Conceptions et pratiques de l'activité mathématique des étudiants de première année en formation à l'enseignement primaire

HEP | PH FR

Mickael Da Ronch[1] & Ismaïl Mili[2]

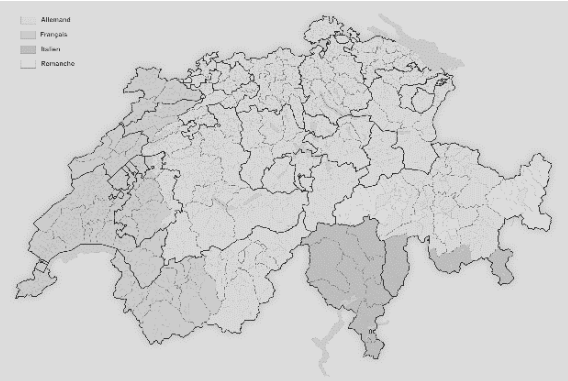
[1]Haute Ecole Pédagogique du Valais, 1890 Saint-Maurice, Suisse

[2]Haute Ecole Pédagogique de Fribourg, 1700 Fribourg, Suisse

HEPVS | PHVS
Haute école pédagogique du Valais
Pädagogische Hochschule Wallis

Réseau international francophone de recherche en éducation et formation,
2-5 juillet 2024, Fribourg, 2024.

Contexte Suisse Romand et Plan d'Etudes Romand (PER)



- Compétences cantonales
- Plan d'Etudes Romand (PER) qui met l'emphase sur la résolution de problèmes

C'est dans ces buts que le domaine choisit de développer la résolution de problèmes et la posture scientifique. Elles visent, toutes deux, à permettre aux élèves :

- d'acquérir un certain nombre de notions, de concepts et de modèles scientifiques développés progressivement par l'humanité et de réaliser la manière dont les savoirs scientifiques se sont construits ;
- d'identifier des questions, de développer progressivement la capacité de problématiser des situations, de mobiliser des outils et des démarches, de tirer des conclusions fondées sur des faits, notamment en vue de comprendre le monde naturel et de prendre des décisions à son propos, ainsi que de comprendre les changements qui sont apportés par l'activité humaine ;
- de se montrer capable d'évaluer des faits, de faire la distinction entre théories et observations, et d'estimer le degré de confiance que l'on peut avoir dans les explications proposées.

adéquat à la résolution des problèmes issus de ces disciplines. Elles promeuvent enfin une attitude de recherche par essai-erreur, généralisation, conjecture et validation. En cela, leur pratique développe des capacités d'imaginer des stratégies, d'organiser et de structurer des savoirs, de faire des liens entre les champs de connaissance, compétences porteuses d'un certain type de créativité.

