HAL open science

Pratique de l'activité mathématique en médiation : modèles didactiques et conception d'ingénieries

Mickaël da Ronch

▶ To cite this version:

Mickaël da Ronch. Pratique de l'activité mathématique en médiation : modèles didactiques et conception d'ingénieries. Mathématiques générales [math.GM]. Université Grenoble Alpes [2020-..], 2022. Français. NNT : 2022GRALM051 . tel-04089443

HAL Id: tel-04089443
https://theses.hal.science/tel-04089443

Submitted on 4 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

École doctorale : MSTII - Mathématiques, Sciences et technologies de l'information, Informatique
Spécialité : Mathématiques Appliquées
Unité de recherche : Institut Fourier

Pratique de l'activité mathématique en médiation : modèles didactiques et conception d'ingénieries

Practice of mathematical activity in mediation: didactic models and engineering design

Présentée par :

Mickael DA RONCH

Direction de thèse :

Sylvain GRAVIER Directeur de recherche, Université Grenoble Alpes	Directeur de thèse
Michèle GANDIT Université Grenoble-Alpes	Co-encadrante de thèse

Rapporteurs :

GHISLAINE GUEUDET
Professeur des Universités, UNIVERSITE PARIS- SACLAY
CHRISTIAN MERCAT
Professeur des Universités, UNIVERSITE LYON 1 - CLAUDE BERNARD

Thèse soutenue publiquement le **19 décembre 2022**, devant le jury composé de :

SYLVAIN GRAVIER Directeur de recherche, CNRS DELEGATION ALPES	Directeur de thèse
GHISLAINE GUEUDET Professeur des Universités, UNIVERSITE PARIS- SACLAY	Rapporteure
JERÔME PROULX Professeur, Université du Québec à Montréal	Examinateur
MARIE-LINE GARDES Professeur, HEP Vaud	Présidente
GREGOIRE CHARLOT Maître de conférences HDR, UNIVERSITE GRENOBLE ALPES	Examinateur
VIVIANE DURAND-GUERRIER Professeur des Universités émérite, UNIVERSITE DE MONTPELLIER	Examinatrice

Invités :

MICHELE GANDIT
Professeur Agrégé, UNIVERSITE GRENOBLE ALPES

Mots clés : activité mathématique, analyse didactique, analyse épistémologique, ingénierie didactique, problème de pavage de wang, résolution de problème, situation de recherche, traitement et analyse de données

Keywords: mathematical activity, didactic analysis, epistemological analysis, didactic engineering, domino problem, problem solving, research situation, data processing and analysis

Résumé

Dans cette thèse nous montrons l'écart entre le discours de société, formulé par une stratégie nationale de culture scientifique, et l'existant dans les associations ou centres de culture scientifique. Le premier prône la démocratisation de la démarche scientifique alors qu'elle est concrètement absente dans ces institutions de diffusion. Notre étude écologique montre en effet que les ressources proposées dans ces institutions n'ont pas le potentiel mathématique, pour des raisons épistémologiques et didactiques, à faire entrer le public dans l'activité mathématique. À partir de ce constat, nous développons deux modèles didactiques. L'un permet de concevoir (et d'évaluer) des ingénieries didactiques de la pratique mathématique donnant des conditions d'abord épistémologiques, ensuite didactiques et enfin ergonomiques. L'autre propose une méthode de traitement et d'analyse de données audiovisuelles permettant de repérer les traces d'activité mathématique d'individus placés en résolution de problème. À cette occasion, nous avons développé des ingénieries didactiques selon ce premier modèle, s'appuyant sur l'étude épistémologique, mathématique et didactique d'un problème de recherche, en mathématiques discrètes, le problème de pavage de Wang. Cette étude a permis d'élaborer plusieurs situations didactiques qui ont été ensuite proposées lors d'expérimentations dans des conditions cliniques proches du réel : individus volontaires, institutions de culture scientifique, autonomie et responsabilité scientifique des individus, absence de médiateur, temps alloué suffisant... Les résultats de notre étude, s'appuyant sur notre second modèle, montrent l'existence de traces d'activité mathématique d'individus permettant d'inférer qu'une telle pratique est possible dans ces conditions. Ainsi, ces résultats confortent le fait que nos ingénieries proposent des conditions enclines à combler la carence constatée dans certains espaces de médiation, tout en étant en adéquation avec le discours de la noosphère. Enfin, notre modèle de traitement et d'analyse semble offrir des perspectives intéressantes dans le domaine de l'intelligence artificielle, car cela permettrait un recueil de données important pour un nombre conséquent d'utilisateurs et sur une durée potentiellement élevée.

Abstract

In this thesis we show the gap between the discourse of society, formulated by a national strategy of scientific culture, and what exists in the associations or centres of scientific culture. The former advocates the democratisation of the scientific process, whereas it is concretely absent in these dissemination institutions. Our ecological study shows that the resources proposed in these institutions do not have the mathematical potential, for epistemological and didactic reasons, to bring the public into the mathematical activity. Based on this observation, we develop two didactic models. One allows the design (and evaluation) of didactic engineering of mathematical practice, providing first epistemological, then didactic and finally ergonomic conditions. The other proposes a method of processing and analysing audiovisual data to identify the traces of mathematical activity of individuals placed in problem solving. On this occasion, we developed didactic engineering according to this first model, based on the epistemological, mathematical and didactic study of a research problem in discrete mathematics, the Domino Problem. This study allowed the elaboration of several didactic situations which were then proposed during experiments in clinical conditions close to reality: voluntary individuals, institutions of scientific culture, autonomy and scientific responsibility of the individuals, absence of mediator, sufficient allocated time... The results of our study, based on our second model, show the existence of traces of mathematical activity of individuals allowing to infer that such a practice is possible in these conditions. Thus, these results support the fact that our engineering designs propose conditions that are likely to fill the gap observed in certain mediation spaces, while being in line with the discourse of learned societies (noosphere). Finally, our processing and analysis model seems to offer interesting perspectives in the field of artificial intelligence, as it would allow the collection of important data for a significant number of users and over a potentially high duration.

Remerciements

Après presque quatre années de travail sur ce projet de thèse, il est temps pour moi de remercier toutes celles et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réussite de ce travail.

