatoire de piles sur des grilles rectangulaires $q \times p$.

Le problème qui sera décrit ci-après est issu du « jeu d'acquisition » (*Total Acquisition Game*), introduit formellement par Lampert et Slater (1995), qui est un problème de théorie des graphes.

Le principe est élémentaire : sur un graphe où chaque sommet porte initialement un jeton, on déplace la totalité des jetons qui constituent une pile vers un sommet adjacent (c'est-à-dire relié par une arête) si et seulement si celui-ci contient déjà autant ou plus de jetons.

L'objectif est de constituer un minimum de piles tout en respectant la règle de déplacements énoncée ci-dessus.

MacDonald, Wenger et Wright (2014) se sont intéressés au jeu d'acquisition sur une classe de graphe particulière, les grilles (produit cartésien de chemins). Leurs travaux ont permis d'obtenir des bornes sur le nombre minimum de piles sur cette famille de graphes.

Dans notre contexte, nous nous intéressons à un problème presque équivalent sur une grille rectangulaire constituée de cases sur lesquelles se trouvent un jeton en position initiale.

• ***instances*** *: étant donné une grille rectangulaire $q \times p$ (q et p entiers non nuls) et un jeton sur chacune des cases.*

• ***question*** *: combien de piles peut-on faire au minimum avec ces jetons ?*

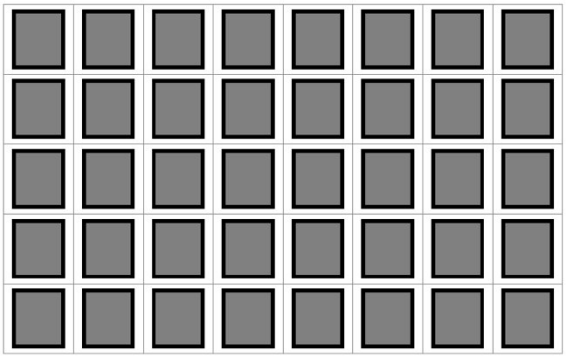


Figure 1 *: Exemple de grille 5×8 avec un jeton gris par case, soit 40 jetons.*

Pour rappel, on peut déplacer une pile de jetons présente sur une case vers une case adjacente (gauche, droite, haut, bas) si celle-ci contient une pile de taille supérieure ou égale. Cette règle contraint davantage les déplace-

ments par rapport au problème initial sur les graphes (pas de déplacement en diagonale). Une pile est déplacée totalement et non partiellement. De plus, on ne peut pas déplacer une pile vers une case vide (pile de taille 0).

Afin de bien comprendre la règle du jeu, nous illustrons nos propos sur un exemple de grille 2×2. La grille 2×2 possède 4 jetons, un sur chacune des cases. À réflexion près, on peut obtenir exactement trois configurations (*cf.* figure 2). La première donne deux piles de 2 jetons en diagonale, les déplacements en diagonale n'étant pas autorisés. On ne peut donc pas faire mieux avec ces déplacements. La deuxième configuration, similaire, donne deux piles avec 1 et 3 jetons. L'optimum est donné par la dernière configuration, avec une seule pile de 4 jetons. Il n'est donc pas possible de faire mieux. L'optimum recherché dans le cas de la grille 2×2 est donc 1.

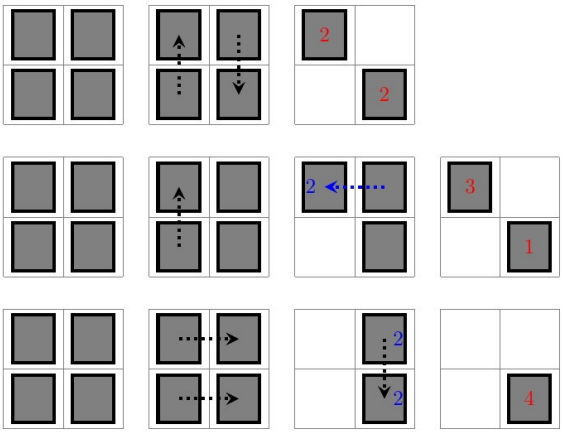


Figure 2 *: Stratégie pour la grille 2×2 amenant à l'optimum recherché.*

Ce problème général étant complexe, nous allons d'abord regarder ce qui se passe sur des bandes particulières pour une hauteur fixée.

2.1. - Le cas de la bande $1\times p$, $p\geqslant1$

Lorsqu'on restreint le problème dans le cas de la bande $1\times p$, on s'aperçoit rapidement que pour tout $p\leqslant4$ le nombre minimum de piles est 1. En effet, lorsqu'il y a un jeton, on a nécessairement une pile de taille 1. Pour deux jetons, on obtient une pile de taille 2. Pour trois, il suffit de prendre les jetons des extrémités et de les déplacer au centre pour construire une seule pile de taille 3. Enfin, pour quatre jetons, on déplace les jetons des extrémités sur leurs voisins directs, on a ainsi deux piles de taille 2, qu'il suffit de déplacer l'une sur l'autre pour construire une pile de taille 4. Ainsi pour tout $p\leqslant4$ le nombre minimum de piles est donc bien 1.

Dès lors que $p>4$, le nombre minimal de piles varie (*cf.* Théorème 1). Par exemple lorsque $p=5$, on se rend compte assez rapidement que commencer à déplacer les jetons des extrémités semble la solution la plus adéquate car cela retarde la libération d'une case vide entre des piles de jetons (*cf.* figure 3). On obtient, à symétrie près, deux piles de 2 et 3 jetons. Un raisonnement par exhaustivité des cas prouve qu'on ne peut pas faire mieux que 2. Ainsi l'optimum recherché dans le cas de la grille 1×5 est 2.

En poursuivant l'étude de cas particuliers, on aperçoit une certaine forme de régularité que nous décrivons dans le tableau 1 ci-après.

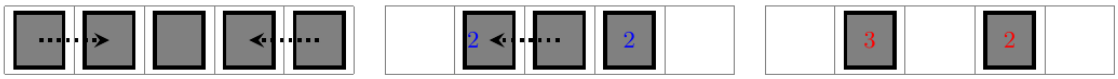


Figure 3 *: Stratégie optimale dans le cas de la bande 1×5.*

Bande $1\times p$, $p\geqslant 1$	**Optimum $X=\left\lceil \frac{p}{4} \right\rceil$?**
$1\times p$ avec $p\in\{1;\dots;4\}$	1
$1\times p$ avec $p\in\{5;\dots;8\}$	2
$1\times p$ avec $p\in\{9;\dots;12\}$	3
$1\times p$ avec $p\in\{13;\dots;16\}$	4
$1\times p$ avec $p\in\{17;\dots;20\}$	5
$1\times p$ avec $p\in\{21;\dots;24\}$	6
$\vdots$	$\vdots$
$1\times p$ avec $p\in\{37;\dots;40\}$	10

Tableau 1 *: Résultats sur quelques cas particuliers de bandes $1\times p$, $p\geqslant 1$.*

En effet, avec 4 jetons, nous pouvons à chaque fois constituer une pile contenant ces jetons. Dès qu'il y en a un de plus, il y a nécessairement une séparation qui donne 2 piles distinctes. Ainsi, il suffit de partitionner la bande $1\times p$ par des bandes 1×4. Il y a au total $\left\lceil \frac{p}{4} \right\rceil$ bandes 4. Par conséquent, on prouve donc que l'optimum X recherché, quel que soit $p\geqslant 1$, est $X\leqslant\left\lceil \frac{p}{4} \right\rceil$, on obtient ainsi le résultat suivant :

> ***Lemme 1.*** *Pour tout $p\geqslant 1$, $X\leqslant\left\lceil \frac{p}{4} \right\rceil$ pour les bandes $1\times p$.*

Il s'agit de montrer à présent que cette borne supérieure est également une borne inférieure. Autrement dit que $X\geqslant\left\lceil \frac{p}{4} \right\rceil$ pour tout $p\geqslant 1$, ce qui garantirait que l'optimum est $X=\left\lceil \frac{p}{4} \right\rceil$.

Regardons le problème dual et cherchons la taille de la plus grande pile que l'on peut construire sur la bande $p\geqslant 1$.

Si on reprend la bande 1×4, on remarque que chaque case a exactement deux voisins sauf les deux cases aux extrémités de la bande. Pour construire une pile de taille maximum sur une des extrémités, on obtiendra donc nécessairement deux piles de taille 2 sur les extrémités, la bande sera donc déconnectée.

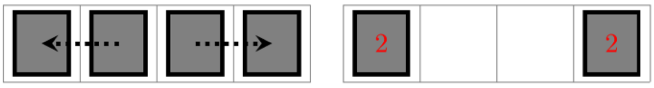


Figure 4 *: Stratégie non optimale dans le cas de la bande 1×4.*

En revanche, on peut construire nos piles, comme nous le montrons dans la figure ci-après, sur une case qui a deux voisins, c'est-à-dire : soit sur la deuxième, soit sur la troisième case. Ce qui donnera une pile de taille 4 qui s'avèrera être la taille maximum.

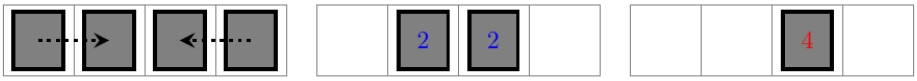


Figure 5 *: Stratégie optimale dans le cas de la bande 1×4.*

La figure 6 permet de montrer que la pile de taille maximum sur une bande $1\times p$, $p\geqslant 1$ est de 4 jetons. En effet, pour maximiser la taille de la pile sur la case rouge, on remarque que cette case a ses deux voisins, à gauche et à droite, elle est donc nécessairement de taille 1. Les règles de déplacement, nous permettent de déduire qu'une des deux cases voisines est nécessairement de taille 1. L'autre case est donc de taille au plus 2. En poursuivant les déplacements, on obtiendra nécessairement une pile de taille au plus 4. Puisqu'on a prouvé qu'on pouvait construire une telle pile de taille 4, alors la pile de taille maximum est d'au moins 4 jetons. Par conséquent, la pile de taille maximum sur une bande $1\times p$, $p\geqslant 1$, est exactement de 4 jetons.

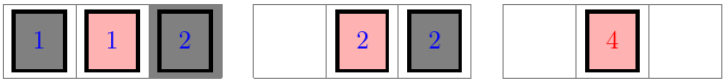


Figure 6 *: Taille de la plus grande pile sur une bande $1\times p$, $p\geqslant 1$.*

Ainsi, nous venons d'établir le résultat suivant :

> ***Lemme 2.*** *Pour tout $p\geqslant 1$, la taille maximum d'une pile sur les bandes $1\times p$ est exactement 4.*

Ceci implique que le nombre minimum X de piles qu'on obtiendra sur une bande $1\times p$, $p\geqslant 1$, est au moins $\left\lceil \frac{p}{4} \right\rceil$. On a donc le résultat suivant :

> ***Corollaire 1.*** *Pour tout $p\geqslant 1$, $X\geqslant \left\lceil \frac{p}{4} \right\rceil$.*

On déduit donc, d'après le Lemme 1 et le Corollaire 1, le résultat suivant sur les bandes $1\times p$:

> ***Théorème 1.*** *Pour tout $p\geqslant 1$, $X=\left\lceil \frac{p}{4} \right\rceil$.*

Cela signifie que lorsque p est divisible par 4, l'optimum est exactement le résultat de la division de p par 4. Lorsque le reste de la division euclidienne de p par 4 est non nul alors l'optimum X est le résultat de la division euclidienne auquel on ajoute 1 et le reste correspond au nombre de jetons présents sur l'unique pile qui n'est pas de taille 4.

2.2. - Le cas des bandes $q\times p$, $q\in\{2,3,4\}$

L'étude sur les bandes de hauteurs $q\in\{2,3,4\}$ montre que ces cas sont en fait complètement équivalents au cas de la bande $1\times p$. En effet, prenons le cas où $q=2$. Il suffit de ramener les jetons de la première ligne (resp. deuxième ligne) au niveau des jetons de la seconde ligne (resp. première ligne). Il restera alors une seule ligne avec une pile de 2 jetons sur chacune des p cases. Comme chaque case contient exactement une pile de 2 jetons, ce problème équivaut à traiter le même problème sur une ligne avec un jeton par case.