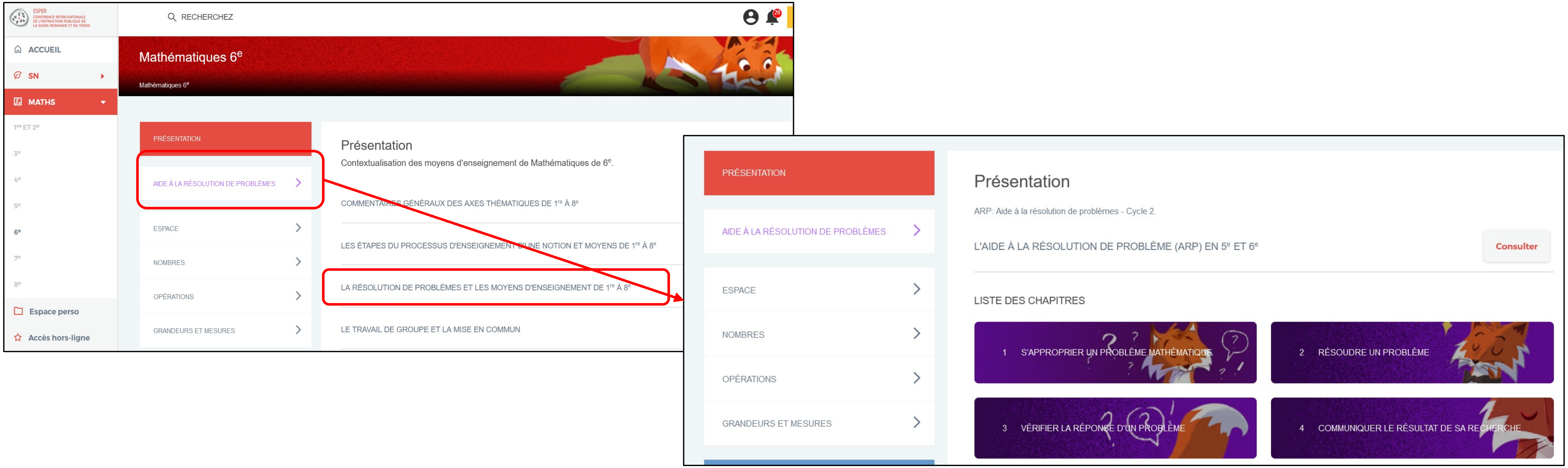
Vue globale du PER

Objectifs d'apprentissage

	Espace	Nombres	Opérations	Grandeurs et mesures	Modélisation
I	**MSN 11** Explorer l'espace	**MSN 12** Poser et résoudre des problèmes pour construire et structurer des représentations des nombres naturels	**MSN 13** Résoudre des problèmes additifs	**MSN 14** Comparer et sérier des grandeurs	**MSN 15** Représenter des phénomènes naturels, techniques ou des situations mathématiques
II	**MSN 21** Poser et résoudre des problèmes pour structurer le plan et l'espace	**MSN 22** Poser et résoudre des problèmes pour construire et structurer des représentations des nombres rationnels	**MSN 23** Résoudre des problèmes additifs et multiplicatifs	**MSN 24** Utiliser la mesure pour comparer des grandeurs	**MSN 25** Représenter des phénomènes naturels, techniques, sociaux ou des situations mathématiques
III	**MSN 31** Poser et résoudre des problèmes pour modéliser le plan et l'espace	**MSN 32** Poser et résoudre des problèmes pour construire et structurer des représentations des nombres réels	**MSN 33** Résoudre des problèmes numériques et algébriques	**MSN 34** Mobiliser la mesure pour comparer des grandeurs	**MSN 35** Modéliser des phénomènes naturels, techniques, sociaux ou des situations mathématiques

Moyens d'Enseignement Romands (MER) et Aide à la Résolution de Problèmes (ARP)

Création de Moyens d'Enseignement « compatibles » avec le PER, avec emphase sur la Résolution de Problèmes



Exemples d’énoncés d’ARP (7H – 11 ans)

A - F 1 Argent pour les vacances

Afficher correction

Lou part 6 semaines en vacances. Avant de partir, elle reçoit 20 francs de sa tante et ses parents lui donnent 5 francs d’argent de poche par semaine de vacances.

Avec cet argent, Lou n’achète qu’un tee-shirt à 23 francs et un stylo à 6 francs.

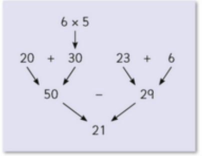
Combien d’argent lui reste-t-il à la fin des vacances ?

Afficher correction

A. $20 + 5 \times 6 - 23 - 6 = 21$ francs

B.
$5 \times 6 = 30$
$30 - 23 = 7$
$7 - 6 = 1$
$1 + 20 = 21$ francs

C.