Mes premiers remerciements vont à mes deux directeurs, Sylvain Gravier et Michèle Gandit, qui m'ont soutenu tout au long de ce travail de thèse. Michèle et Sylvain m'ont laissé une grande autonomie tout en sachant recadrer mon travail lorsque mes idées s'éparpillaient. Les nombreuses discussions, souvent sous forme de débats passionnants, ont permis de nourrir mes réflexions durant toutes ces années, qui ont été pour ma part d'une grande richesse tant sur le plan humain qu'intellectuel. Ainsi, ce travail et mon évolution dans la recherche doivent beaucoup à leurs idées et à leurs complémentarités. Je tenais aussi à les remercier pour leur écoute, leur bienveillance et leur soutien surtout durant les périodes difficiles que j'ai pu traversées. Enfin, merci à eux pour tous les moments de joie et de rigolade partagés autour de bons repas, concoctés avec soin, par le chef Gravier [1]. Merci pour tout !

Je remercie également Marie-Line Gardes, Professeure ordinaire à la Haute École Pédagogique du canton de Vaud (Suisse), d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse. À présent, j'espère avoir le plaisir de poursuivre les échanges et de collaborer avec toi autour de recherches communes.

Merci à Ghislaine Gueudet, Professeure des universités à l'Université Paris-Saclay et Christian Mercat, Professeur des universités à l'Université Claude Bernard Lyon 1, d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je vous remercie pour la qualité de vos rapports, vos retours détaillés me seront d'une aide précieuse et me permettront sans aucun doute d'enrichir mes réflexions dans mes travaux futurs.

Merci aussi à Grégoire Charlot, Maître de conférences HDR à l'Université Grenoble Alpes, d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse en tant qu'examinateur. Un grand merci pour nos différents échanges durant ces années universitaires à Grenoble.

Merci à Viviane Durand-Guerrier, Professeure des universités émérite de

1. D'ailleurs, je pense que tu aurais toutes tes chances dans « top chef ».

l'Université de Montpellier, d'avoir accepté de participer au jury en tant qu'examinatrice de cette thèse. Viviane, je te remercie pour les échanges que nous avons eus qui ont contribué à nourrir mes réflexions dans et en dehors de cette thèse.

Merci également à Jérôme Proulx, Professeur à l'Université du Québec à Montréal, d'avoir accepté d'être examinateur de cette recherche. Jérôme, je garde un excellent souvenir de nos échanges lors du colloque de l'Espace Mathématique Francophone 2018 à Paris. J'espère avoir le plaisir, dans un futur proche, d'échanger à nouveau autour de thématiques communes. Je te remercie aussi pour toutes les pistes de recherche envisagées dont tu m'as fait part à la lecture de mon manuscrit. Cela alimentera sans aucun doute mes réflexions futures.

Je tiens également à remercier tous les membres de l'Institut Fourier, personnel administratif et technique ainsi que les enseignants et chercheurs, pour leur accueil et leur disponibilité durant mes années de thèse, mes remerciements vont plus spécialement aux membres du thème Combinatoire et Didactique. Je remercie aussi plus largement les membres de l'équipe Maths à Modeler pour le chaleureux accueil qu'ils m'ont témoigné, mais je tiens aussi à remercier cette structure pour la participation financière à mes déplacements en colloques, séminaires... Mes remerciements vont aussi à Laurence Bolliet qui s'est occupée de la gestion de ces déplacements. Merci à vous.

Merci aussi à mes anciens collègues d'Olympique pour leur soutien durant mes premières années de thèse. À cette occasion, je tiens à dire un grand merci à la direction, au personnel administratif et technique, à l'équipe de mathématiques, ainsi qu'à tous les élèves que j'ai pu voir évoluer durant mes années passées là-bas. Merci Olympique.

Je tenais également à remercier tous les collaborateurs et collaboratrices de la Haute École Pédagogique du Valais (HEPVS), direction, personnel administratif et technique, enseignants, formateurs et chercheurs qui m'ont accordé leur confiance et leur soutien depuis ma prise de fonction. Changer de pays et d'institution en cours de thèse n'est pas chose évidente, de surcroît en pleine pandémie... mais les différentes rencontres et discussions ont permis de faciliter cette transition. Merci aussi à celles et ceux qui m'ont encouragé dans mes derniers moments de rédaction. Je suis convaincu que l'après thèse me permettra de développer, avec vous, d'autres projets tout aussi stimulants.

Plus largement, merci aussi à l'ensemble du groupe romand des formateurs et formatrices en didactique des mathématiques pour leur accueil chaleureux.

Une mention spéciale à Julie Juvignot que je remercie du fond du cœur pour son accueil et son aide précieuse lors de mon installation en Suisse. Julie, ta gentillesse, ta disponibilité, ton écoute et ton soutien ont facilité grandement mon installation. Merci aussi pour tous ces moments de discussions et de rigolades qui

nous ont conduits, parfois, à des échanges complètement « croquignolesques » (mot qui nous a d'ailleurs bien fait marrer). Pour tout cela, je te remercie et te souhaite, bien entendu, le meilleur pour la suite.

Merci encore à toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration de cette thèse, en particulier les familles qui ont expérimenté notre dispositif, mais aussi le personnel des centres de culture scientifique qui nous ont accueillis en cette période sanitaire complexe que ce soit aux Clévos, Cité des savoirs ou aux médiathèques de Savasse et Malataverne. À cette occasion, je souhaiterais remercier particulièrement Marion, médiatrice scientifique et assistante de projets culturels ainsi que Sylvain pour m'avoir aidé dans l'organisation de ces évènements et dans l'élaboration du matériel. Enfin, merci une nouvelle fois à Maths à Modeler qui a permis de financer l'impression de ce matériel, sans cela et sans toutes ces personnes, les expérimentations n'auraient pas vu le jour. Merci à vous.

Je remercie également les membres de l'IREM de Grenoble et en particulier le groupe « Raisonnement, logique, Situations de recherche pour la classe » qui m'ont témoigné leur soutien et avec lequel j'ai énormément apprécié la collaboration même si elle a été de courte durée à cause de mon déménagement. J'espère pouvoir à l'avenir continuer à contribuer, de près ou de loin, aux réflexions du groupe.

À cette occasion, je tenais particulièrement à remercier Denise Grenier pour les nombreux échanges qui ont touché, de près ou de loin, ce travail de thèse. Mille mercis pour le don d'une grande partie de sa bibliothèque car cela m'a facilité l'accès à la littérature scientifique durant mes recherches et servira, sans aucun doute, dans la suite de ma carrière. Un grand merci Denise pour tout cela.

