
PROBLÈME D'OPTIMISATION COMBINATOIRE : EMPILEMENTS DE JETONS SUR DES GRILLES PARTICULIÈRES

Mickael DA RONCH¹

Haute École pédagogique du Valais, Suisse
Maths à Modeler Suisse

Hervé HOCQUARD²

Université de Bordeaux
Maths à Modeler Aquitaine

Introduction

Dans cet article nous proposons deux variantes issues d'un problème de recherche en optimisation combinatoire. Initialement ce problème a été étudié dans le cas de la théorie des graphes sur des familles de graphes spécifiques issu du jeu d'acquisition (*Total Acquisition Game*), introduit par Lampert et Slater (1995). Plus exactement, on se place sur un graphe où chaque sommet porte initialement un jeton, on peut déplacer la totalité des jetons qui constituent une pile vers un sommet adjacent (c'est-à-dire relié par une arête) si et seulement si celui-ci contient déjà autant ou plus de jetons. Le but est de constituer un minimum X de piles tout en respectant la règle de déplacements. Plusieurs mathématiciens comme MacDonald, Wenger et Wright (2014) se sont intéressés à ce problème sur des classes de graphes particulières telles que les graphes grilles (produit cartésien de chemins). Leurs travaux ont permis d'obtenir des bornes sur le nombre minimum X de piles sur cette famille de graphes. En restant dans le même cadre que MacDonald, Wenger et Wright (2014), une étude récente a été menée dans de nombreuses classes du primaire et du secondaire autour d'un problème orienté, non plus sur des graphes grilles, mais sur des grilles rectangulaires et carrées discrètes, dans lequel seuls les déplacements sur des cases voisines partageant un côté commun étaient autorisés (Da Ronch & Hocquard, 2026 ; Beffara & Buat-Ménard, 2019). Des résultats sur des bandes avec une hauteur fixée, sur des grilles carrées et rectangulaires ont été établis, en simplifiant certaines preuves, et en prouvant un cas pathologique de la grille 5×5 pour laquelle le Théorème 1 n'est plus valide.

Théorème 1. *Sur une grille $n \times n$ ($n \geq 1$ et $n \neq 5$), le nombre minimum X de piles est d'exactlyment $\lceil \frac{n^2}{16} \rceil$.*

Théorème 2. *Sur une grille $q \times p$ ($q \neq p$ et $q, p \geq 7$), le nombre minimum X de piles est d'exactlyment $\lceil \frac{q \times p}{16} \rceil$.*

Remarque. Le Théorème 2 garantit que le nombre minimum X de piles correspond exactement à $\lceil \frac{q \times p}{16} \rceil$ pour $q, p \geq 7$. Pour les dimensions inférieures, ce nombre n'excède la borne théorique $\lceil \frac{q \times p}{16} \rceil$, que d'au plus une unité : soit $\lceil \frac{q \times p}{16} \rceil$, soit $\lceil \frac{q \times p}{16} \rceil + 1$. Il est toutefois crucial de noter que le cas des grilles $5 \times p$ constitue une exception à ce résultat. En effet, elles ne vérifient pas ces propriétés, nécessitant alors un nombre de piles supérieur à ces prévisions. Le lecteur ou la lectrice intéressé·e par ce problème, ses résultats et sa mise en œuvre à différents niveaux d'enseignement, du primaire

au secondaire voire au-delà, pourra retrouver une analyse épistémologique, mathématique et didactique dans Da Ronch et Hocquard (2026). En particulier, il ou elle trouvera des instances adaptées au niveau de classe des élèves, favorisant le développement de savoirs notionnels et de savoir-faire relatifs à l'activité mathématique émanant des processus d'expérimentation, de formulation et de validation constitutifs de toute activité de résolution de problèmes en mathématiques.

Problème d'empilements de jetons sur des grilles spécifiques

Ci-après nous proposons une extension du problème d'empilements sur des grilles rectangulaires et carrées à des grilles hexagonales et triangulaires de côté n (n entier naturel non nul). Ces deux problèmes s'énoncent ainsi.

Problème 1 sur des grilles hexagonales de côté $n \geq 1$

- **Instances** : étant donné une grille hexagonale de côté n (n entier non nul) et un jeton sur chacune des cases.
- **Question** : combien de piles peut-on faire au minimum avec ces jetons ?