On obtient ainsi le résultat suivant :

> ***Lemme 3.*** *Pour tout $p\geqslant 1$, $X=\left\lceil \frac{p}{4} \right\rceil$ est l'optimum recherché dans le cas des bandes $2\times p$.*

Dans le cas où $q=3$, on utilise un argument similaire, on construit d'abord deux lignes adjacentes dont l'une possède pour

chaque case uniquement des piles de 2 jetons et l'autre des piles de 1 jeton. Il suffit ensuite de déplacer la ligne où il n'y a que des piles constituées d'un seul jeton sur l'autre ligne. Le problème revient à étudier la bande possédant pour chaque case exactement 3 jetons par case. Ce problème est équivalent à résoudre le problème sur la bande de hauteur 1.

> ***Lemme 4.*** *Pour tout* $p \geqslant 1$, $X = \left\lceil \frac{p}{4} \right\rceil$ *est l'optimum recherché dans le cas des bandes* $3 \times p$.

Dans le cas où $q = 4$, on déplace la première et la dernière ligne sur la deuxième et la troisième. On a donc 2 lignes constituées de piles de taille 2 sur chacune des deux lignes. Il suffit alors d'empiler, par exemple, la deuxième sur la troisième. On constitue alors une ligne de piles d'exactement 4 jetons par case. Là encore, cela revient à traiter le problème sur la bande de hauteur 1.

> ***Lemme 5.*** *Pour tout* $p \geqslant 1$, $X = \left\lceil \frac{p}{4} \right\rceil$ *est l'optimum recherché dans le cas des bandes* $4 \times p$.

Finalement, on obtient le théorème suivant :

> ***Théorème 2.*** *Pour tout* $p \geqslant 1$ *et* $q \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$, $X = \left\lceil \frac{p}{4} \right\rceil$ *est l'optimum recherché dans le cas des bandes* $q \times p$.

Comme évoqué précédemment, l'étude des bandes pour les hauteurs $q \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$ s'avère mathématiquement équivalente au cas de la bande de hauteur $q = 1$. Cette simplification repose sur une stratégie systématique d'empilements verticaux : pour toute grille $q \times p$ avec $p \geqslant 1$ et $q \in \{2 ; 3 ; 4\}$, il est possible de ramener, par déplacements successifs, les jetons de chaque ligne sur une seule ligne pivot. On obtient alors une unique bande de longueur $p \geqslant 1$ où chaque case contient initialement une pile de taille k, $k = q$.

Le problème revient alors à résoudre la situation sur une bande où chaque case possède k jetons, pour $1 \leqslant k \leqslant 4$. Tant que ce nombre de jetons par case ne dépasse pas la capacité maximale d'une pile sur une ligne (fixée à 4 par le Lemme 2), la stratégie de regroupement horizontal reste identique à celle d'une bande standard. Par conséquent, l'optimum X est toujours guidé par la longueur p de la bande selon la formule $\left\lceil \frac{p}{4} \right\rceil$. Cette logique de construction de « nouvelles classes d'objets » culmine avec la grille carrée 4×4, qui permet de constituer une unique pile finale de 16 jetons (*cf.* figure 7).

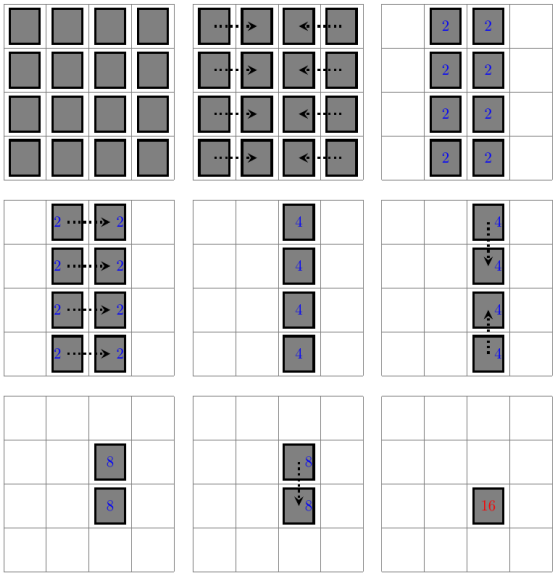


Figure 7 *: Exemple du cas de la grille* 4×4.

2.3. - Taille de la plus grande pile quelle que soit la taille de la grille $q \times p$, $q \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$

Dans cette partie, on s'intéresse au nombre maximum de jetons pouvant être empilés sur une même case. On utilisera le même argument que pour les bandes et, pour ne pas se focaliser sur des petites grilles, on pourra imaginer que l'on travaille sur une grille de taille $1000 \times 10\,000$, ce qui forcera la généralisation vers la grille $q \times p$. En effet, la taille

maximum d'une pile est la même pour toutes les grilles $q\times p$, $q\geqslant 4$ et $p\geqslant 4$ puisqu'elles contiennent au moins 16 jetons. D'après ce qui précède, nous savons constituer des piles de taille au moins 16 (la grille 4×4 en est un bel exemple), ce qui implique que la taille maximum d'une pile est au moins 16.

On cherche maintenant à maximiser la taille de la pile située sur la case rouge (*cf.* figure 8). Nous allons utiliser le même raisonnement que pour les bandes en nous souvenant que le nombre de voisins a une influence.

Comment les jetons arrivent-ils sur la case cible rouge ?

Il y a nécessairement 1 jeton au départ sur la case cible. Le premier voisin qui donne ses jetons, en donne au maximum 1 (il y en a donc 2 sur la case cible), le deuxième en donne au maximum 2 (il y en a donc 4 sur la case cible), le troisième en donne au maximum 4 (il y en a donc 8 sur la case cible), le quatrième en donnera au plus 8 sur la case cible. Finalement, la taille maximum de la pile est au plus $1+1+2+4+8$, soit 16 jetons.

Cette taille maximum est uniquement due aux règles de déplacements des jetons dès lors que l'on travaille sur une grille $q\times p$, $q\geqslant 4$ et $p\geqslant 4$.

On vient d'établir le résultat suivant :

> ***Lemme 6.*** *La taille maximum d'une pile sur les grilles $q\times p$, $q\geqslant 4$ et $p\geqslant 4$ est exactement 16.*

Le Lemme 6 ne nous garantit pas de toujours réussir à constituer des piles de taille 16 mais, il nous donne une borne : on ne pourra pas mettre plus de 16 jetons sur une case pour une grille. Ce qui va nous amener vers la recherche d'une borne générale.

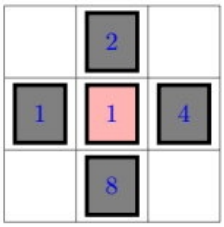


Figure 8 *: Taille de la plus grande pile quelle que soit la taille de la grille.*

2.4. - Généralisation du nombre minimum de piles sur des grilles $q\times p$, $q\geqslant 1$ et $p\geqslant 1$ et traitement du cas particulier du 5×5

Borne inférieure du nombre de piles sur les grilles $q\times p$, $q\geqslant 1$ et $p\geqslant 1$

D'après le Lemme 6, une pile contient au maximum 16 jetons. Sachant que sur une grille $q\times p$, il y a exactement $q\times p$ jetons, ceci implique le corollaire suivant :

> ***Corollaire 2.*** *Quels que soient $q\geqslant 1$ et $p\geqslant 1$, $X\geqslant\left\lceil\frac{q\times p}{16}\right\rceil$.*

On pourra remarquer que cette borne est valide pour $q\leqslant 3$ et $p\leqslant 3$, en effet dans ce cas $\left\lceil\frac{q\times p}{16}\right\rceil=1$, alors même que la valeur 16 induit fortement que $q\leqslant 3$ et $p\leqslant 3$.

On peut alors légitimement, comme pour le cas des bandes, se poser la question suivante :

> ***Question 1.*** *Peut-on atteindre cette borne quels que soient $q\geqslant 1$ et $p\geqslant 1$?*

Le cas pathologique : la grille 5×5

Si les travaux de référence de MacDonald, Wenger et Wright (2014) ont permis d'encadrer le nombre de piles pour les grilles $q\times p$, $q\geqslant 1$ et $p\geqslant 1$, ils n'ont pas apporté de résolution exacte pour le cas particulier de la grille carrée 5×5. Nous en proposons ici une résolution complète en démontrant qu'il est impossible de rassembler tous les jetons en seulement deux piles finales.

Taille minimale des piles

Sur une grille, une pile ne peut pas dépasser une hauteur de 16 jetons (2^4, correspondant aux apports successifs des quatre voisins).

Si l'on suppose qu'il n'y a que deux piles finales T_1 et T_2 pour 25 jetons, alors $|T_1|+|T_2|=25$. Puisque $|T_1|\leqslant 16$, on a nécessairement $|T_2|\geqslant 25-16=9$.

Conclusion : chaque pile doit avoir une taille d'au moins 9 jetons.

Localisation centrale

Une pile située sur le bord de la grille possède au maximum trois voisins. Sa taille maximale est donc $2^3=8$ jetons.

Comme nos piles doivent contenir au moins 9 jetons, elles ne peuvent pas être sur le bord.

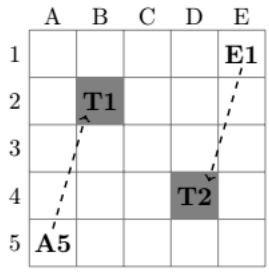
Conclusion : les piles T_1 et T_2 se situent nécessairement dans le carré central 3×3 (cases de B2 à D4).

Analyse des configurations (preuve par l'absurde)

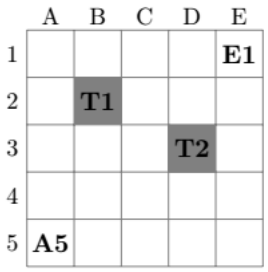
Supposons qu'il existe une solution à deux piles. Elles sont dans le carré central 3×3.

Pour qu'une pile atteigne une taille d'au moins 9 jetons, elle doit impérativement absorber ses quatre voisins immédiats. Cela rend impossible le partage de voisins directs ou indirects (à distance strictement supérieure à 1).

À rotation et symétrie près, il n'existe que deux dispositions possibles (*cf.* figure 9) maximisant l'écartement des piles (pour éviter les conflits immédiats).



Cas 1 : Grande Diagonale (B2 - D4)



Cas 2 : Cavalier (B2 - D3)

Figure 9 *: Les deux configurations candidates dans le carré central.*

Pour mettre en défaut l'hypothèse des deux piles, nous allons tester la capacité de ces piles à absorber les jetons les plus difficiles : ceux situés dans les quatre coins de la grille (A1, E1, A5, E5).

Pourquoi s'intéresser aux coins ? Ce sont les points critiques pour deux raisons :

- distance maximale : ce sont les cases les plus éloignées du centre ; si une pile centrale a une portée limitée alors ce sont les coins où la contrainte sera la plus forte ;
- test d'exclusion : si l'on prouve qu'un coin est trop loin pour être atteint par la pile T_1, alors il est forcé d'appartenir à T_2, ce qui contraint fortement la taille et la position de cette dernière.

Analyse du cas 1 : la grande diagonale (B2 et D4)

Dans cette configuration, les piles sont le plus éloignées possible dans le carré central.

Positions : T_1 en B2 et T_2 en D4.

- le coin A5 (Bas-Gauche) est à distance 4 de T_1 (B2) et à distance 4 de T_2 (D4) ;
- le coin E1 (Haut-Droite) est à distance 4 de T_1 (B2) et à distance 4 de T_2 (D4).

Or, pour qu'une pile absorbe un jeton situé à une distance de 4 cases, elle doit atteindre une taille finale de 16 (progression géométrique $1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 16$).

Par symétrie, si T_1 prend A5, alors elle devient de taille 16. Si T_2 prend E1, alors elle devient de taille 16. Cela impliquerait que $|T_1|=16$ et $|T_2|=16$. D'où $|T_1|+|T_2|=32>25$. Ce cas est donc impossible.

Remarque : si T_1 ou T_2 tentait de prendre A5 et E1, alors cela échouerait car une pile ne peut pas dépasser une hauteur de 16 jetons.

Analyse du cas 2 : la position cavalier (B2 et D3)

C'est le cas le plus subtil.