Par ailleurs, je tenais à témoigner toute ma gratitude aux membres de l'ARDM pour leur accueil chaleureux durant les nombreux évènements scientifiques auxquels j'ai participé. Un grand merci spécialement au groupe des jeunes chercheurs et jeunes chercheuses avec lequel j'ai eu l'occasion d'échanger et de collaborer à de nombreuses reprises, d'abord dans l'organisation du WEJCH 2020, ensuite dans la création et l'organisation d'un séminaire virtuel à destination des jeunes chercheurs (SVJC 2021), dans l'organisation des plages à destination du groupe lors de l'École d'Été de Didactique des Mathématiques en 2021, et enfin durant mon rôle de coordinateur de ce groupe cette même année.

Merci aussi aux membres des différents comités, scientifique et d'organisation, avec lesquels j'ai collaboré dans l'organisation d'évènements scientifiques comme la COPIRELEM 2021, la 21e École d'Été de didactique des mathématiques 2021 et enfin lors de la première École Thématique du CNRS DEMIMES 2022.

Ma gratitude va aussi aux membres du GDR DEMIPS pour leur accueil chaleureux dans la communauté et les échanges constructifs qui ont accentué

mon goût pour la recherche.

Une pensée également à mes anciens professeurs du Lycée des Eaux Claires qui m'ont donné le goût pour les mathématiques. Merci à Mme Brugière, Mme Fontaine et mon professeur de spé. maths en terminale, M. Bayari. Merci également à M. Vuillot qui a su avoir les mots justes car c'est aussi grâce à lui que j'en suis là aujourd'hui. Une pensée aussi à mon ancienne camarade de classe Camille C. avec qui j'ai réellement pris du plaisir à faire des maths.

Je n'oublie pas mes amis de toujours, Davy, Ali et Philippe qui ont partagé mes incertitudes et mon manque de disponibilité ces dernières années. Merci pour votre soutien, vos encouragements, votre compréhension et de répondre présents en toute circonstance... J'espère que nous aurons, très prochainement, l'occasion de nous retrouver et de partager de « chouettes » moments ensemble. Merci à vous.

Une mention particulière à Davy « la croquette » pour son amitié sans faille et pour son aide dans mon évolution personnelle. C'est aussi grâce à toi que j'en suis là aujourd'hui, mille mercis « frangin ».

Je remercie aussi Iman pour sa compréhension et son soutien durant ces derniers mois de thèse. Cela m'a permis d'avancer plus sereinement. Un grand merci.

Mes remerciements vont également à toutes les personnes qui ont traversé ma vie durant cette période et qui m'ont témoigné, de près ou de loin, de leur soutien. Merci également à ceux qui n'ont pas cru en moi, car c'est aussi vous qui m'avez donné la force de me dépasser.

Enfin, je clôture ce chapitre des remerciements par les personnes qui me sont les plus chères, ma famille et en particulier ma mère, ma grand-mère, mon fils et mon grand-père disparu (j'espère que de là-haut tu es fier de moi). Je leur dois énormément, si je suis arrivé jusque là c'est aussi en partie grâce à eux car ils m'ont toujours soutenu du mieux qu'ils le pouvaient, et ce malgré les nombreuses difficultés de la vie. L'amour qu'ils m'ont témoigné, l'éducation qu'ils m'ont donnée à travers le goût de l'effort et le travail bien fait m'ont permis d'en arriver ici. Pour tout cela je les remercie du plus profond de moi. Merci aussi à mon fils qui a été plus que compréhensif durant cette période intense et stressante. En outre, je ne pourrais pas clôturer mes remerciements sans y mentionner explicitement ma mère qui a été d'un grand soutien tout au long de ma vie et en particulier durant ce travail de thèse. Un énorme merci pour avoir relu l'intégralité du manuscrit à la recherche de coquilles, mais aussi pour m'avoir aidé dans la transcription des nombreux entretiens audio réalisés dans le cadre de cette thèse, mille mercis.

Je dédie cette thèse à mon grand-père, Louis Da Ronch.

Sommaire

Résumé v

Remerciements vii

Sommaire xv

Listes des symboles et des abréviations xxi

Liste des problèmes xxv

Liste des tableaux xxix

Table des figures xxxi

Ancrages théoriques et méthodologiques, problématique et questions de recherche 1

I Introduction 3
1 Contexte de la recherche et préoccupations 3
2 Faire des mathématiques dans les institutions de culture scientifique : utopie ou réalité ? 3

II Définition de l'objet d'étude 7
1 Approche épistémologique de l'activité mathématique 8
2 Problème : étymologie et définitions 13
3 Notion de problème dans la sphère des mathématiciens 16
4 Notion de problème en « éducation mathématique » 22
5 Conclusion et ouvertures 27

III Recension des écrits scientifiques sur la médiation des mathématiques dans la communauté didactique **31**
1 Nos travaux antérieurs à cette thèse 31
2 Travaux francophones de didactique des mathématiques autour de la médiation en mathématiques 32
3 Bilan de cette recension 35

IV Cadre théorique & problématique **37**
1 Écologie et évaluation des ressources 37
2 Problématique et questions de recherche 42
3 Modèle du problème transposé dans la conception d'une ingénierie didactique 43
4 Conclusion et poursuite de notre questionnement 54

V Modèle pour repérer les traces d'activité mathématique d'individus en résolution de problème **57**
1 L'usage de la vidéo comme méthode de recueil de données . . 57
2 Description du modèle au niveau des choix des observables . . 60
3 Description du modèle au niveau de la retranscription d'expérience 64
4 Description du modèle au niveau de l'analyse des retranscriptions 71
5 Forces et faiblesses du modèle 74

Analyse écologique **76**

VI Fait-on des mathématiques dans les institutions de culture scientifique ? Une étude de cas en France **79**
1 Les acteurs de la culture scientifique 79
2 État des lieux rétrospectif et réactualisé autour des acteurs directs de la diffusion mathématique 82
Premier bilan : existence et émergence des mathématiques dans les centres de culture scientifique 87
3 Historique des courants de communication scientifique dans notre civilisation et la prolifération de nouvelles institutions . 88
4 Une stratégie unificatrice à l'échelle de notre société 90
5 Formes de médiation dans les institutions de culture scientifique 91
6 Exemples de ressources mathématiques proposées dans les institutions de culture scientifique 93
Second bilan : un manque constaté au niveau des ressources et des perspectives envisageables 101