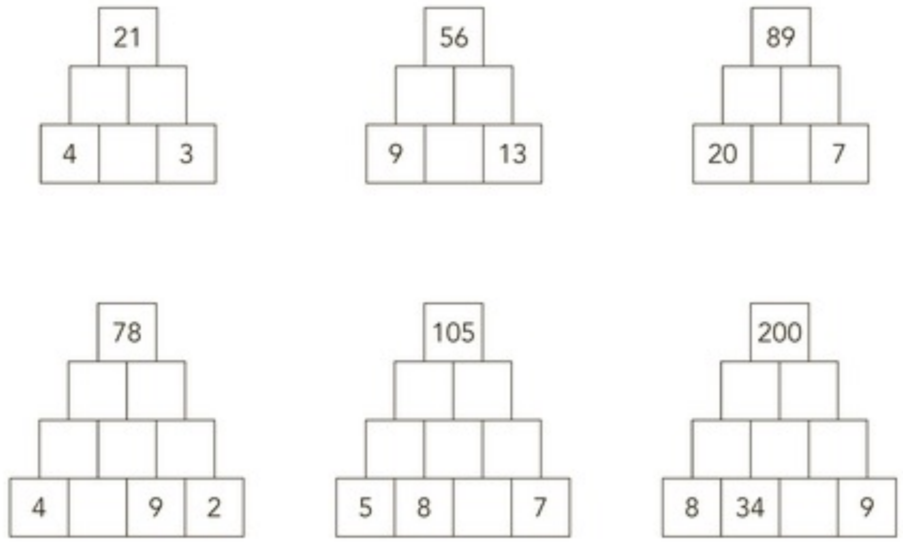


D. 21 francs

E.
Elle a : $6 \times 5 + 20 = 50$ francs
Elle dépense : $23 + 6 = 29$ francs
Il lui reste : $50 - 29 = 21$ francs

F.
Réponse : 21 francs
$50 - 29 = 21$

Complète les pyramides.



Analyse des MER et de l’Aide à la Résolution de Problèmes (ARP)

- Très peu de problèmes ne présentent une véritable consistance épistémologique permettant de générer des phases d'expérimentation, de formulation et de validation, pourtant requises par le PER.
- Aucun énoncé ne permet véritablement à l'enseignant de travailler la notion de conjecture. La validation est également généralement absente.
- Presque aucun problème ne présente de solutions multiples. Aucun ne discute de l’existence de solutions.
- Quasiment aucune ressource d'ARP ne répond aux attentes du PER (Da Ronch, Gardes et Mili, 2023; Da Ronch, Gardes et Mili, en cours).

Hypothèses découlant

- Les élèves ne sont jamais amenés à discuter de l'existence, de l'unicité ou de la pluralité des solutions, ni de la validité d'un raisonnement, ou de l’enjeu de vérité en mathématiques.
- Les étudiants, **futurs enseignants au primaire,** possèderaient une conception très scolaire de l’activité mathématique en classe, assez éloignée de l’activité du « mathématicien ».
- Cette conception pourrait aussi avoir un impact sur leurs pratiques des mathématiques en résolution de problèmes.

Activité mathématique : quel sens lui donner ?

L’activité mathématique invoque plusieurs processus concomitants aux dialectiques d’action, de formulation et de validation (Brousseau, 1998). Faire des mathématiques demande donc au sujet qu’il

« agisse, qu’il formule, qu’il prouve, qu’il construise des modèles, des langages, des concepts, des théories, qu’il échange avec d’autres, qu’il reconnaisse celles qui sont conformes à la culture, qu’il lui emprunte celles qui lui sont utiles, etc » (Brousseau, 1998, p. 49).

Activité mathématique – la formulation

L'étude de cas particuliers de petites tailles (réduction des dimensions du problème à la charge de l'élève – variables de recherche) devrait être mobilisée afin d'extraire des résultats locaux qui pourraient amener vers la formulation de résultats généralisables sur le problème.

La formulation d'un résultat – prouvé ou en l'état de conjecture – fait partie d'une autre connaissance qui devrait être convoquée en résolution de problèmes notamment lors du processus de formulation.