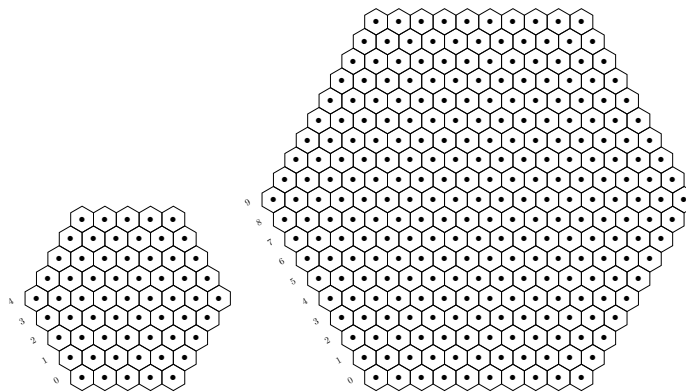


Figure 2 : Exemples de grilles hexagonales de côtés 5 et 10 avec un jeton (●) par case.

Problème 2 sur des grilles triangulaires de côté $n \geq 1$

- **Instances** : étant donné une grille triangulaire de côté n (n entier non nul) et un jeton sur chacune des cases.
- **Question** : combien de piles peut-on faire au minimum avec ces jetons ?

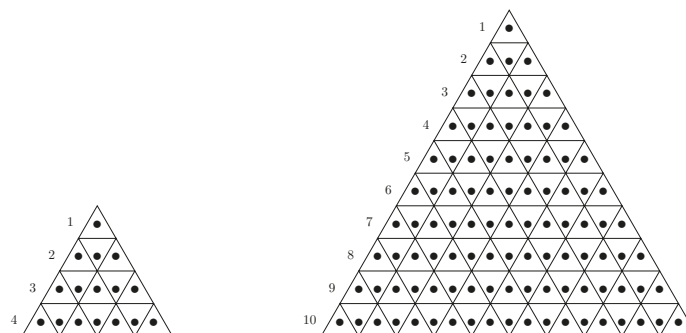


Figure 1 : Exemples de grilles triangulaires de côtés 4 et 10 avec un jeton (●) par case.

Remarque. Rappelons que l'on peut déplacer une pile P_1 de jetons présente sur une case vers une case voisine, si celle-ci contient une pile P_2 de taille supérieure ou égale : $|P_2| \geq |P_1|$. De plus, une pile est déplacée totalement et non partiellement. Enfin, on ne peut pas déplacer une pile vers une case vide (pile de taille 0).

Nous donnons ci-après deux fragments d'une grille hexagonale et triangulaire composés de piles de jetons de différentes tailles permettant de comprendre les déplacements autorisés (en noir) et interdits (en rouge).

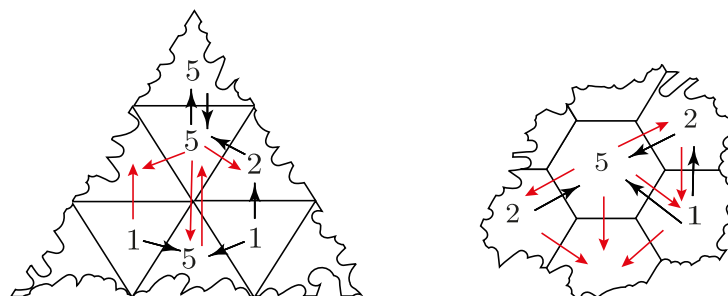


Figure 3 : Exemples de déplacements corrects et incorrects sur des fragments de grille triangulaire et hexagonale.

Références bibliographiques

- Beffara, E., & Buat-Ménard, V. (2019). Empilement de jetons. In Actes du XXVIème colloque CORFEM pour les professeurs et formateurs de mathématiques (Strasbourg, France). <https://www.univ-irem.fr/actes-du-colloque-corfem-2019>
- Da Ronch, M., & Hocquard, H. (2026). De l'expérimentation à la preuve en mathématiques : étude de cas d'une situation issue de la recherche en optimisation combinatoire. *Repère-IREM*. 143, 5–36. <https://hal.science/hal-05434743>
- Lampert, D. E., & Slater, P. J. (1995). The acquisition number of a graph. *Congressus Numerantium*, 109, 203–210.
- MacDonald, L., Wenger, P. S., & Wright, S. (2014). Total acquisition on grids. *Australasian Journal of Combinatorics*, 58(1), 137–156.