Analyse épistémologique, mathématique et didactique du problème de Wang 103

VII Analyse épistémologique et historique du problème de Wang 105
1 Introduction au problème de Wang 106
2 De l'indécidabilité aux pavages apériodiques 114
3 Décidabilité et complexité sur des régions (semi)-bornées de $\mathbb{Z}^2$ 126
4 Univers des problèmes et espace-problème de Wang 137
5 Premier zoom sur l'espace-problème Ω_W 138
6 Conclusion et perspectives de recherche 142

VIII Analyse mathématique du problème de Wang 145
1 Le problème de Wang sur des rectangles à bords monochromes pour un certain type de tuiles 146
2 Le problème de Wang sur des bandes bi-infinies de hauteur h fixée : une étude de cas 188
3 Le problème de Wang dans le plan $\mathbb{Z}^2$ avec certaines familles $(\mathscr{F}_i)_{i\in\{1,2,3\}}$ 201
4 Deuxième zoom sur l'espace-problème Ω_W 208
5 Vers la conception d'ingénieries didactiques de l'activité mathématique 211

IX Analyse didactique et conception des situations issues du problème de Wang 213
1 Épistémologie du problème 214
2 Transposition didactique des problèmes 215
3 Construction du milieu, ergonomie et évaluation par inspection 245
4 Choix des actions et caractérisation des micro-activités 249
5 Conclusion sur l'analyse *a priori* 253

Analyse des expérimentations 255

X Contexte des expérimentations et types de données recueillies 257
1 Contexte des expérimentations 257
2 Informations liées aux entretiens et aux données 260

XI Analyse des expérimentations et résultats 263
1 Analyse du module 1 : le cas des rectangles 264
2 Analyse du module 2 : le cas des bandes et du plan 276
3 Résultats de l'analyse des expérimentations 288

Conclusion générale 293

XII Conclusion et perspectives de recherche 295
1 Un manque constaté au niveau de l'existant 295
2 La pratique de l'activité mathématique est possible dans ces espaces de médiation 296
3 Modèle didactique pour concevoir ces ressources 297
4 Modèle didactique pour décrire et objectiver les traces d'activité mathématique en situation 298
5 Perspectives de recherche 300

Bibliographie 303

Annexes 314

A Annexe du chapitre VI 317
1 État des lieux rétrospectif et réactualisé autour des acteurs indirects de la diffusion mathématique 317
2 Données récoltées pour l'étude (voir tableau A.1, p. 319) . . . 322

B Annexe du chapitre V 325
1 Transcription relatif à l'exemple V.7, p. 66 325

C Annexe du chapitre IX : compléments mathématiques liés à des instances spécifiques 327
1 Le cas de la bande $\mathfrak{B}_1$ avec des instances spécifiques 327
2 Le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$ avec des instances spécifiques 330

D Circulation effective des sujets lors de l'expérimentation I 333

E Retranscriptions de l'expérimentation I : le cas des rectangles 335
1 Première retranscription : s_6 et s_8 en activité dans le cas du rectangle de type A 335
2 Deuxième retranscription : s_7 et s_8 en activité dans le cas du rectangle de type $|B|$ 339
3 Troisième retranscription : s_4 et s_5 en activité dans le cas du rectangle de type C 343

F Retranscriptions de l'expérimentation I : le cas de la bande $\mathfrak{B}_1$ 351
1 Première retranscription : s_1, s_2 et s_3 en activité 351
2 Deuxième retranscription : s_4 et s_5 en activité 352

3 Troisième retranscription : s_6 et s_7 en activité 354

G Retranscriptions de l'expérimentation I : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$ 357
1 Première retranscription : s_1 en activité 357
2 Deuxième retranscription : s_4 et s_5 en activité 359
3 Troisième retranscription : s_6 et s_7 en activité 361

H Retranscriptions de l'expérimentation I : le cas du plan 367
1 Première retranscription : s_3 en activité 368
2 Deuxième retranscription : s_6, s_7 et s_8 en activité 370
3 Troisième retranscription : s_4 et s_5 en activité 378

I Transcriptions des entretiens audio de l'expérimentation I 381
1 ENT-EXP-I-1 381
2 ENT-EXP-I-2 386
3 ENT-EXP-I-3 393
4 ENT-EXP-I-4 399
5 ENT-EXP-I-5 403
6 ENT-EXP-I-6 410
7 ENT-EXP-I-7 415
8 ENT-EXP-I-8 426

J Transcriptions des entretiens audio de l'expérimentation II 435
1 ENT-EXP-II-1 435
2 ENT-EXP-II-2 438
3 ENT-EXP-II-3 442
4 ENT-EXP-II-4 447
5 ENT-EXP-II-5 452
6 ENT-EXP-II-6 460
7 ENT-EXP-II-7 467
8 ENT-EXP-II-8 472
9 ENT-EXP-II-9 474
10 ENT-EXP-II-10 480

K Transcriptions des entretiens audio de l'expérimentation III 485
1 ENT-EXP-III-1 485
2 ENT-EXP-III-2 488
3 ENT-EXP-III-3 504
4 ENT-EXP-III-4 510
5 ENT-EXP-III-5 515

L Transcriptions des entretiens audio de l'expérimentation IV **521**
1 ENT-EXP-IV-1 521
2 ENT-EXP-IV-2 527
3 ENT-EXP-IV-3 535
4 ENT-EXP-IV-4 538
5 ENT-EXP-IV-5 545
6 ENT-EXP-IV-6 552