Positions : T_1 en B2 et T_2 en D3. Dans cette configuration, on a :

- le coin A5 (Bas-Gauche) est à distance 4 de T_1 (B2) et à distance 5 de T_2 (D3) ; il doit obligatoirement aller en T_1 car A5 est trop éloigné de T_2 ; puisque T_1 absorbe A5, alors T_1 est de taille 16, ce qui implique que T_2 est de taille 9 ;
- le coin E1 (Haut-Droite) est à distance 4 de T_1 (B2) et à distance 2 de T_2 (D3). Puisque T_1 a déjà une taille de 16, qui ne peut pas être dépassée, alors T_2 absorbera E1 ; pour que E1 aille sur T_2 il faudra obligatoirement passer par E2 (ou D1) ;
- rappelons que T_2 est de taille 9, donc elle reçoit nécessairement les jetons de ses quatre voisins (D2, D4, C3, E3) ; on remarquera aussi que E4, E5 et D5 sont trop éloignés de T_1, ils iront donc sur T_2.

Contradiction : comptons le nombre de jetons qui doivent composer T_2, sachant qu'à l'état initial, chaque case mentionnée ci-après contient un seul jeton : D3, D2, D4, C3, E3, E1, E2 (ou D1), E4, E5 et D5, soit un total de 10 jetons pour une pile de taille 9, d'où la contradiction.

On peut alors en déduire le théorème suivant :

Théorème 5. *Sur une grille 5×5, le nombre minimum X de piles est 3.*

Remarque : La réponse à la question 1 est un contre-exemple qui permet de montrer que la borne inférieure n'est pas toujours atteinte.

Esquisse de la preuve du nombre minimum de piles sur les grilles $n\times n$, $n\geqslant 1$ et $n\neq 5$

Contrairement aux méthodes combinatoires complexes de la littérature, notre démarche repose sur des arguments simples de pavages. Cette approche géométrique a été spécifiquement construite pour être expérimentée en classe (SiRC).

Nous allons vérifier si on peut répondre par l'affirmative à la question 1, pour toutes les grilles $n\times n$, $n\geqslant 1$ et $n\neq 5$.

Pour tenter d'apporter une réponse à cette question, nous procédons par étapes en décomposant la grille $n\times n$ en sous-structures (par exemple des blocs ou des bandes). Cette construction de nouvelles classes d'objets nous permet de raisonner par récurrence sur n ($n\geqslant 6$).

On montre que, dans le cas $n \geqslant 6$, la borne est atteinte, puis que pour tout $n \geqslant 6$, l'ajout de lignes ou de colonnes permet de conserver l'optimalité du regroupement par paquets de 16, en s'assurant que les zones frontières peuvent être absorbées par les piles voisines ou former de nouvelles piles optimales.

Ainsi, pour tout $n \geqslant 6$, la borne inférieure $\left\lceil \frac{n^2}{16} \right\rceil$ est atteinte, ce qui nous permet d'établir les résultats suivants :

> ***Théorème 3.*** *Sur une grille $n \times n$, $n \geqslant 6$, le nombre minimum de piles est exactement $\left\lceil \frac{n^2}{16} \right\rceil$.*

D'après l'étude des grilles $n \times n$, $n \leqslant 4$, on peut vérifier que la borne du Théorème 3 reste valable pour ces petites grilles, d'où le corollaire ci-dessous :

> ***Corollaire 3.*** *Sur une grille $n \times n$, $n \geqslant 1$ et $n \neq 5$ le nombre minimum de piles est exactement $\left\lceil \frac{n^2}{16} \right\rceil$.*

Borne supérieure du nombre de piles sur les grilles $q \times p$, $q \neq p$, $q \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$

Les travaux de MacDonald, Wenger et Wright (2014) nous permettraient d'obtenir le même résultat que celui ci-dessous en utilisant un raisonnement par récurrence comme pour la grille carrée $n \times n$.

> ***Théorème 4.*** *Sur une grille $q \times p$, $q \geqslant 7$ et $p \geqslant 7$, $q \neq p$ le nombre minimum de piles est exactement $\left\lceil \frac{q \times p}{16} \right\rceil$.*

Remarque. Le Théorème 4 nous garantit que le nombre minimum X de piles correspond exactement à $\left\lceil \frac{q \times p}{16} \right\rceil$ pour $q \geqslant 7$ et $p \geqslant 7$. En s'inspirant des résultats de MacDonald, Wenger et Wright (2014), pour les dimensions inférieures, nous remarquons que ce nombre n'excède la borne théorique que d'au plus une unité : soit $\left\lceil \frac{q \times p}{16} \right\rceil$, soit $\left\lceil \frac{q \times p}{16} \right\rceil + 1$. Notons que le cas des grilles $5 \times p$ constitue une exception à ce résultat. Effectivement, elles ne vérifient pas ces propriétés, nécessitant alors un nombre de piles supérieur à ces prévisions.

Dans la prochaine section nous donnons quelques éléments didactiques permettant d'identifier les connaissances mobilisées et visées à travers une situation de recherche pour la classe générée à partir de l'étude épistémologique et mathématique de ce problème d'optimisation combinatoire.

3. – Analyse didactique de la situation et connaissances mobilisées et visées

Le problème analysé s'inscrit dans le champ de recherche de l'optimisation combinatoire en mathématiques discrètes et se prête particulièrement à une mise en œuvre fondée sur la manipulation d'objets tangibles. La conception de supports tels que des grilles rectangulaires ou des bandes associées à des jetons permet une matérialisation de la situation, facilitant l'appropriation du problème par les élèves. Ce matériel contribue à renforcer l'adhésion des élèves et favorise, par conséquent, le processus de dévolution.

Dès le cycle 2, afin de favoriser les processus d'expérimentation, de formulation et de validation, mobilisant des connaissances spécifiques fondamentales de l'activité mathématique en classe, nous proposons d'introduire le problème dans sa forme générale tout en orientant dans un premier temps la recherche vers des configurations simples. Celle-ci débute ainsi dans le cadre de bandes de type $1 \times p$, puis s'étend progressivement aux bandes $2 \times p$, $3 \times p$ et $4 \times p$. La situation est ensuite ouverte à des grilles dont la hauteur est supérieure à 4 avec une attention particulière portée au cas de la grille 5×5 et plus largement aux grilles carrées de taille $n > 1$. Une telle progression nécessite *a fortiori* un temps long, réparti

sur plusieurs séances d'enseignement. Elle demeure toutefois adaptable et peut être réorientée par les enseignants ou les formateurs en fonction des objectifs visés, du contexte de classe et du niveau d'enseignement. Nous présentons ci-après un tableau qui donne des propositions d'aménagement pour différents niveaux d'enseignement (*cf.* tableau 2).

Niveau d'enseignement	Pistes envisageables	Savoirs mathématiques	Savoir-faire mathématiques
Primaire	**(P1)** bandes $1\times p$, $2\times p$, $3\times p$, $4\times p$	**(S1)** division euclidienne, symétrie, encadrement, min/max, au moins, au plus	**(SF1)** Étude de cas particuliers, raisonnements par exhaustivité des cas, disjonction de cas, contre-exemple, constructions de nouvelles classes d'objets, émission de conjectures, processus de preuves, changement de point de vue sur le problème : primal/dual, changement de registres de représentations
Collège (France) Cycle d'Orientation (Suisse)	**(P1)** **(P2)** carré 5×5 et carré $n\times n$	**(S1)** **(S2)** pavage (non-unicité)	**(SF1)** **(SF2)** réinvestissement de sous-structures (3×3 et 2×4), découpages inductifs (amorçage d'un raisonnement par récurrence et d'un raisonnement par l'absurde)
Lycée et au-delà (France) Gymnase et au-delà (Suisse)	**(P1)** **(P2)** **(P3)** rectangle $q\times p$	**(S1)** **(S2)** **(S3)** majorant, minorant, borne sup/inf	**(SF1)** **(SF2)** **(SF3)** raisonnement par récurrence

Tableau 2 *: Proposition de situations en fonction du niveau d'enseignement et savoirs et savoir-faire mathématiques identifiés.*

En outre, cette situation mobilise et vise différentes connaissances mathématiques. On identifie d'abord des connaissances relevant de savoirs mathématiques, telles que les notions de division euclidienne, de partie entière, de symétrie, ainsi que les concepts de « au moins » et « au plus », en lien avec la notion d'encadrement par inégalité qui correspond aux notions de minorant/majorant voire de borne inférieure/supérieure en mathématiques, bien que ces dernières ne soient pas formalisées comme telles dans le contexte de l'enseignement primaire.

S'ajoutent ensuite des connaissances davantage centrées sur l'activité mathématique elle-même, en lien avec les processus précédemment évoqués. Il s'agit notamment de l'étude de cas particuliers de petite taille afin de réduire la complexité du problème, de la recherche d'invariants, de la mobilisation de preuves locales fondées sur des raisonnements par exhaustivité des cas utilisant des arguments de symétrie, de la partition voire de la construction de classes d'objets mathématiques, ainsi que de l'usage du contre-exemple pour réfuter une proposition. Une solution proposée peut ainsi être réfutée par l'exhibition d'une solution plus optimale. Par ailleurs, l'identification de régularités permet de formu-

ler des conjectures de portée plus générale et de travailler la dialectique particulier-général. La mise en évidence de la dualité entre le problème primal (initial) et son dual offre un cadre favorable pour traiter de la condition nécessaire (CN) et de la condition suffisante (CS) d'optimalité, en pointant les distinctions entre CS et CN. Le recours à des objets manipulables conduit également les élèves, à un moment donné, à changer de registre de représentations sémiotiques, en passant d'objets manipulables à des objets mathématiques abstraits au moyen de représentations symbolico-numérique. Tout ceci est en complète adéquation avec les volontés curriculaires et les recommandations formulées sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire.

Dans le cas de la bande $1 \times p$, nous proposons de donner une bande dont la longueur est d'au moins 14 cases, avec un carré unitaire rouge qui permet de délimiter la longueur de la surface à traiter. En effet, cela permet de donner la responsabilité scientifique aux élèves quant au choix de la longueur de la bande de hauteur 1 à traiter. Cela invite aussi les élèves à étudier plusieurs cas particuliers, pour s'approprier le problème, et esquisser des régularités lors de la recherche d'invariants. Le fait de donner une bande d'au moins 14 cases permet justement aux élèves de remarquer qu'à chaque longueur divisible par 4, on incrémente de 1 le nombre minimum de piles. Ainsi, on favorise l'aspect expérimental grâce à la manipulation dans l'étude de cas particuliers laissée à la charge des élèves. Ceci permet aux élèves de faire des preuves de l'optimum sur certains cas grâce à un raisonnement combinant l'exhaustivité des cas avec des arguments de symétries qui réduit ce travail. Cela conduit aussi les élèves à travailler la notion de contre-exemple en mathématique pour réfuter une proposition émise en situation. Par exemple, les élèves exhibent de prime abord une solution pensant que cette dernière est optimale mais d'autres essais, plus structurés, permettent d'en trouver une meilleure et donc de réfuter l'optimalité évoquée précédemment. Soulignons toutefois que le raisonnement par exhaustivité des cas devient assez rapidement fastidieux pour déterminer la CN (borne inférieure) sur l'optimum, c'est pourquoi il est nécessaire à un moment donné de regarder le problème d'une autre manière. C'est d'ailleurs souvent le cas dans des situations optimisations combinatoires pour déterminer une borne inférieure relevant de la CN : on identifie d'abord le problème dual, on le résout afin d'en déduire une CN sur le problème primal. Ceci permet de pointer une distinction importante dans la distinction entre CS et CN notamment au sujet des processus de preuve mobilisés qui sont bien souvent très différents. Remarquons aussi qu'il se peut parfois que l'égalité entre borne supérieure et borne inférieure n'apparaisse pas immédiatement, dans ce cas seul un encadrement de l'optimum est prouvé, et d'autres raisonnement sont nécessaires pour prouver l'égalité entre ces bornes. C'est le cas par exemple du problème de *la chasse à la bête* notamment dans le cadre des taupes sous la forme de triominos coudés où le saut de dualité au départ est non nul. (p. ex. Ouvrier-Buffet et al., 2018 ; Gravier et Ouvrier-Buffet, 2022). Il est fondamental, selon nous, que les élèves comprennent l'enjeu de vérité et la nécessité de preuve. L'exhibition d'une solution garantie son existence (CS), mais ne garantit pas son optimalité (CN). Cette phase d'expérimentation conduit à la formulation de conjectures plus générales, dès que des régularités ou des invariants ont pu être observés. D'où la nécessité d'avoir une longueur de bandes suffisante.