Activité mathématique – la validation

Le processus de validation, quant à lui, inhérent au processus de preuve, repose sur des hypothèses fortes liées, par exemple, au tiers-exclu , à la nécessité de preuve et à l’enjeu de vérité en mathématiques.

Les connaissances mobilisées dans le processus de validation lorsqu’on réalise une preuve sont donc liées à des hypothèses et aux règles de la logique mathématique telles que l’implication, la condition nécessaire et la condition suffisante (Da Ronch, 2022).

Les niveaux de preuve

Afin de repérer le caractère pragmatique ou intellectuel des preuves données par les étudiants, nous utiliserons les niveaux de preuve décrits par Balacheff (1987) :

- Les preuves pragmatiques de types *empirisme naïf*, *expérience cruciale* ou *exemple générique* qui ne se détachent pas (ou peu) de l'action
- Les preuves intellectuelles de types *expérience mentale* ou *calcul sur les énoncés* (pour plus de détails voir Balacheff, 1987 ; 1988 ; 2019)

Notion de « problème »

Les processus d’action, de formulation et de validation et leurs connaissances associées ne peuvent se mobiliser qu’à travers la rencontre avec un problème et la nécessité éprouvée de le résoudre pour celui qui compte l’investiguer.

Nous reprenons la définition donnée par Da Ronch (2022) sur le terme de « problème » défini selon un double aspect :

- syntaxique, relevant de la structure du problème sous la forme d’une question générale et d’un ensemble d’instances;
- sémantique, en rapport avec sa consistance épistémologique.

Les Situations de Recherche pour la Classe

- Choix d'une Situation de Recherche pour la Classe (Grenier et Payan, 2003) pour favoriser la dévolution et les savoirs/savoir-faire relatifs à l'activité mathématique en lien avec le PER
- Une SiRC est caractérisée d'après Grenier et Payan (2003) par :
  - Une problématique de recherche mathématique professionnelle
  - Une question initiale facile d'accès
  - Des stratégies initiales existent, sans que soient indispensables des prérequis spécifiques
  - Plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche et plusieurs développements sont possibles
  - Une question résolue renvoie très souvent à une nouvelle question
  - Des variables de recherche existent, elles pourraient être des variables didactiques— à la charge de l'enseignant —, mais dans ce cas-ci elles sont à la charge de l'élève

Questions de recherche

- Est-ce que les étudiants – futurs enseignants du primaire – en entrée de formation ont une conception de l'activité mathématique scolaire ou plutôt orientée vers celle du chercheur en mathématiques ?
- Les étudiants associent-ils un problème (de nature non numérique) permettant de travailler l'activité mathématique suivant toutes ces composantes comme étant un problème représentatif d'une telle activité ?
- Est-ce que les étudiants, – futurs enseignants du primaire –, en entrée de formation ont une pratique de l'activité mathématique en résolution de problèmes qui s'oriente vers un besoin d'expérimenter, de formuler ensuite, puis de finalement valider leurs résultats grâce à l'élaboration d'une preuve ? Le cas échéant, quels seraient les niveaux de validation mobilisés par ces étudiants ?

Recueil des données : questionnaire

Un questionnaire ; trois «questions» ; 84 étudiants en 2021

- Deux situations :
  - Une première relative à un savoir curriculaire, à une notion spécifique vue au cours de la scolarité (proportionnalité)
  - Une seconde, tirée d'une SiRC, qui permet de travailler l'activité mathématique selon ses trois composantes : pavage avec des tuiles de Wang (Da Ronch, 2022; Da Ronch et al., 2020).
- Une question finale : « Parmi les deux situations, laquelle, selon vous, représente le plus ce qui relève de l'activité mathématique ? Pourquoi ?»