Index **561**

Table des matières **565**

Listes des symboles et des abréviations

Symbole	Signification
$\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$	Plan discret (plan entier), demi-plan discret horizontal, quart de plan discret
τ	Tuile (de Wang)
τ_O, τ_E τ_N, τ_S	Couleur de la tuile τ à l'OUEST (resp. à l'EST E, au NORD N, au SUD S)
$\tau(i,j)$	Tuile positionnée à la i-ième colonne et la j-ième ligne sur une grille
$\tau_N(i,j)$	Couleur au NORD (resp. S SUD, O OUEST, E EST) de la tuile à la position (i,j)
$\mathcal{T}$	Collection, ensemble ou jeu fini de tuiles (de Wang)
$\#\mathcal{T}$	Cardinal de $\mathcal{T}$
$\mathcal{X}$, $\mathcal{X}_O$, $\mathcal{X}_N$, $\mathcal{X}_S$, $\mathcal{X}_E$	Ensemble fini de couleurs, ensemble fini des couleurs OUEST (resp. N nord, S sud et E est)
$i_0 \in \mathcal{X}$	i_0 une couleur de $\mathcal{X}$
$\#\mathcal{X}$	Cardinal de l'ensemble $\mathcal{X}$
$\mathcal{T}_{\#\mathcal{X}}$	Collection de tuiles sachant le nombre de couleurs de $\mathcal{X}$
$\#\mathcal{T}_{\#\mathcal{X}}$	Cardinal de $\mathcal{T}$ sachant le nombre de couleurs de $\mathcal{X}$
$\mathfrak{B}_h$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$	Bande horizontale bi-infinie de hauteur $h > 0$ (resp. de hauteur $h = 1$, $h = 2$)
Type A	Rectangle aux bords opposés monochromes 2 à 2 d'une même couleur
Type B	Rectangle ayant uniquement deux bords opposés monochromes de la même couleur (voir $\lvert B\rvert$ et $\underline{\overline{B}}$)
Type $\lvert B\rvert$	Rectangle aux bords monochromes EST-OUEST de la même couleur et NORD-SUD de couleurs différentes

Type $\overline{\underline{B}}$	Rectangle aux bords monochromes NORD-SUD de la même couleur et EST-OUEST d'une couleur différente
Type C	Rectangle aux bords monochromes de couleurs distinctes
$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^A$ $\mathfrak{M}^{\lvert B\rvert}$, $\mathfrak{M}^{\overline{\underline{B}}}$, $\mathfrak{M}^C$	Motif (périodique), motif de type A (resp. $\lvert B\rvert$, $\overline{\underline{B}}$, C)
$\mathscr{R}^A_{p\times q}$	Rectangle de taille $p \times q$ de type A
$\mathscr{R}^B_{p\times q}$	Rectangle de taille $p \times q$ de type B
$\mathscr{R}^{\lvert B\rvert}_{p\times q}$	Rectangle de taille $p \times q$ de type $\lvert B\rvert$
$\mathscr{R}^{\overline{\underline{B}}}_{p\times q}$	Rectangle de taille $p \times q$ de type $\overline{\underline{B}}$
$G(V,A)$, G	Graphe orienté défini par des arcs de A et des sommets de V
$\#V$	Cardinal de l'ensemble des sommets de G
$\#A$	Cardinal de l'ensemble des arcs de G
p-chemin	Un chemin de longueur p dans un graphe G
$l(C)$	Longueur du circuit C du graphe G
$\mathbb{M}_n(\{0,1\})$	Ensemble des matrices binaires de taille n
$\mathscr{A} \in \mathbb{M}_n(\{0,1\})$	Matrice d'adjacence binaire $\mathscr{A}$ associée à un graphe orienté G
$\mathscr{A}^p$	Puissance p-ième de la matrice d'adjacence binaire $\mathscr{A}$
$\mathscr{F}_1$	Famille de tuiles de Wang monochromes
$\mathscr{F}_2$	Famille de tuiles de Wang bicolores dont une couleur est sur trois secteurs
$\mathscr{F}_3$	Famille de tuiles de Wang bicolores dont les couleurs sont exactement sur deux secteurs
$\mathscr{P}$, $\mathbb{P}$	Problème, ensemble des problèmes
$\mathscr{P}_1 \leqslant_{\mathcal{P}} \mathscr{P}_2$	Le problème $\mathscr{P}_1$ se réduit, en temps polynomial, au problème $\mathscr{P}_2$
$\mathcal{P}$	Classe de complexité des problèmes de décision résolubles par un algorithme déterministe en temps polynomial
$\mathcal{NP}$	Classe de complexité des problèmes de décision où il est possible de vérifier une solution construite par un algorithme non déterministe en temps polynomial
PSPACE	Classe de complexité des problèmes de décision décidés par une machine de Turing déterministe avec un espace polynomial
$\mathcal{X} = \{b, j, v, r\}$	Ensemble de quatre couleurs : bleu, jaune, vert et rouge
$\min_{\#\mathcal{X}}$	Nombre minimal de couleurs
$\mathcal{N}_{\triangle}(i)$	Nombre de fois où la couleur $i \in \mathcal{X}$ apparaît dans le pavage rectangulaire

$\mathcal{N}_{\triangle}^{A}(i)$	Nombre de fois où la couleur $i \in \mathcal{X}$ apparaît dans le pavage de type A (resp. $\|B\|$, $\underline{\overline{B}}$ et C)
$\mathcal{N}_{\triangle_{ext}}(i)$	Nombre de fois où la couleur $i \in \mathcal{X}$ apparaît sur les bords extérieurs du pavage
$\mathcal{N}_{\triangle_{int}}(i)$	Nombre de fois où la couleur $i \in \mathcal{X}$ apparaît à l'intérieur du pavage rectangulaire, bords extérieurs exclus
$\Omega_{\mathbb{P}}$	Univers, espace des problèmes
$\Omega_{\mathbb{W}}$	Univers de Wang, espace-problème de Wang
$\mathcal{A}$	Ensemble fini d'actions
$\mathcal{O}$	Ensemble fini d'objets
$\mathcal{S}$	Ensemble fini de sujets
$(a_i, o_j, s_k) \in \mathcal{A} \times \mathcal{O} \times \mathcal{S}$	Micro-activité définie dans l'ensemble $\mathcal{A} \times \mathcal{O} \times \mathcal{S}$

Abréviation	**Signification**
CCSTI	Centre de culture scientifique, technique et industrielle
CST(I)	Culture scientifique, technique (et industrielle)
CN	Condition nécessaire
CS	Condition suffisante
CNS	Condition nécessaire et suffisante
SiRC	Situation de Recherche pour la Classe
DFS	Depth-First Search (Parcours en profondeur)
BFS	Breadth-First Search (Parcours en largeur)
$\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$	Zone de travail
$\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$	Zone d'outillage
$\mathcal{Z}_{\mathcal{I}}$	Zone d'information
$\mathcal{T}$-action	Action sur $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$
$\mathcal{O}$-action	Action sur $\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$
$\mathcal{O}_s$-action	Action de sélection d'objet dans $\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$
$\mathcal{O}_d$-action	Action de dépôt d'objet dans $\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$
$\mathcal{I}$-action	Action sur $\mathcal{Z}_{\mathcal{I}}$
$\mathcal{SO}$-action	Action d'interactions sociales