Une fois, le cas de la bande $1 \times p$ traitée, on peut inviter les élèves à étudier des bandes de hauteur $q > 1$. On peut alors proposer d'autres bandes de hauteur 1 pour former des

bandes de hauteur $q \geqslant 2$, ce qui évite de multiplier des grilles de tailles différentes. Le traitement des bandes, pour $q \in \{2,3,4\}$, permet aux élèves de remarquer que ces différents problèmes sont en fait complètement équivalent à la résolution du problème dans le cas $1 \times p$. En effet, cela consiste à mobiliser une stratégie d'empilement de lignes par construction d'une nouvelle classe d'objets. À savoir, pour chaque case de la bande, des piles de taille k, $k \in \{2,3,4\}$. Une fois une ligne constituée de p piles de taille k, on peut alors raisonner comme si on avait des piles de taille 1 pour chaque case.

De plus, ce qui pourrait être intéressant à partir de là serait de demander aux élèves de regarder ce qui se passe dès lors que $q \geqslant 4$ en les orientant, si nécessaire, vers le problème dual. C'est-à-dire rechercher la taille maximum d'une pile sur ces grilles rectangulaires. Le traitement du cas de la grille 4×4 permet aux élèves d'exhiber des piles de taille au moins 16. Et un raisonnement sur une case cible permet de montrer que la taille maximum de la pile est au plus 16 jetons. Par conséquent, cela permet de trouver une borne inférieure à l'optimum recherché dans le problème primal. La question de borne supérieure étant complexe à traiter dans le cas des rectangles, on pourra orienter la recherche dans le cas des grilles carrées de taille $n \geqslant 1$. Le traitement du cas particulier pathologique du 5×5 permet de mobiliser plusieurs raisonnements mathématiques (absurde, disjonction de cas) et, en même temps, de prouver, grâce à ce contre-exemple, que la borne supérieure n'est pas toujours égale à la borne inférieure. La généralisation vers des grilles carrées de taille supérieure à 6 pourra être évoquée, ce qui nécessite, par ailleurs, d'autres raisonnements comme la construction de classes d'objets, à l'aide de sous-structures, et de récurrence. Ceci permet d'établir un résultat fort d'un point de vue des conceptions sur les résultats mathématiques. En effet, le Corollaire 3 est valable pour tout $n \geqslant 1$, sauf dans le cas $n = 5$, ce qui est assez spécifique par rapport aux différents résultats que les élèves ont l'habitude de rencontrer au cours de leur scolarité. Effectivement, dans la plupart des cas ils rencontrent soit une proposition qui est « toujours vraie », soit une proposition qui est vraie à partir d'un certain rang, mais rarement une proposition vraie la majorité du temps sauf pour quelques cas non initiaux et non triviaux. Cette situation permet justement de rompre ce contrat et de lutter ainsi contre ce prêt-à-penser primitif.

4. – Mise en place de cette situation à différents niveaux d'enseignement et exemple de traces produites par les élèves dans le cadre de dispositifs en France et en Suisse

Ce problème a été exploré au travers de diverses situations dans le cadre des dispositifs *Maths à Modeler*[4] et d'une version remaniée de *MATh.en.JEANS*[5] dans le contexte franco-suisse nommé : *« Des Mots² & des Maths »* mis en œuvre en France et en Suisse, à différents niveaux d'enseignement (primaire, collège/cycle d'orientation et lycée/gymnase).

Pour rappel, la Structure Fédérative de Recherche *Maths à Modeler* est une équipe pluridisciplinaire réunissant des chercheurs en mathématiques, en informatique et en didactique des mathématiques. Son antenne principale est implantée à l'Université Grenoble Alpes, et plusieurs antennes ou boutures sont déployées à l'international (Brésil, Chili, Belgique, Suisse, Algérie, etc.). Cette communauté s'attache à diffuser les pratiques de la recherche en mathématiques à tous les niveaux d'enseignement, aussi bien en contexte de

[4] https://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/

[5] https://www.mathenjeans.fr/

classe qu'en dehors de celle-ci, notamment au travers d'actions de médiation (Fête de la science, salon culture et jeux mathématiques du CIJM à Paris, le festival Remue-Méninges à Grenoble, le festival Math'émerveille à Genève, etc.). Les membres de cette structure conçoivent des Situations de Recherche pour la Classe à partir de problèmes issus de la recherche contemporaine en mathématiques discrètes. À titre d'exemple, des ateliers répartis sur cinq à six séances d'une à deux heures sont proposés dans les classes par des chercheurs. Ils sont complétés par l'organisation d'un séminaire junior à l'université ou dans une Haute École, au cours duquel les élèves présentent les résultats de leurs recherches à d'autres classes, pas nécessairement du même niveau, ainsi qu'aux chercheurs présents pour cette occasion. Ces moments ont aussi pour objectif de favoriser le décloisonnement entre mathématiques et société et ainsi permettre un rapprochement entre monde académique et monde scolaire.

Ancré dans un écosystème transfrontalier fédérant l'Université de Genève (équipe du G.EM[6]), les Hautes Écoles Pédagogiques (HEP) romandes et les réseaux français, le projet *Des Mots² & des Maths* propose un modèle de médiation scientifique hybride. Il articule la structure immersive de *MATh.en.JEANS* avec un regard didactique porté par l'équipe *Maths à Modeler* de Suisse afin de donner une place importante à la fois aux processus expérimental et langagier relevant de l'expérimentation, de la formulation, de l'argumentation et du processus de preuve qui sont au cœur de l'activité mathématique, tout en mettant l'emphase sur l'analyse de traces produites par les élèves et les étudiants en situation. Inscrit dans une perspective européenne (*Horizon Europe*), ce dispositif fonctionne selon un principe de « vases communicants » : les observations de terrain nourrissent la recherche en didactique des mathématiques, qui en retour outille les enseignants pour renouveler l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques par la recherche.

Par exemple, au cycle 2 (classe de 8e HarmoS en Suisse, équivalent à la 6e en France), les élèves ont travaillé sur des situations autour de bandes de hauteur $q \in \{1, \dots, 5\}$

Figure 10 *: Exemple de matériel (bandes de 14 cases, jetons et une case rouge permettant de délimiter la longueur de la bande).*

Certains groupes ont commencé à expérimenter sur des cas particuliers plus petits que la longueur de la bande donnée. Par exemple, dans le cas de la bande 1×9, les élèves ont expliqué les étapes de leur démarche (*cf.* figure 11). Un changement de registres de représentations, passant d'objets tangibles manipulables (*cf.* figure 10) en objets symboliques et numériques (*cf.* figure 11) a été mis en œuvre par les élèves.

Le déplacement des jetons, en veillant à ne pas faire de pile sur les extrémités de la bande (qui ne minimise pas le nombres de piles) a permis aux élèves d'exprimer une CS sur la minimalité du nombre de piles pour la bande 1×9.

Cette CS est aussi une CN mais, dans ce cas, elle n'a pas été prouvée et reste en l'état une conjecture comme le soulignent les élèves : « mais on s'est[7] pas si c'est le minimum ».

[6] https://www.unige.ch/math/GEM/

[7] Les erreurs orthographiques des élèves n'ont pas été corrigées pour garder l'authenticité des productions.

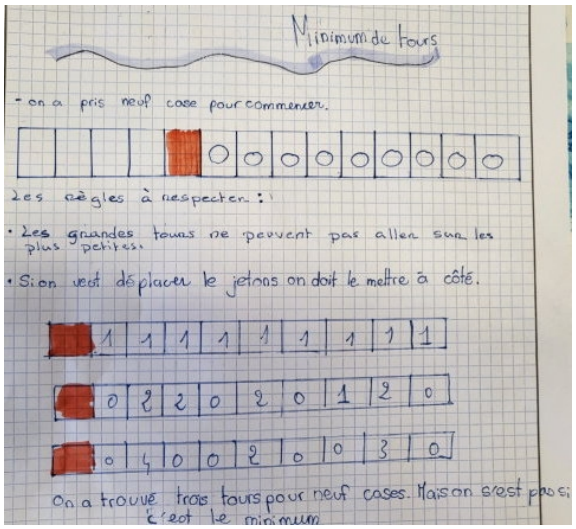


Figure 11 *: Production d'une CS sur la bande 1×9.*

Les élèves ont alors réduit la complexité du problème en étudiant des cas particuliers de plus petite taille (*cf.* figure 12). La variable de recherche sur la longueur de la bande permet justement de donner cette responsabilité aux élèves quant à la valeur à étudier.

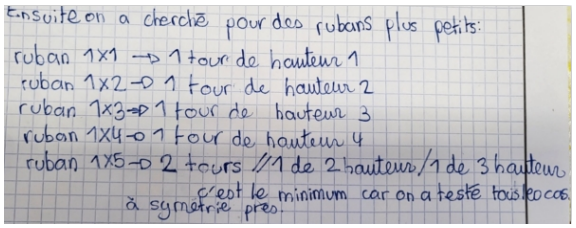


Figure 12 *: Production sur des bandes d'une longueur plus petite.*

Pour l'étude de cas particuliers de longueur plus petite ($1\times p$, $p\in\{1,\dots,5\}$), les élèves ont procédé à l'aide d'un raisonnement par exhaustivité des cas pour la bande de longueur 5 en utilisant des arguments de symétries pour réduire le nombre de cas à traiter, et ont couplé leur raisonnement à un raisonnement par disjonction de cas (*cf.* figure 13).

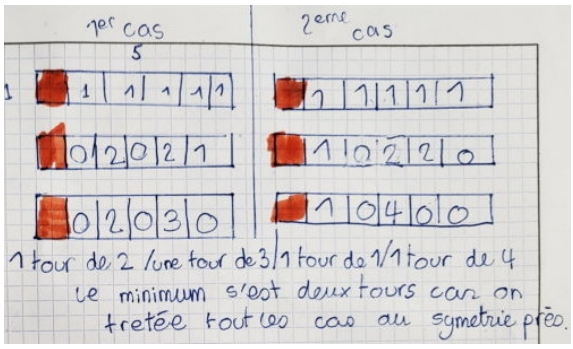


Figure 13 *: Raisonnement par exhaustivité des cas (à symétrie près) couplé à un raisonnement par disjonction de cas pour prouver l'optimalité dans le cas de la bande 1×5.*

Dans le cas des bandes plus petites, l'optimum est 1 (*cf.* figure 12), la construction d'une seule pile leur a permis de déduire facilement que 1 est bien optimum car il n'est pas possible de faire moins, étant donné que la bande possède au moins un jeton, donc nécessairement au moins une pile. Cet argument, bien que non présent à l'écrit, a été verbalisé par plusieurs groupes lors de la mise en commun.

La recherche sur d'autres cas particuliers a été ensuite réalisée par les élèves, mais l'argument utilisant le raisonnement par exhaustivité des cas s'est révélé fastidieux à mettre en œuvre dès lors que la longueur de la bande était plus grande.

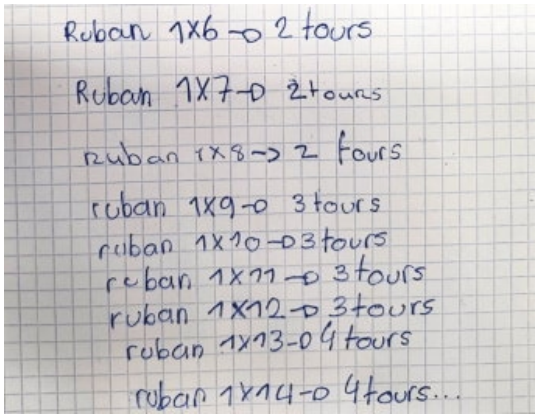


Figure 14 *: Traitement d'autres cas particuliers.*

Grâce à l'expérimentation de ces cas particuliers, les élèves ont remarqué que si la longueur de la bande est divisible par 4, alors le nombre minimum de piles est le résultat de la division. *A contrario*, si la longueur n'est pas divisible par 4, c'est le résultat de la division (euclidienne) auquel on ajoute 1. L'argument des élèves repose sur le fait que toutes les 4 cases, on peut former une tour de hauteur 4 et, qu'il restera forcément une case vide toutes les 4 cases. Toutefois, l'argument manquant pour montrer que c'est aussi une CN est que 4 est en fait la hauteur maximale de la pile que l'on peut construire sur une bande $1\times p$, $p\geqslant 1$.