Questionnaire

Question 1 Répondre à chacune des questions suivantes (qui fait référence à une situation de proportionnalité), tout en justifiant votre démarche

a. Sachant que 2 pains coûtent 5 francs, combien coûtent 20 pains ?
b. Sachant que 4 pains coûtent 10 francs, combien coûtent 12 pains ?
c. Sachant que 4 pains coûtent 10 francs, combien coûtent 32 pains ?
d. Sachant que 4 pains coûtent 10 francs, combien coûtent 14 pains ?
e. Sachant que 4 pains coûtent 7,70 francs, combien coûtent 14 pains ?

A. 2 → 5.-
20 → 50.-

Nombre de Pains	2	20
Francs Suisse	5	50

×10

B.
C.
D.

Nombre de Pains	4	12	32	14	2
Francs Suisse	10	30	80	35	5

×3 ×3 ×16 ×16 ×3 ×3 ×10 :2

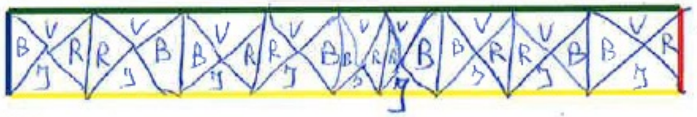
Question 2 On dispose d'une collection de tuiles carrées en quantité suffisante où chaque tuile est partagée en **4 secteurs triangulaires colorés** : jaune, rouge, vert, bleu. Il est tout à fait possible de modifier l'ordre des couleurs sur les tuiles, l'essentiel étant qu'il y ait toujours les 4 couleurs différentes sur chacune des tuiles. ✓

Exemple d'une tuile avec la couleur bleue à gauche, rouge en bas, jaune à droite et verte en haut.

On peut assembler ces tuiles à condition **d'avoir la même couleur sur le bord en commun**. ✗

Motif valide Motif non valide

Votre objectif est de trouver une condition pour pouvoir remplir une bande rectangulaire de la hauteur d'une tuile et d'une longueur quelconque, sachant qu'en plus de la contrainte précédente, on doit poser les tuiles de telle sorte que le rectangle pavé possède **quatre côtés monochromes et d'une couleur différente comme ci-dessous**.



Sous quelle condition une telle bande peut-elle être construite ? Justifiez votre démarche.

Il y a toujours :  peu importe l'ordre
Première condition: il faut que chaque tuile ait

Traitement et analyse des données (Q2)

- Etude des composantes relatives à l'expérimentation (resp. la formulation, resp. la validation) dans les productions des étudiants.
- Double codage à l'aveugle et calcul du coefficient de Kappa-Cohen

Composante relative à l'expérimentation				
Catégorie	++	+	–	Ø
Indicateur	Plus de 2 cas particuliers sont traités avec une parité différente	2 cas particuliers sont traités avec une parité différente	Un cas particulier et traité ou 2 cas avec la même parité	Aucun cas particulier n'est traité
Composante relative à la formulation				
Catégorie	++	+	–	Ø
Indicateur	Formulation complète d'un résultat général (prouvé ou en l'état de conjecture) (SSI relatif à la CNS)	Formulation partielle d'un résultat général (prouvé ou en l'état de conjecture) (SI ALORS relatif à la CS ou CN)	Formulation incomplète ou erronée d'un résultat non général (prouvé ou en l'état de conjecture)	Aucune formulation de généralisation n'est explicitée
Composante relative à la validation				
Catégorie	++	+	–	Ø
Indicateur	Preuve intellectuelle – expérience mentale ou calcul sur les énoncés	Preuve pramatique – exemple générique ou expérience cruciale	Preuve pragmatique – empirisme naïf	Absence de trace de preuve

Résultats

Conceptions des étudiants sur l’activité mathématique (Q3)

	Situation Q1	Situation Q2	Situations Q1 et Q2
Proportion d’étudiants	45/84	10/84	29/84
Pourcentage (arrondi à l’unité)	54%	12%	35%

Deux profils d’étudiants apparaissent.

- ***L’étudiant-scolaire***, qui a une conception de l’activité mathématique très procédurale en lien étroit avec un savoir précis vu au cours de la scolarité.