Liste des problèmes

Problème	Signification
PAVAGE	Ensemble des problèmes de pavages
DEC-ALG	Ensemble des problèmes de décidabilité algorithmique
COM-ALG	Ensemble des problèmes de complexité algorithmique
$\forall\exists\forall$-SAT	Problème de satisfaisabilité dans le calcul des prédicats du premier ordre
SAT	Problème de satisfaisabilité booléenne dans le calcul propositionnel
k-SAT	Problème de satisfaisabilité booléenne avec $k \geqslant 1$ littéraux dans le calcul propositionnel
3-SAT	Problème de satisfaisabilité booléenne avec trois littéraux dans le calcul propositionnel
ENTSCHEIDUNGSPROBLEM	Problème de la Décision
ARRÊT	Problème de l'Arrêt des machines de Turing
EIN STEIN	Problème de recherche d'une unique tuile connexe pavant apériodiquement $\mathbb{Z}^2$
WANG-PLAN	Problème de Wang dans $\mathbb{Z}^2$
WANG-PLAN-1,2,3-COULEURS	Problème de Wang dans $\mathbb{Z}^2$ où $\#\mathcal{X} = 1, 2$ ou 3
WANG-PLAN-$\mathscr{F}_1$	Problème de Wang dans $\mathbb{Z}^2$ avec une famille $\mathscr{F}_1$ de tuiles
WANG-PLAN-$\mathscr{F}_2$	Problème de Wang dans $\mathbb{Z}^2$avec une famille $\mathscr{F}_2$ de tuiles
WANG-PLAN-$\mathscr{F}_3$	Problème de Wang dans $\mathbb{Z}^2$ avec une famille $\mathscr{F}_3$ de tuiles
WANG-PLAN-$\mathscr{F}_i$	Problème de Wang dans $\mathbb{Z}^2$ avec une famille $\mathscr{F}_i$ où $i \in \{1, 2, 3\}$ de tuiles
WANG-PLAN-PERIODIQUE	Problème de Wang dans $\mathbb{Z}^2$ visant à détecter une collection périodique

WANG-DIAG	Problème de Wang à diagonale contrainte
WANG-ORIGINE	Problème de Wang à origine contrainte avec une tuile τ_0 fixée à l'origine dans $\mathbb{Z}^2$ ou $\mathbb{N}^2$
SNAKE	Problème d'existence d'un $\mathcal{T}$-snake (chemin de tuiles de $\mathcal{T}$) entre deux points du plan, du demi-plan ou du quart de plan
WANG-JEU-OPTIMAL	Problème d'existence d'un jeu de Wang apériodique optimal
WANG-ESPACE	Problème de Wang en dimension $d \geqslant 3$
WANG-BRICK	Problème de Wang avec certains types de tuiles (*Brick Wang Tiling*) sur des régions arbitraires du plan avec des trous
$\mathcal{P} = \mathcal{NP}$?	Un des problèmes du millénaire encore ouvert en informatique théorique
WANG-REC-GEN	Problème général de Wang sur les rectangles $p \times q$ où p et q font partie des instances
WANG-REC-GEN-FIXE	Problème général de Wang sur les rectangles $p \times h$ avec la hauteur h fixée où h ne fait pas partie des instances
WANG-REC-k-MONOCHROME	Problème de Wang sur des rectangles avec k bord(s) monochrome(s) de couleurs distinctes ou non où $k = \{1, 2, 3, 4\}$
WANG-REC-1-MONOCHROME	Problème de Wang sur des rectangles avec un bord monochrome
WANG-REC-2-MONOCHROME	Problème de Wang sur des rectangles avec deux bords monochromes de couleurs distinctes ou non
WANG-REC-3-MONOCHROME	Problème de Wang sur des rectangles avec trois bords monochromes de couleurs distinctes ou non
WANG-REC-4-MONOCHROME	Problème de Wang sur des rectangles avec quatre bords monochromes de couleurs distinctes ou non
WANG-REC-MONO-PART	Problème de Wang sur des types de rectangle avec des bords monochromes pour une collection particulière de tuiles
WANG-∀-REC-MONO-PART	Problème de Wang sur tous les types de rectangle avec des bords monochromes pour une collection particulière de tuiles de $\#\mathcal{X} = 4$
WANG-∀-REC-MONO-PART *	Problème de Wang sur tous les types de rectangle avec des bords monochromes pour une collection particulière de tuiles de $\#\mathcal{X} \geqslant 4$
WANG-RECTANGLE-A	Problème de Wang sur des rectangles de type A
WANG-RECTANGLE-B	Problème de Wang sur des rectangles de type B
WANG-RECTANGLE-C	Problème de Wang sur des rectangles de type C
WANG-CARRE-A	Problème de Wang sur des carrés de type A

WANG-CARRE-B	Problème de Wang sur des carrés de type B
WANG-CARRE-C	Problème de Wang sur des carrés de type C
WANG-∀-CARRE-MONO-PART	Problème de Wang sur tous les types de carré avec des bords monochromes pour une collection particulière de tuiles de $\#\mathcal{X} = 4$
WANG-∀-CARRE-MONO-PART ⋆	Problème de Wang sur tous les types de carré avec des bords monochromes pour une collection particulière de tuiles de $\#\mathcal{X} \geqslant 4$
WANG-h-BANDE	Problème de Wang sur la bande bi-infinie de hauteur $h > 0$
WANG-1-BANDE	Problème de Wang sur la bande bi-infinie de hauteur $h = 1$
WANG-2-BANDE	Problème de Wang sur la bande bi-infinie de hauteur $h = 2$
CHEMIN	Problème de recherche/d'existence de chemin d'une certaine longueur dans un graphe orienté G
CIRCUIT	Problème de recherche/d'existence de circuit dans un graphe orienté G
MAX-CIRCUIT	Problème de recherche/d'existence de circuit maximal dans un graphe orienté G
MIN-CIRCUIT	Problème de recherche/d'existence de circuit minimal dans un graphe orienté G
EULERIEN	Problème de recherche/d'existence de circuit eulérien dans un graphe orienté G
HAMILTONIEN	Problème de recherche/d'existence de circuit hamiltonien dans un graphe orienté G
MIN-WANG-1-BANDE	Problème de Wang sur la bande bi-infinie de hauteur $h = 1$ à la recherche d'un circuit de tuiles de taille minimale
MAX-WANG-1-BANDE	Problème de Wang sur la bande bi-infinie de hauteur $h = 1$ à la recherche d'un circuit de tuiles de taille maximale
EULERIEN-WANG-1-BANDE	Problème de Wang sur la bande bi-infinie de hauteur $h = 1$ à la recherche d'un circuit de tuiles avec toutes les tuiles de la collection (représentation eulerienne à l'aide d'une graphe orienté)
HAMILTONIEN-WANG-1-BANDE	Problème de Wang sur la bande bi-infinie de hauteur $h = 1$ à la recherche d'un circuit de tuiles avec toutes les tuiles de la collection (représentation hamiltonienne à l'aide d'un graphe orienté)