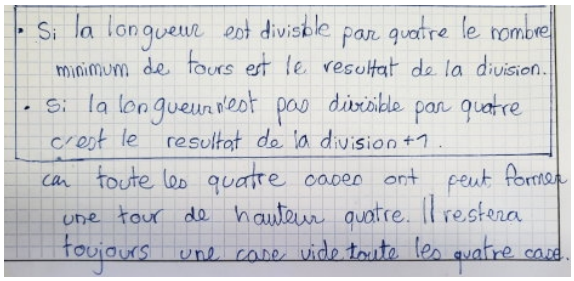


Figure 15 *: Formulation du résultat dans le cas de la bande $1\times p$, $p\geqslant 1$.*

Les élèves ont ensuite cherché sur des bandes de hauteur plus grande que 1. Par exemple dans le cas des bandes $2\times p$, ils ont concaténé deux bandes de hauteur 1 (*cf.* figure 16) et ont procédé par construction d'une nouvelle classe d'objets : des piles de hauteur 2 sur une seule bande.

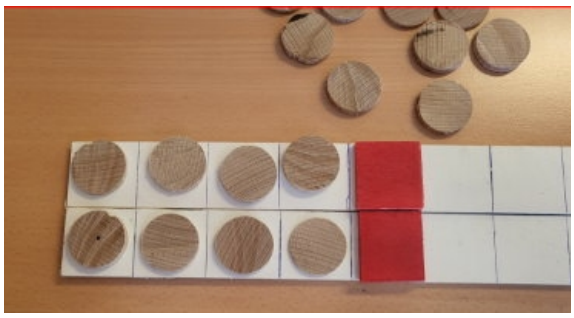


Figure 16 *: Exemple de grille 2×4 avec le matériel donné.*

En effet, la stratégie des élèves a consisté à remarquer qu'une des deux bandes pouvait être empilée sur l'autre et ainsi constituer une seule bande de p cases avec exactement p piles de de taille 2 sur chacune des cases. Les élèves ont ensuite remarqué que le traitement de ce cas est en fait équivalent à résoudre le problème sur une bande avec un seul jeton par case (*cf.* figure 17).

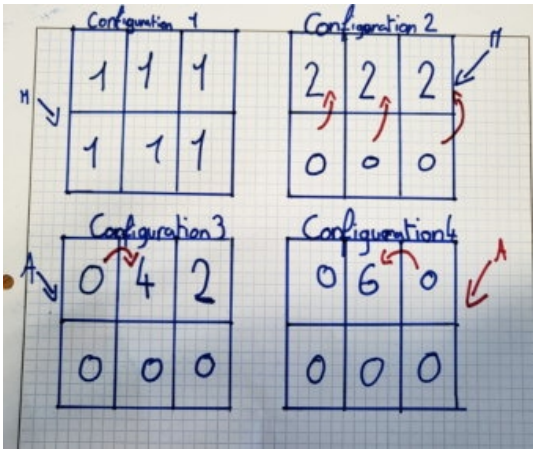


Figure 17 *: Étapes de résolution de la grille 2×3.*

Cette stratégie peut être remobilisée dans le cas des bandes de hauteur 3 et 4 comme le montrent les productions d'élèves suivantes (*cf.* figures 18). Les élèves empilent d'abord les jetons de la première ligne sur la seconde, puis ceux de la troisième ligne sur cette même seconde ligne (*cf.* figure 18a). Dans le cadre du 3×3, ils parviennent, avec cette stratégie, à exhiber une seule pile de taille 9, alors que pour le 4×4, qui utilise une stratégie analogue par construction de nouvelles classes de piles de jetons : la première ligne va sur la deuxième, la quatrième va sur la troisième et ensuite la troisième va sur la seconde (*cf.* figure 18b). Ils exhibent donc une ligne constituée uniquement de piles de taille 4, ce qui donne finalement une seule pile de taille 16. Notons que cette dernière étape est absente des productions mais facile à réaliser (*cf.* figures 18). À partir de ces cas, les élèves remarquent que cette

stratégie de construction est en fait généralisable quelle que soit la longueur de la bande d'une hauteur inférieure ou égale à 4 en donnant l'exemple de la bande $4\times1\,000$. Ils mentionnent le fait que « tout redevient comme au début avec 1 bande de hauteur 1 » et appliquent sur la longueur 1 000 la propriété « si la longueur de la bande est divisible par 4, alors le nombre minimum de tours est le résultat de la division », ce qui donne 250 comme résultat pour le minimum. Cela sous-entend qu'ils ont compris que chaque bande de hauteur comprise entre 2 et 4 peut être ramenée à une seule bande de p piles (longueur de la bande) de taille $k\in\{2,3,4\}$, ce qui est en fait équivalent à résoudre le problème sur une bande en considérant p piles de taille 1.

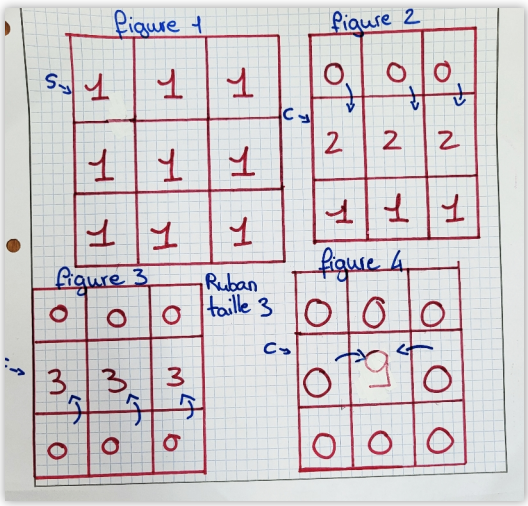


Figure 18a

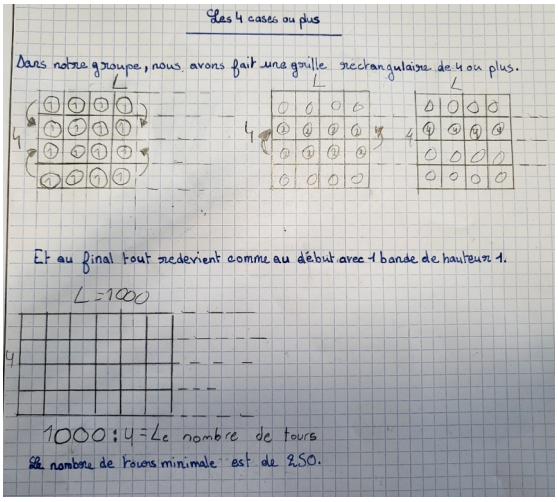


Figure 18b

Figures 18 *: Étapes de résolution pour la grille 3×3 et 4×4 amenant à une généralisation.*

En revanche, dès lors que la hauteur de la bande est strictement plus grande que 4, le réinvestissement de cette stratégie par les élèves montre en effet qu'« il restera toujours au moins 2 lignes non collées pour une grille de hauteur 5 et plus » (*cf.* figure 19). Ceci reste en l'état une conjecture.

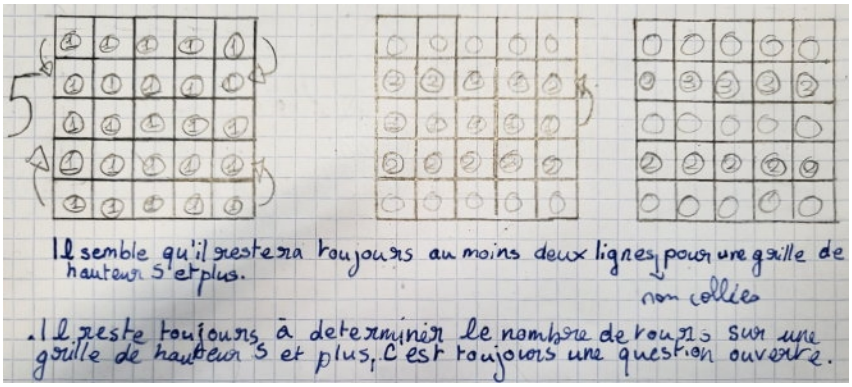


Figure 19 *: Étapes de résolution de la grille 5×5 et question encore ouverte.*

Par ailleurs, les élèves prennent aussi conscience que la résolution du problème n'est pas terminée, il reste toujours une question ouverte : c'est-à-dire « déterminer le nombre de tours sur une grille de hauteur 5 et plus » (*cf.* figure 19).

L'étude de grilles carrées a également été mobilisée chez des élèves de cycle 4 en France (classe de 3e). Des résultats locaux d'optimalité ont été prouvés dans le cas du 2×2, du 3×3 et du 4×4. Les élèves utilisent la même stratégie qu'évoquée précédemment en ramenant le problème à une seule bande dans le cadre du 2×2 et du 3×3 (*cf.* figure 20).

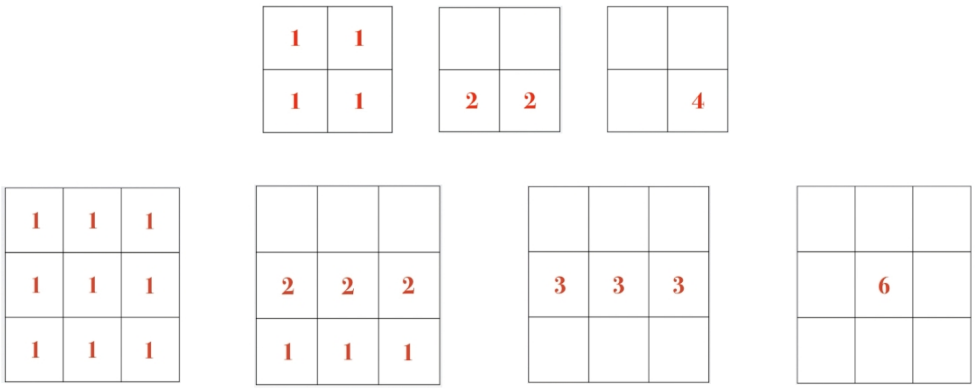


Figure 20 *: Étapes de résolution des grilles 2×2 et 3×3 par des élèves de 3e en France.*

En revanche dans le cadre du 4×4, ils réinvestissent la procédure du 2×2 en partitionnant le carré en 4 carrés 2×2 comme présenté dans la figure ci-après (*cf.* figure 21).

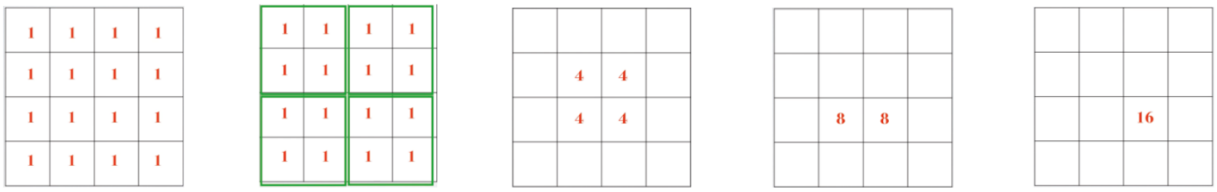


Figure 21 *: Étapes de résolution de la grille 4×4 par réinvestissement du résultat sur la grille 2×2.*

Bien que cette classe de 3e ait pu trouver une solution à 3 piles, les élèves ne sont pas arrivés à prouver que 3 était bien l'optimum. Toutefois, en regardant le problème dual (piles de taille maximum), ils ont montré que 2 piles au moins étaient nécessaires. Ils ont donc trouvé un encadrement de l'optimum : $2 \leqslant X \leqslant 3$. Effectivement, la figure ci-après montre un cheminement dans le processus de minoration. Si l'on considère une case cible possédant 4 voisins (*cf.* figure 22, case centrale) dont le but est de construire une pile sur celle-ci, si cette dernière à l'état initial possède une pile d'un seul jeton, arbitrairement, un de ces voisins possède aussi une pile d'un seul jeton. On construit donc nécessairement sur cette case cible une pile de 2 jetons. Ceci signifie qu'il y a obligatoirement une autre case voisine ayant elle aussi une pile de 2 jetons. On peut donc construire une pile de 4 jetons sur la case cible. Parmi les 2 cases voisines restantes, il y a une case avec nécessairement une pile de 4 jetons. On obtient donc une pile de 8 jetons sur la case cible. Enfin, la seule case voisine restante pos-

sède alors obligatoirement une pile de 8 jetons. On a donc une pile de 16 jetons sur la case cible. Par conséquent, la taille maximum d'une pile construite sur une grille carrée est au plus 16.