  « La première, car selon moi, le calcul et les problèmes sont plus importants que la logique dans les mathématiques. De plus le premier exercice reprend beaucoup plus de thèmes mathématiques que le deuxième. »

  « Je trouve que la 1ère activité représente bien les mathématiques. Nous avons dû faire différents calculs tandis que le 2e exercice était basé sur notre réflexion. »

- ***L’étudiant-chercheur***, qui, quant à lui, a une vision moins cloisonnée et plus proche de l’acception qu’on retrouve de l’activité mathématique dans la recherche.

  « La première étant très basée sur le calcul, je considère qu’elle représente les mathématiques scolaires. Pour moi les mathématiques sont beaucoup plus que juste faire des calculs, elles doivent pousser à un raisonnement, ce raisonnement peut amener à résoudre des solutions (ou pas) [...] permettant d’appréhender le monde en développant notre réflexion. »

- Le premier profil (*l’étudiant-scolaire*) ressort largement majoritaire dans notre étude.

Résultats

Pratique de l’activité mathématique des étudiants (Q2)

- Composante liée à *l’expérimentation* présente chez la majorité des étudiants(75 étudiants sont entrés significativement dans ce processus en traitant au moins deux cas particuliers avec une parité différente).
- Pour la *formulation*, la majorité des étudiants évoquent explicitement un résultat général sur le problème, prouvé ou en l’état de conjecture
  - 11 étudiants ont formulé correctement la condition nécessaire et suffisante sous la forme d’une équivalence dans le cas général ;
  - 37 ont uniquement donné une condition nécessaire ou suffisante sous la forme de « SI ALORS », répondant ainsi partiellement au problème.
  - 30 étudiants semblent avoir formulé un résultat local, incomplet ou erroné sans généralisation mentionnée.

Résultats

Pratique de l’activité mathématique des étudiants (Q2)

La majorité des étudiants ne sont pas réellement entrés dans la phase de validation attendue, sans production de preuve, ou alors des preuves s’apparentant à des preuves de nature pragmatique et non des preuves intellectuelles :

- 79 étudiants ont produit des preuves pragmatiques ou n’en ont donné aucune (absence de preuve chez près de 20 étudiants).
- Les preuves pragmatiques relèvent principalement de l’expérience cruciale et de l’empirisme naïf pour beaucoup d’entre eux (près de 25 étudiants).
- Seuls 5 étudiants sont sortis du pragmatisme pour entrer dans la preuve intellectuelle en intériorisant l’action et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier, avec des règles mathématiques identifiables.

Conclusion et perspectives

- La majorité des étudiants éprouvent **des difficultés à en entrer dans la preuve en se détachant de l'exemple**. Beaucoup traitent des cas particuliers comme preuve de généralisation.
- La **formulation** d'un résultat général (prouvé ou en l'état de conjecture) est très souvent **partielle** et seule la condition nécessaire ou suffisante est mentionnée, sans se préoccuper de la réciproque et donc sans évoquer l'équivalence recherchée.
- Nécessité d'un **dispositif de formation autour d'ateliers centrés sur la résolution de problèmes** par des Situations de Recherche pour la Classe (Da Ronch & Mili, 2024). Ceci pour faire évoluer les conceptions et les pratiques de l'activité mathématique en classe.
- Dispositif construit sur une **stratégie de formation basée sur l'homologie** (Houdement & Kuzniak, 1996), avec le souhait que les étudiants utilisent ce qu'ils ont vécu à travers ce dispositif dans leurs pratiques de classe ordinaire.
- Besoin **d'objectiver** (par les étudiants) et **d'institutionnaliser** (par le formateur), les savoirs et savoir-faire d'ordre mathématique en jeu, mais aussi de les **rattacher au curriculum prescrit** en Suisse romande (PER).
- Futur **questionnaire sur la preuve** dans une **perspective internationale** (Ouvrier-Buffet, 2023a; Ouvrier-Buffet, 2023b).