Liste des tableaux

II.1 Différentes définitions du terme problème recensées par Hoosain (2004) en *mathematics education*. 24

V.1 Quelques exemples d'encodage. 64

VII.3 Résumé des principales découvertes dans les jeux apériodiques de Wang dérivés parfois d'autres ensembles apériodiques. . . 125

VII.5 Résumé de la classe de complexité algorithmique de certains problèmes décidables mentionnés dans notre étude épistémologique. 139

VIII.1 Résultats d'existence (•) pour le problème WANG-REC-MONO-PART en fonction de la parité des entiers $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$ et du type de rectangle. 176

VIII.2 Résultat d'impossibilité (•) pour le problème WANG-REC-MONO-PART en fonction de la parité des entiers $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$ et du type de rectangle lorsque $\#\mathcal{X} = 4$. 179

IX.1 Sept stratégies issues de notre étude épistémologique, jugées mobilisables, pour développer les connaissances d'ordre II visées. 227

IX.3 Liste exaustive des circuits de tuiles (non nécessairement élémentaires) de longueur trois et six. 237

IX.5 Liste exaustive des circuits de tuiles (non nécessairement élémentaires) de longueur deux, quatre et six. 241

IX.7 Liste exaustive des circuits de tuiles élémentaires de longueur quatre. 243

X.1 Nombre de participants par expérimentation. 258

X.2 Nom des fichiers, format et durée des enregistrements audiovisuels. 262

XI.1 Aide pour l'identification des transcriptions par rapport au sujet s_k observé. 264

A.1 Emissions radiophoniques diffusées par France Culture traitant des sciences et leur pourcentage d'émissions sur les mathématiques. 319

C.2 Liste exhaustive des circuits de tuiles (non nécessairement élémentaires) de longueur trois et six. 329

C.4 Liste exhaustive des circuits de tuiles (non nécessairement élémentaires) de longueur deux, quatre et six. 331

Table des figures

II.1 Instanciation du problème du voyageur de commerce : le cas où $n = 4$ 21

II.2 Problème transposé décrit selon trois composantes : (i) épistémologie, (ii) didactique, (iii) ergonomie. 27

IV.1 Fragment d'échelle des niveaux de codétermination didactique (Chevallard, 2010, p. 138). 37

IV.2 Modèle du problème transposé utilisé pour évaluer le potentiel mathématique d'une ressource. 39

IV.3 Fragment de l'espace des problèmes $\Omega_{\mathbb{P}}$ centré sur l'univers d'un problème $\mathscr{P}$ autour de trois ensembles de problèmes $\mathbb{P}_6$, $\mathbb{P}_2$ et $\mathbb{P}_{10}$ dont les questions sont jugées proches de celle de $\mathscr{P}$. 46

IV.4 Premier zoom sur l'espace-problème ou univers $\Omega_{\mathscr{P}}$. 47

IV.5 Relations de suffisance, de suffisance partielle ou d'équivalence entre des problèmes $\mathscr{P}_i \in \Omega_{\mathscr{P}}$. 48

IV.6 Modèle du problème transposé utilisé pour la conception d'une ingénierie : articulation entre transposition didactique et ergonomie du milieu. 51

V.1 Questions formulées pour chaque étape de notre modèle. . . 60

V.2 Preuve par forçage pour démontrer l'impossibilité de paver la grille 3×3 avec le trou noir dans cette configuration. 64

V.3 Un exemple de retranscription de micro-activités. 67

V.4 Grille 5×5 pour aider le lectorat à jouer la scène retranscrite. 68

V.5 Exemple de résumé relatif à l'intervalle $[0, 17[$ de la retranscription de l'exemple V.7, p. 66. 69

V.6 Fragment de retranscription correspondant à l'intervalle $[0, 18[$ de l'exemple V.7 (p. 66) avec le symbole « ★ » permettant d'identifier les éléments qui apparaissent dans les résumés. 70

V.7 Résumés de la retranscription de l'exemple V.7 (p. 66) décrivant une « photographie enrichie » de la situation à instant t qui précise, pour chaque joueur, le nombre d'occurences de ses $\mathcal{T}$-actions sachant le nombre d'occurences des $\mathcal{T}$-actions de l'autre joueur. 70
V.8 Résumé prenant en compte uniquement l'occurence de l'ajout « + ». 71
V.9 Sous-mot extrait de la retranscription de l'exemple V.7, p. 66. 72
V.10 Modèle ORA de traitement et d'analyse de données audiovisuelles. 74

VI.1 Cartographie des acteurs du paysage de la CST de l'Office de Coopération et d'Information Muséales (OCIM) (SNCSTI, 2017, p. 37). 80
VI.2 Schéma montrant les différentes formes d'actions menées sur le territoire national (SNCSTI, 2017, p. 38). 81
VI.3 Différentes postures du médiateur (Belaën et Blet, 2007, p. 36). 91
VI.4 Exemple d'activité proposée au Palais de la Découverte sur la symétrie. 94
VI.5 Exemple d'activité proposée la Maison de Fermat sur le hasard. 95
VI.6 Exemple d'activité numérique proposée au Palais de la Découverte sur la symétrie. 96
VI.7 Extrait du panneau d'Euler de l'expostion « Voyage en Mathématique » de la Maison de Fermat. 97
VI.8 Problème de pavages du plan avec un seul type de polygones proposé au Palais de la Découverte. 98
VI.9 Exemple de défis proposés dans l'espace « ateliers recréatifs » du Palais de la Découverte et une solution d'existence d'un pavage valide dans le cas d'un carré 4×4. 100