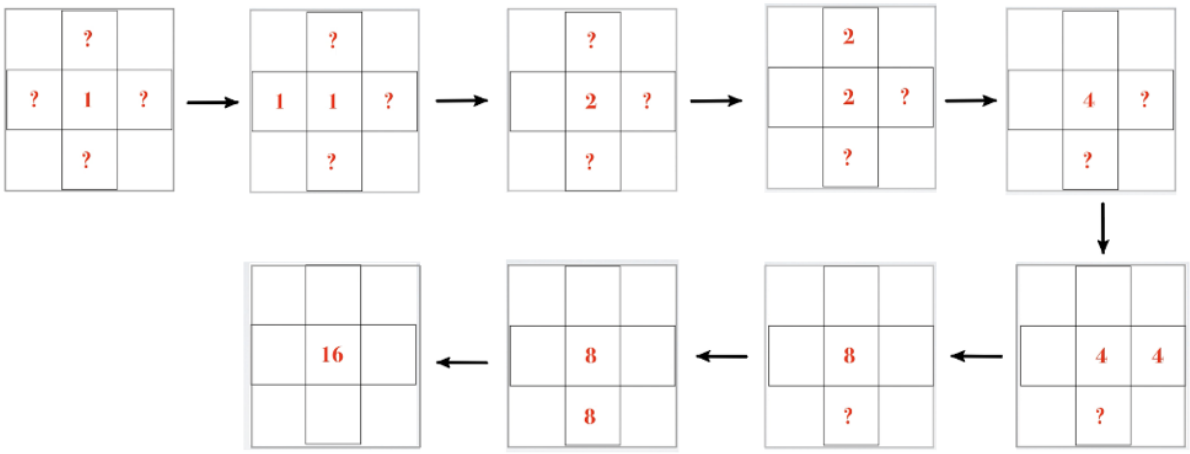


Figure 22 *: Pile de taille maximum que l'on peut construire sur une grille carrée.*

Ainsi, dans le cas du 5×5 :

a) soit on est capable d'exhiber une solution à 2 piles, ce qui signifie que $X=2$ (ce qui est impossible d'après le Théorème 5) ;

b) soit on arrive à une meilleure minoration qui prouve qu'il faut au moins 3 piles, et dans ce cas $X=2$ (raisonnement par l'absurde : voir preuve du Théorème 5).

En l'état, seul l'encadrement $2\leqslant X\leqslant3$ a été prouvé par les élèves et les deux points précédents restent encore sous la forme de conjecture à prouver (b) ou réfuter (a).

Au lycée, dans une classe de 1re par exemple, les élèves ont pu aller plus loin en prouvant l'optimalité du nombre minimum de piles sur la grille 5×5. Une CS a été exhibée (*cf.* figure 23). La CN, quant à elle, a nécessité certains étayages pour orienter les élèves vers un raisonnement par l'absurde, en supposant qu'il existe une solution à deux piles, pour la grille 5×5, qui sont de taille au moins 9.

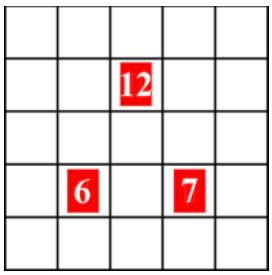


Figure 23 *: Trois piles de tailles 12, 6 et 7 pour la grille 5×5.*

Les élèves ont ensuite cherché les piles de taille maximum que l'on peut construire lorsque la case cible possède 4 voisins, 3 voisins et 2 voisins. Ils ont trouvé une pile de taille 16 pour une case cible avec 4 voisins, une pile de taille 8 pour une case cible avec 3 voisins et une pile de taille 4 avec 2 voisins. Le raisonnement est analogue à ce qui a été décrit précédemment (*cf.* figure 22). Par la suite, les élèves ont remarqué que « la couronne » de la grille carrée 5×5 ne permettra pas d'avoir des piles de taille maximum car les cases n'ont que 2 (cases jaunes) ou 3 voisins (cases vertes). Par conséquent, pour maximiser la taille des piles et donc minimiser le nombre

de piles, il faut nécessairement que les piles se situent dans la grille centrale 3×3 (*cf.* figure 24).

Les élèves ont alors cherché, à symétrie près, les cases avec un voisin commun qui correspond aux cases ayant une double couleur (*cf.* figure 25).

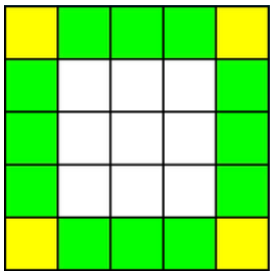


Figure 24 *: La couronne ne peut pas posséder de piles de taille maximum.*

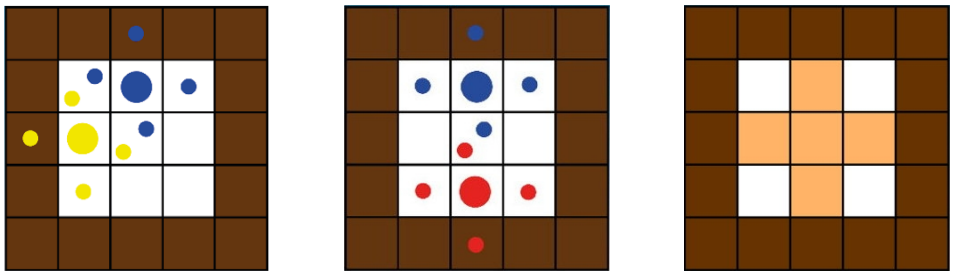


Figure 25 *: Cases avec un voisin commun (double couleur) donnant 4 cases cibles pour la première pile à symétrie près (cases blanches).*

Ils ont alors conclu qu'une des deux piles, qu'on appellera la première pile (pile rouge), se trouvait obligatoirement sur une des cases blanches. Ils ont décidé que cette pile se trouvait dans le coin supérieur gauche de la grille 3×3 (jeton rouge, *cf.* figure 26). Ensuite, les élèves ont traité, par un raisonnement par disjonction de cas, l'emplacement de la deuxième pile (pile bleue). Ils ont exclu rapidement que la deuxième pile ne pouvait pas se trouver sur la même ligne ou la même colonne que la première pile car ces deux piles ont des voisins communs. Ils ont montré ensuite, en raisonnant par l'absurde, qu'il n'était pas possible d'avoir une deuxième pile sur la case bleue sur la même diagonale que la première pile. En effet, par déplacements successifs des jetons rectangulaires rouges et bleus vers leurs piles respectives rouges et bleues, cela permettrait de constituer une deuxième pile de hauteur 16, ce qui est impossible avec le nombre de jetons sur la grille (*cf.* figure 26).

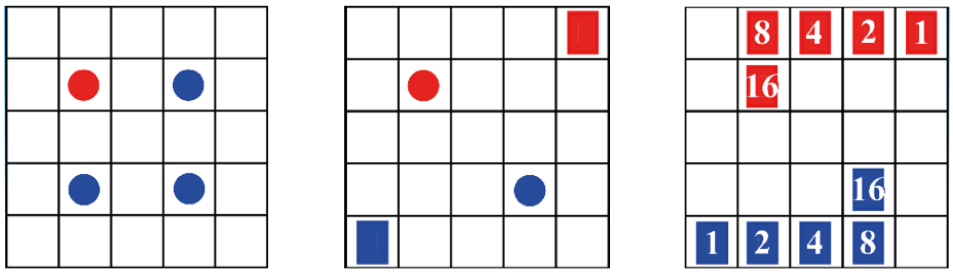


Figure 26 *: Impossibilité d'avoir une deuxième pile sur les cases ayant un point bleu.*

Les autres cas ont été traités par les élèves qui ont rapidement exclu, par un argument similaire de partage de voisins, les potentielles positions de la deuxième pile de la grille de gauche (jetons jaunes) et celle de droite (jeton violet) de la figure ci-après (*cf.* figure 27).

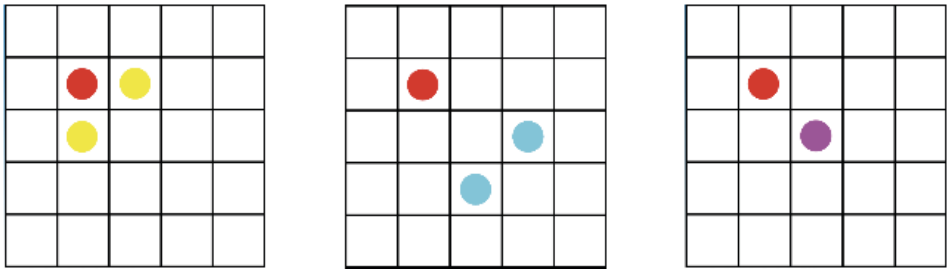


Figure 27 *: Seuls les emplacements représentés par des pions bleu clair sont envisageables.*

Sans perte de généralités et à symétrie près, les élèves ont fixé la deuxième pile sur la position centrale la plus basse représentée par un jeton bleu (*cf.* figure 28). Ils se sont ensuite questionnés sur la taille de la deuxième pile. Ils ont alors remarqué que le jeton rectangulaire rouge en haut à droite pouvait être absorbé uniquement par la pile rouge car la pile bleue est à une distance de 5. Ceci implique que la pile rouge est de taille 16, puisque le jeton rectangulaire rouge se trouve à distance 4 de cette pile rouge. Par conséquent, la pile bleue est de taille 9.

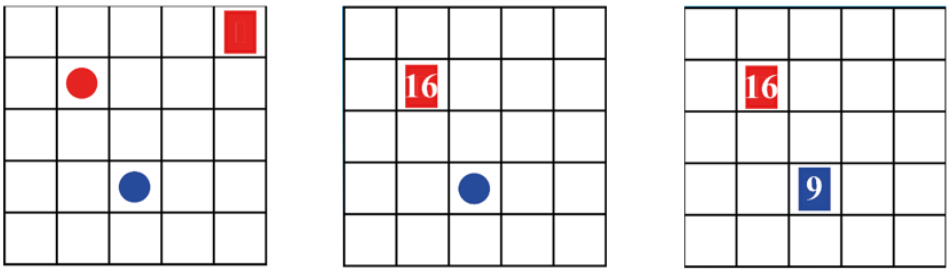


Figure 28 *: Les tailles des deux piles sont figées.*

La taille de chaque pile étant désormais déterminée, ils se sont intéressés au nombre de jetons qui devaient se diriger vers la pile bleue de taille 9. Comme évoqué précédemment, le jeton carré bleu clair (*cf.* figure 29, en haut à droite) se dirige obligatoirement vers la pile rouge qui est de taille 16. Ceci implique que le jeton bleu clair en bas à gauche ne peut pas se rendre vers cette pile rouge de taille 16, sinon on aurait une pile de taille 32, ce qui est impossible. Le jeton bleu clair se dirige donc obligatoirement vers la pile bleue de taille 9. Puisque cette pile est de taille 9, elle a donc besoin de ses voisins jaunes immédiats. Ensuite, les jetons verts sont trop éloignés de la pile rouge, ils vont donc vers la pile bleue. Le jeton rose se retrouve bloqué et est obligé d'aller sur la pile bleue. En comptant le nombre de jetons qui se rendent vers la pile bleue qui était de taille 1 au départ, on obtient une pile de taille 10, ce qui contredit l'existence de deux piles.