Références

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation (Proving Processes and Situations for Validation). Educational studies in mathematics, 147–176. https://doi.org/10.1007/BF00314724

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège* (Doctoral dissertation, Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG; Université Joseph-Fourier-Grenoble I). https://theses.hal.science/tel-00326426/

Balacheff, N. (2019). L'argumentation mathématique, précurseur problématique de la démonstration. *Actes du XXVIe Colloque de la CORFEM*. https://hal.science/hal-02981131/

Bronner, A., Bellard, N., Girmens, Y., Larguier, M., Pellequer, S., Roche, M., Seco, M. & Vergne, C. (2003). Faire ou ne pas faire des mathématiques, des outils d'étude, exemple dans le cas de l'étude du signe du binôme. *Coulomb; J, Douaire & R, Noirfalise (Eds). Faire des maths en classe.*

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques. La pensée Sauvage: Grenoble.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Actes de l'UE de la Rochelle*, pp. 91–118.

Cohen, J. (1960). A Coefficient of Agreement for Nominal Scales. *Educational and Psychological Measurement, 20(1),* 37–46. https://doi.org/10.1177/001316446002000104

Da Ronch, M., Gandit, M., & Gravier, S. (2020). Du problème de Wang vers une nouvelle situation de recherche pour la classe. *Repères IREM*, 121, 77–105.

Da Ronch, M. (2022). *Pratique de l'activité mathématique en médiation: modèles didactiques et conception d'ingénieries* (Doctoral dissertation, Université Grenoble Alpes [2020-....]). https://cnrs.hal.science/tel-04089443/.

Da Ronch, M., Gardes, M-L., & Mili, I. (2023). Study of the potential of problems to practice a research activity in mathematics at elementary school in French-speaking Switzerland. *In Drijvers, P., Csapodi, C., Palmér, H., Gosztonyi, K., & Kónya, E. (Eds.). Proceedings of the Thirteenth Congress of the ERME (CERME13)* (pp. 96–103). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME. https://hal.science/hal-04408292v1.

Da Ronch, M., & Mili, I. (2024). Savoirs professionnels de l'enseignant et Situation de Recherche pour la Classe dans un dispositif de formation du primaire. *Actes de la COPIRELEM 2024 (en préparation).* Juin 2024, Bonneuil sur Marne, France. https://hal.science/hal-04601848v1

Grenier, D., & Payan, C. (2003). Situations de recherche en "classe", essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Cahiers du Séminaire National de Didactique des Mathématiques.*

Halmos, P. (1980). The heart of mathematics. *American Mathematical Monthly*, *87*, 519–524. https://doi.org/10.2307/2321415

Houdement, C., & Kuzniak, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 16(3)*, 289–322.

Landis, J. R., & Koch, G. G. (1977). The Measurement of Observer Agreement for Categorical Data. *Biometrics, 33(1)*, 159–174. https://doi.org/10.2307/2529310

Nimier, J. (1989*). Entretiens avec des mathématiciens : A. Lichnérowicz, C. Berge,A. Joyal, N. Kuiper, B. Malgrange, C. Pisot, J. Riguet, R. Thom : (l'heuristique mathématique).* Institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques, Lyon.

Ouvrier-Buffet, C. (2023a). Exploring students' conceptions of proof in high-school and university: A proposal for collaborations in Europe. *In Drijvers, P., Csapodi, C., Palmér, H., Gosztonyi, K., & Kónya, E. (Eds.). Proceedings of the Thirteenth Congress of the ERME (CERME13)* (pp. 240–247). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME. https://hal.science/hal-04410988v1

Ouvrier-Buffet, C. (2023b). Questionnaire pour identifier les conceptions des étudiants sur la preuve en mathématiques. https://hal.science/hal-03987587v2

Perrin, D. (2007). L'expérimentation en mathématiques. *Petit x*, 73(6), 6–34.

Pólya, G. (1945). How to solve It. Princeton NJ.