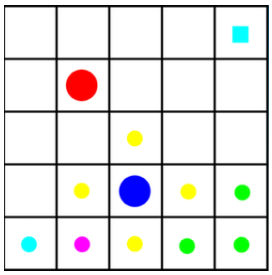


Figure 29 *: On compte les jetons qui se déplacent vers la pile bleue… amenant une contradiction.*

5. – Phase de conclusion sur le problème étudié et éléments à institutionnaliser en classe

À travers ce type de situations proposées dans les classes, et quel que soit le niveau d'enseignement, nous soutenons l'importance, à l'instar d'autres travaux comme ceux de Gandit et al. (2022), de subdiviser la phase conclusive et le processus d'institutionnalisation en trois temps, et considérons que *« cette explicitation des apprentissages en trois temps est essentielle »* (Gandit et al., 2022, p. 442). Par ailleurs, lors de ces différents moments, c'est bien l'enseignant·e qui doit prendre en charge la responsabilité des traces écrites à laisser aux élèves.

5.1. - Premier temps : la conclusion sur le problème

À cet effet, il nous semble tout d'abord nécessaire de proposer, à chaque séance et au moment opportun, des éléments de conclusion permettant de structurer les résultats obtenus, en fonction de l'avancement des élèves dans la résolution du problème. Afin de structurer cette phase l'enseignant ou l'enseignante peut s'aider des questions suivantes : *Quels résultats avez-vous obtenus sur le problème ? Avez-vous répondu au problème proposé ? Où en êtes-vous dans la résolution du problème ? Qu'avez-vous fait ?* Ces questions donnent aux élèves la possibilité de resituer leur travail de recherche par rapport à l'enjeu du problème proposé, mais aussi d'énoncer leurs résultats, prouvés ou en l'état de conjectures. Autrement dit, ce qui a été fait, validé et socialement partagé par la communauté de la classe, et ce qu'il reste à faire, à prouver et qui peut faire encore l'objet d'un débat au sein de la classe.

5.2. - Deuxième temps : l'institutionnalisation locale

Ensuite, il nous semble nécessaire d'amorcer, *a posteriori* de ces éléments conclusifs, une institutionnalisation locale dans le cadre du problème étudié. Celle-ci peut porter à la fois sur les savoir-faire mathématiques mobilisés et, le cas échéant, sur les savoirs mathématiques visés dans l'activité de résolution du problème. Autrement dit, l'enseignant ou l'enseignante formalise certains éléments, par exemple au tableau ou sous la forme d'un texte de savoirs, afin de répondre aux questions suivantes : *Qu'est-ce que mes élèves ont appris ? Quelles connaissances mathématiques ont-ils mobilisé à travers la résolution de ce problème ?* Par exemple, les élèves, qui ont travaillé sur les bandes de hauteur h fixée, ont d'abord étudié des cas particuliers pour la bande de hauteur $h=1$. Cela a permis aux élèves de comprendre que, pour résoudre un problème général, il est souvent nécessaire d'en réduire la complexité en examinant des cas particuliers. Ils ont également appris que l'existence d'une solution particulière (théorème d'existence) ne garantit pas nécessairement que cette solution soit optimale dans le contexte du problème. Ainsi, pour établir l'optimalité d'une solution, il est nécessaire, soit de montrer qu'aucune solution meilleure ne peut être trouvée, soit de produire un contre-exemple montrant explicitement l'existence d'une solution « plus optimale ». Cette situation s'est notamment manifestée au démarrage de l'étude des cas particuliers. La réalisation de plusieurs essais a ainsi permis de

mettre en évidence des résultats locaux nécessitant la mobilisation de différents types de raisonnements mathématiques, tels que le raisonnement par exhaustivité des cas ou par disjonction des cas, souvent associés à des arguments de symétrie afin de réduire le nombre de cas à examiner. Les élèves ont également compris qu'à un certain moment, il devient nécessaire de structurer et de communiquer leurs résultats dans un langage mathématique communicable et acceptable à autrui. Pour ce faire, les élèves ont appris à changer de registres de représentation, passant d'objets tangibles manipulables (jetons, bandes), à des objets mathématiques abstraits représentés sous la forme numérico-symbolique. Par ailleurs, les élèves ont aussi appris que le raisonnement par exhaustivité des cas couplé au raisonnement par disjonction des cas se sont révélés très rapidement coûteux à mettre en œuvre dès lors que les cas à traiter deviennent plus grands. Par conséquent, ce type de raisonnements reste limité dans le contexte du problème. Par ailleurs, les élèves ont également appris que l'étude de plusieurs cas permet de trouver des régularités amenant à émettre des conjectures de portée générale. Ceci apprend aux élèves à reconnaître ce qui peut être généralisable à partir du particulier. De plus, les élèves ont aussi compris qu'une liste d'exemples prouvés ne constitue en aucun cas une preuve générale du problème. Les élèves ont en effet appris que d'autres arguments mathématiques sont nécessaires, notamment celui relevant de la divisibilité par 4, pour prouver la CS pour la bande de hauteur $h=1$. L'argument de la divisibilité par 4 utilisé dans la preuve de la CS n'est toutefois pas valable pour prouver la CN. Les élèves ont ainsi appris qu'il est nécessaire d'avoir un autre regard sur le problème pour traiter la CN, en étudiant cette fois-ci le nombre maximum de jetons que l'on peut former avec une pile. Enfin, les élèves ont aussi appris qu'il est possible de réinvestir un résultat préliminaire, comme celui de la bande de hauteur $h=1$, pour traiter d'autres cas où $h\in\{2;3;4\}$ par exemple, sans que cette approche soit toutefois généralisable dès lors que $h\geqslant 5$.

5.3. - Troisième temps : l'institutionnalisation globale

Enfin, une institutionnalisation globale doit être menée par l'enseignant ou l'enseignante. Celle-ci se détache cette fois du problème initial et s'appuie sur les éléments déjà institutionnalisés localement. Elle vise à répondre à la question suivante : *Quels savoir-faire mathématiques sont transférables à d'autres situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques ? Quels savoir-faire mathématiques doit-on socialement partager dans la classe et naturaliser indépendamment du contexte du problème ?* Pour répondre à ces questions, l'enseignant·e doit s'appuyer sur l'institutionnalisation locale et observer les savoir-faire mathématiques qui peuvent vivre dans d'autres contextes de résolution de problèmes. Par exemple, les élèves ont notamment appris l'importance de réduire la complexité d'un problème général en étudiant des cas particuliers pour établir des premiers résultats locaux qui mobilisent des raisonnements mathématiques, comme l'exhaustivité des cas, la disjonction des cas ou l'usage d'arguments de symétrie. Ces premiers résultats amènent généralement à repérer des régularités permettant de formuler des conjectures de portée plus générales qui sont soit vraies, soit fausses (principe du tiers-exclus lorsque les énoncés formulés ne sont pas contingents). Par ailleurs, il est important que l'enseignant ou l'enseignante pointe les distinctions dans le traitement de la CS et de la CN. En effet, les preuves d'existence d'objets relevant de la CS peuvent être établies grâce à la construction d'un exemple, *a contrario* de celles relevant

d'impossibilité, par exemple, qui nécessitent généralement le traitement systématique de tous les cas possibles ou d'autres arguments mathématiques. Ainsi, il est important que l'enseignant ou l'enseignante souligne le fait qu'un exemple ne suffit pas pour démontrer la non-existence d'un objet mathématique (*i.e.* non-existence d'une meilleure solution par exemple). De plus, il est aussi important que l'enseignant·e évoque la notion de contre-exemple qui permet de réfuter une proposition et souligne aussi qu'un ou plusieurs exemples prouvés ne constituent en aucun cas une preuve de portée générale. Enfin, la structuration et la communication des résultats dans un langage mathématique partagé grâce à des changements de registres de représentation doivent faire l'objet d'une explicitation de la part de l'enseignant·e, montrant ainsi l'importante de la verbalisation, écrite ou orale, dans le travail mathématique.

Discussion, conclusion et perspectives

Dans cet article, nous avons présenté un problème issu de la recherche en optimisation combinatoire. L'étude épistémologique, mathématique et didactique menée autour de ce problème nous a permis de concevoir une **Si**tuation de **R**echerche pour la **C**lasse, offrant la possibilité de travailler, selon le niveau d'enseignement, sur différentes instances du problème. Cette situation peut être mise en œuvre du primaire au lycée, voire au-delà, et favorise la mobilisation de composantes essentielles de l'activité mathématique, telles que la manipulation, la verbalisation et la validation. Ces processus sont d'ailleurs des recommandations voire des prescriptions institutionnelles en vigueur en France et en Suisse dès le cycle 2, notamment en matière de résolution de problèmes, reconnus comme étant essentiel à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. À travers ce texte, nous avons ainsi montré que la situation proposée permet de mobiliser des connaissances mathématiques fondamentales pour la pratique de l'activité mathématique en classe en lien avec ces différents processus. Ces connaissances doivent être institutionnalisées par les enseignants et enseignantes, au sens où elles doivent à un certain moment, être dépersonnalisées, décontextualisées et détemporalisées de la situation afin de leur donner un statut de savoirs mathématiques, socialement et culturellement partagés par la communauté de la classe. En d'autres termes, il s'agit de permettre à ces savoirs de vivre indépendamment de la situation d'enseignement et d'apprentissage construite, afin qu'ils puissent être, plus tard, repersonnalisés, recontextualisés et retemporalisés dans des situations connexes.

En termes de connaissances mathématiques notionnelles que l'enseignant·e peut institutionnaliser suivant le niveau d'enseignement, on retrouve les notions de division euclidienne (voire de congruence), de partie entière, de symétries, de borne inférieure et supérieure, de minimum et de maximum, de majorant et minorant, d'au plus et d'au moins, d'optimum, d'adjacence et d'encadrement.

En ce qui concerne les connaissances inhérentes aux processus de résolution de problèmes que nous avons évoquées ci-avant, on retrouve l'étude de cas particuliers de petite taille permettant d'établir des preuves locales de l'optimum grâce à différents raisonnements mathématiques comme l'exhaustivité des cas, la disjonction des cas ou encore le raisonnement par l'absurde. Le concept de contre-exemple permet parfois aux élèves d'établir une meilleure majoration pour la condition suffisante : « je sais faire 4 piles sur une bande, je pense que c'est l'optimum et pourtant, par construction, j'arrive à faire mieux en

exhibant une solution à 3 piles », par exemple. L'étude de cas particuliers relève ici de la responsabilité scientifique des élèves, elle est rendue possible grâce à l'existence d'une variable de recherche dont la valeur n'est pas fixée par l'enseignant ou l'enseignante (p. ex. carré, rectangle de taille quelconque ou de bandes de longueur non définie *a priori*). L'existence de telle variable permet le travail de la dialectique particulier-général sur le problème. Elle permet aussi la reconnaissance de résultats locaux qui pourraient être généralisables, ce qui peut conduire alors à la verbalisation, dans un langage communicable et acceptable, de résultats présentés sous la forme de conjectures de portée plus générale grâce aux régularités observées en situation. Ceci permet de travailler la distinction dans le statut d'une conjecture (qui peut être vraie ou fausse) et une preuve en mathématiques (qui est vraie selon les règles de la logique mathématique). Par ailleurs, la composante sociale dans le travail de la formulation et dans le processus d'élaboration d'une preuve se mobilise au travers du choix de la forme sociale de travail des élèves (en groupes). Mais aussi des règles du débat scientifique sur l'enjeu de vérité et la nécessité de preuve en mathématique qui permettent de travailler ces composantes en interne au sein du groupe et à l'externe entre les différents groupes. En outre, ce problème permet aussi de mobiliser des changements de représentations sémiotiques importants dans l'activité mathématique de classe : partant d'objets tangibles manipulables à des objets mathématiques abstraits représentés sous la forme de registre symbolique et numérique. Les changements de points de vue sur le problème sont aussi travaillés, notamment pour traiter la condition suffisante et la condition nécessaire et leur distinction dans les processus de preuve, notamment, en regardant le problème d'une autre manière à l'aide de son dual. Le traitement des problèmes primal et dual permet d'établir, grâce à des arguments de preuves différentes, des conditions nécessaires et suffisantes notamment lorsque la distance, c'est-à-dire le saut de dualité entre les valeurs prises au niveau des solutions trouvées dans le problème primal (borne supérieure) et le problème dual (borne inférieure) ont une dualité forte. Ceci revient à dire que la différence entre ces valeurs est nulle car la borne inférieure est égale à la borne supérieure et donne ainsi une solution exacte de l'optimum du problème (ce qui n'est pas toujours le cas notamment lorsque la dualité est faible où seul un encadrement est possible). Les connaissances évoquées dans ce paragraphe doivent *absolument* faire l'objet d'un processus d'institutionnalisation. En effet, elles sont souvent occultées voire considérées comme transparentes ou allant de soi chez certain·es enseignant·es, alors qu'elles sont, d'une part, essentielles dans toute activité mathématique de résolution de problèmes, et d'autre part, ne vont en aucun cas de soi chez les élèves (voire chez les enseignant·es du primaire ou du secondaire). Par conséquent, nous soutenons l'importance de les rendre explicites, à la fois dans et en dehors du contexte du problème grâce aux processus d'institutionnalisation locale (située au niveau du problème) et globale (située en dehors du contexte du problème).

Afin de poursuivre le développement de la situation étudiée, une étude et des expérimentations sont actuellement menées sur d'autres instances du problème, notamment dans le cas de grilles triangulaires et hexagonales (Da Ronch et Hocquard, 2026 ; Hocquard et Da Ronch, 2026), ainsi que sur le tore qui ont été proposées dans le cadre d'ateliers. Le problème pourrait également être étendu au cube ou au pavé droit, à leur surface, ce qui conduirait par exemple à l'étude de ce problème sur leur patron. Sur le plan didactique, notre recherche s'accompagne d'une réflexion

sur le rôle des problèmes d'optimisation combinatoire dans le travail sur les conditions nécessaires et suffisantes. Ces problèmes permettent en effet de mettre en évidence, d'une part, des distinctions importantes dans les processus de preuve, et d'autre part, un changement de point de vue dans la résolution de problèmes, notamment à travers l'articulation du problème très présente entre le primal et son dual dans la résolution de problèmes d'optimisation discrète. Notons tout de même que les notions de condition nécessaire et de condition suffisante ne sont pas explicitement introduites dans les *curricula*, aussi bien en France qu'en Suisse, alors même qu'elles constituent des éléments fondamentaux pour la compréhension du raisonnement mathématique fondé sur l'implication logique d'une proposition (« si A, alors B »), sa réciproque (« si B, alors A ») et sa contraposée (« si non B, alors non A »), ainsi que sur les valeurs de vérité qui leur sont associées. En particulier, la réciproque ne possède pas nécessairement la même valeur de vérité que son implication, *a contrario* de sa contraposée. Pourtant, ces notions sont mobilisées de manière implicite à travers de nombreux contenus mathématiques, notamment en géométrie, en arithmétique ou en analyse : les théorèmes de Thalès et de Pythagore, leur réciproque et contraposée, certaines propriétés arithmétiques sur les entiers (p. ex. tout entier divisible par 3 est divisible par 9, *quid* de la réciproque ?), et des propriétés sur des suites numériques (p. ex. toute suite convergente est bornée alors que la réciproque est fausse), sont des exemples prototypiques dans l'enseignement mathématique, mais ne font toutefois que rarement l'objet d'un enseignement explicite sur l'essence même de la preuve. Cette absence contribue, selon nous, à renforcer une approche essentiellement opératoire et applicative de ces notions : si les élèves peuvent reconnaître en situation des schèmes explicites et des structures syntaxiques que l'enseignant ou l'enseignante à montrer, la dimension sémantique de la preuve et du raisonnement mathématique qu'il y a en toile de fond demeure tout de même, selon nous, largement sous-investie en classe de mathématiques et ne fait qu'accroître les difficultés des élèves et des étudiants dans les classes supérieures. Nous soulignons ainsi la nécessité, tant pour les formateur·rices que pour les enseignant·es, de reconnaître l'importance de travailler explicitement et d'institutionnaliser les connaissances mathématiques mobilisées en résolution de problèmes, et pas uniquement les notions (Da Ronch et al., 2025a). Une telle démarche contribue à la construction d'une culture commune et socialement partagée autour des savoirs mathématiques qui jusqu'ici étaient occultés ou transparents dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques durant la scolarité obligatoire.

Remerciements

Nous tenons à remercier les membres de *Maths à Modeler*, des IREM d'Aquitaine et de Grenoble qui se sont aussi intéressés à ce problème, en particulier : Emmanuel Beffara et Valentin Buat-Ménard (Beffara et Buat-Ménard, 2019 : présentation d'un atelier dans le cadre de la CORFEM), Alexandre Banché, Thomas Bellitto, Jérémy Blasselle, Tobias Castanet, Grégoire Charlot, Monique Decauwert, Rohan Fossé, Denise Grenier, Dimitri Lajou, Antonin Lentz, Rémi Molinier, Ismaïl Mili, Paul Ouvrard, Claire Perrot-Pennarun, Théo Pierron et Jason Schoeters.

Nous saluons tout particulièrement la contribution de Dimitri Lajou, dont l'intuition a permis de simplifier la preuve dans le cas de la grille 5×5 et de lui donner une forme plus élégante.

Nous associons à ces remerciements les élèves, les enseignants et enseignantes ainsi que les directions des établissements partenaires : le Collège Gérard Philipe (Pessac), le Lycée Jean Monnet (Blanquefort) et le Collège Paul Dangla (Agen) en France, ainsi que l'école primaire du Bouveret (Valais), les Cycles d'Orientation Cayla, Drize et l'Institut Florimont (Genève) en Suisse.

Mickael DA RONCH
Haute École Pédagogique du Valais (HEP-VS), Suisse
Maths à Modeler Suisse

Hervé HOCQUARD
Université de Bordeaux, France
Maths à Modeler Bordeaux

Références bibliographiques

Beffara, E., & Buat-Ménard, V. (2019). Empilement de jetons. *Actes du colloque de la CORFEM 2019*. XXVIe colloque CORFEM pour les professeurs et formateurs de mathématiques, Strasbourg, France.
https://www.univ-irem.fr/actes-du-colloque-corfem-2019

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Actes de l'UE de la Rochelle*, 91–118.

Da Ronch, M. (2022). *Pratique de l'activité mathématique en médiation : modèles didactiques et conception d'ingénieries*. [Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes].
https://theses.hal.science/tel-04089443v1

Da Ronch, M., Gandit, M., & Gravier, S. (2020). Du problème de Wang vers une nouvelle situation de recherche pour la classe. *Repères IREM, 121*, 77–105.
https://hal.science/hal-03030861v1

Da Ronch, M., Gardes, M.-L., & Mili, I. (2023). Study of the potential of problems to practice a research activity in mathematics at elementary school in French-speaking Switzerland. Dans P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi & E. Kónya (dir.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the ERME (CERME13)* (p. 96–103). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.
https://hal.science/hal-04408292v1

Da Ronch, M., Gandit, M., & Mili, I. (2025a). Modélisation des situations de recherche pour la formation professionnelle des enseignants. Dans C. Derouet, V. Durand-Guerrier, C. Lemrich & A.-C. Mathé (dir.), *Pré-actes du colloque international en hommage à l'œuvre de Guy Brousseau* (p. 204–208). Université de Bordeaux.
https://hal.science/hal-04975494

Da Ronch, M., & Hocquard, H. (2026). Problème d'optimisation combinatoire : empilements de jetons sur des grilles particulières. Soumis à la revue *Petit x.*
https://hal.science/hal-05446513

Da Ronch, M., Mili, I., & Ouvrier-Buffet, C. (2025b). Towards beliefs on proof in mathematics: A survey of future elementary school teachers in Switzerland. Accepted to *the sixth Conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2026)*, 5-19 juin 2026, Dubrovnik, Croatia.
https://hal.science/hal-05379849

Da Ronch, M., Mili, I., & Ouvrier-Buffet, C. (2026). A tool for identifying future primary school teachers' conceptions of proof. Accepté pour *the 49th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 2026)*, 27 juillet - 1er août 2026, Helsinki Finland.

https://hal.science/hal-05586702

Deloustal-Jorrand, V., Gandit, M., & Mesnil, Z. (2025). Spécificités des connaissances en logique et conséquence sur la double discontinuité de Klein. *Recherches en didactique des mathématiques, 45*(3), 239–269,

https://doi.org/10.46298/rdm.14819

Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ?. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9*(1), 45–82.

Gandit, M. (2008). *Étude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement. Une ingénierie de formation*. [Thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier-Grenoble I].

https://hal.science/tel-00398847v1

Gandit, M., Mossuz, L., & Gravier, S. (2022). L'enseignement et l'apprentissage de la preuve en mathématiques du cycle 1 au cycle 3 : premiers outils et premiers résultats. Dans *Représenter et modéliser en mathématiques. De l'activité des élèves à la formation des professeurs des écoles. 48e colloque de la COPIRELEM. Toulouse 2022* (p. 431–448). ARPEME ; COPIRELEM.

https://hal.science/hal-04818426v1

Gandit, M. (2024). « Chercher-débattre-prouver » à partir du cycle 1 : des résultats issus d'un LéA. Dans *Actes de la 22e école d'été de didactique des mathématiques*.

https://hal.science/hal-04819108/

Gravier, S., & Ouvrier-Buffet, C. (2022). The mathematical background of proving processes in discrete optimization - Exemplification with Research Situations for the Classroom. *ZDM - Mathematics Education, 54*(4), 925–940.

https://doi.org/10.1007/s11858-022-01400-3

Gravier, S., & Trouvé, T. (2025). Les variables de recherche : un outil pour transposer la dialectique particulier-général. Dans C. Derouet, V. Durand-Guerrier, C. Lemrich & A.-C. Mathé (dir.), *Pré-actes du colloque international en hommage à l'œuvre de Guy Brousseau* (p. 115–119). Université de Bordeaux.

https://hal.science/hal-04975494

Grenier, D., & Payan, C. (2003). Situations de recherche en classe : essais de caractérisation et proposition de modélisation. Dans V. Durand-Guerrier & C. Tisseron (dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2002* (p. 189–204). IREM Paris 7, ARDM.

Hersant, M. (2010). Empirisme et rationalité au cycle 3, vers la preuve en mathématiques. [HDR, Université de Nantes, Nantes].

https://hal.science/tel-01777604v1

Hocquard, H., & Da Ronch, M. (2026). Empilements de jetons sur une grille hexagonale. Soumis à la revue *Petit x*.

https://hal.science/hal-05585261

Lampert, D. E., & Slater, P. J. (1995). The ac-

quisition number of a graph. *Congressus Numerantium, 109*, 203–210.

MacDonald, L., Wenger, P. S., & Wright, S. (2014). The total acquisition number of the Cartesian product of paths. *Australasian Journal of Combinatorics, 60*(1), 114–130.

Mariotti, M. A., Durand-Guerrier, V., & Stylianides, G. J. (2018). Argumentation and proof. Dans T. Dreyfus et al. (dir.), *Developing research in mathematics education* (p. 75–89). Taylor & Francis.

Mili, I., Da Ronch, M., & Gardes, M.-L. (2025). Combining a theoretical framework and a statistical measure to assess the reliability of didactic criteria in the analysis of large corpora. Dans M. Bosch, G. Bolondi, S. Carreira, C. Spagnolo & M. Gaidoschik (dir.), *Proceedings of the Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME14)* (p. 2832–2839). Free University of Bozen-Bolzano and ERME.
https://hal.science/hal-05283880v1

Ouvrier-Buffet, C., Alvès, M., & Acker, C. (2017). La chasse à la bête - une situation recherche pour la classe. *Grand N, 100*, 5–31.

Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford University Press.

Thurston, W. P. (1995). On proof and progress in mathematics. *For the learning of mathematics, 15*(1), 29–37.

Références institutionnelles

Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP) (2023). *Domaines disciplinaires*.
https://portail.ciip.ch/per/domains/2 (consulté le 06/04/2026).

Ministère de l'Éducation Nationale et de la Jeunesse (MENJ). (2024). *Programme de mathématiques du cycle 2*.
https://www.education.gouv.fr/sites/default/files/document/Annexe%204%20%E2%80%93%20Programme%20de%20math%C3%A9matiques%20du%20cycle%202-403821.pdf (consulté le le 06/04/2026)

Rapport INSMI. (2025). *Résultats de la consultation citoyenne « Aux maths citoyennes, citoyens ! »*.
https://plmbox.math.cnrs.fr/f/379c5fc342594d16a297/

Villani, C., & Torossian, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*.