VII.1 Illustration d'un fragment d'un pavage du plan discret par des tuiles de Wang. 105
VII.2 Hao Wang (1921-1995). 106
VII.3 Tuile de Wang générique $\tau := (\tau_N, \tau_S, \tau_O, \tau_E)$ où τ_N, τ_S, τ_O et τ_E appartiennent à un ensemble fini $\mathcal{X}$ de couleurs. 107
VII.4 Tuiles de Wang obtenues à rotation près à partir de la tuile τ_1. 107
VII.5 Différentes étapes dans la construction d'un pavage périodique de $\mathbb{Z}^2$. 107
VII.6 Exemples de motifs périodiques engendrant par translations un pavage du plan entier $\mathbb{Z}^2$. 108
VII.7 Motif valide (à gauche) et non valide (à droite). 109

VII.8 Collection $\mathcal{T}$ de cinq tuiles de Wang à trois couleurs. 110
VII.9 Différents pavages périodiques de plan $\mathbb{Z}^2$ avec des tuiles de $\mathcal{T}$. 110
VII.10 Extrait d'un pavage non périodique du plan discret. 110
VII.11 Une collection $\mathcal{T}$ de quatre tuiles de Wang à quatre couleurs. 111
VII.12 Quatre motifs de taille 2×2 valides. 111
VII.13 Exemple de construction d'un motif 3×3 avec des tuiles de $\mathcal{T}$ à partir d'un des trois premiers motifs 2×2. 112
VII.14 Illustration d'un arbre infini à embrachement fini du lemme de König. 113
VII.15 Représentation de tuiles de Wang : les lettres correspondent aux « noms » des tuiles et les nombres aux couleurs des bords (Wang, 1961, p. 23). 115
VII.16 Schéma de l'algorithme (Grünbaum et Shephard, 1986, p. 603). 117
VII.17 Collection de tuiles de l'exemple VII.4. 117
VII.18 Exemples de tuiles qui permettent de recouvrir le plan entier par translations d'elles-mêmes. 117
VII.19 Frise chronologique — non exhaustive — de l'avancée dans la recherche de jeux apériodiques de cardinalité de plus en plus faible (WANG-JEU-OPTIMAL). 120
VII.20 Exemple de jeu apériodique de Robinson à 7 tuiles polygonales permettant à rotation et réfléxion près de construire un jeu apériodique de 52 tuiles de Wang où seule la translation est autorisée. Extrait de Poizat (1980). 120
VII.21 Ensemble apériodique de Laüchli transformé en 40 tuiles de Wang de 16 couleurs (Da Ronch, 2020c). 121
VII.22 Jeu apériodique optimal de onze tuiles à quatre couleurs construit par Jeandel et Rao (2015). 124
VII.23 Pavage d'une bande bi-infinie $\mathfrak{B}_4$ lorsque $h = 4$ par translations horizontales d'un motif horizontalement périodique. 126
VII.24 Exemple d'un pavage valide sur un rectangle de taille 12×4. 127
VII.25 $\mathcal{NP}$-dureté, réduction polynomiale pour un bord monochrome à l'OUEST : WANG-REC-GEN $\leqslant_{\mathcal{P}}$ WANG-REC-1-MONOCHROME. 133
VII.26 $\mathcal{NP}$-dureté, réduction polynomiale pour un bord monochrome au NORD : WANG-REC-GEN $\leqslant_{\mathcal{P}}$ WANG-REC-1-MONOCHROME. 133
VII.27 $\mathcal{NP}$-dureté, réduction polynomiale pour deux bords monochromes adjacents distincts ou non : WANG-REC-1-MONOCHROME $\leqslant_{\mathcal{P}}$ WANG-REC-2-MONOCHROME. 134
VII.28 $\mathcal{NP}$-dureté, réduction polynomiale pour deux bords monochromes opposés distincts : WANG-REC-1-MONOCHROME $\leqslant_{\mathcal{P}}$ WANG-REC-2-MONOCHROME. 134

VII.29 NP-complétude lorsque les bords opposés du rectangle sont d'une même couleur. . . . 135

VII.30 Fragment de l'espace des problèmes $\Omega_{\mathbb{P}}$ centré sur $\Omega_{\mathbb{W}}$ autour de PAVAGE, DEC-ALG et COM-ALG. . . . 137

VII.31 Premier zoom sur l'espace-problème $\Omega_{\mathbb{W}}$. . . . 140

VII.32 Premier zoom sur l'espace-problème $\Omega_{\mathbb{W}}$ et relations de suffisance ou de suffisance partielle entre des problèmes $\mathscr{P}_i \in \Omega_{\mathbb{W}}$. 142

VIII.1 La collection $\mathcal{T}$ de vingt-quatre tuiles de Wang pouvant être générée, à rotation près, à partir des six tuiles disposées sur l'une des lignes de la figure. . . . 147

VIII.2 Exemples de rectangles non pavables par des tuiles de $\mathcal{T}$. . . 147

VIII.3 Les trois types de rectangle du problème WANG-RECTANGLE. 148

VIII.4 Exemples de pavages valides pour des rectangles de type C. 149

VIII.5 Preuve d'impossibilité pour le rectangle 2×3 de type C. . . 149

VIII.6 CNS pour les rectangles $1 \times q$ de type B. . . . 151

VIII.7 CNS pour les rectangles $1 \times q$ de type C. . . . 151

VIII.8 Existence d'un pavage pour le rectangle $2 \times q$ de type A avec q pair. . . . 152

VIII.9 Existence d'un pavage pour le rectangle $2 \times q$ de type A avec q pair à partir de la réflexion d'un rectangle $1 \times q$ de type $|B|$. . 152

VIII.10 Existence d'un pavage pour le rectangle 2×3 de type A. . . 152

VIII.11 Existence d'un pavage pour le rectangle $2 \times q$ de type A avec q pair. . . . 153

VIII.12 Existence d'un pavage pour le rectangle $2 \times q$ de type B ayant des bords EST-OUEST d'une même couleur avec q pair. . . . 153

VIII.13 Existence d'un pavage du $2 \times q$ de type $\overline{B}$. . . . 154

VIII.14 Existence d'un pavage du $2 \times q$ de type C pour q pair. . . . 155

VIII.15 Existence d'un pavage du $2 \times q$ de type C pour q pair avec un autre motif de base. . . . 155

VIII.16 Impossiblité de paver un rectangle $3 \times q$ de type A lorsque q est impair. . . . 157

VIII.17 Existence d'un pavage 3×2 de type A . . . 157

VIII.18 Grille à coordonnées entières et une tuile τ en position $(3,4)$. 158

VIII.19 Etude de cas pour le rectangle 3×4 de type C. . . . 159

VIII.20 Etapes du raisonnement par forçage pour le premier cas. . . 159

VIII.21 Traitement des sous-cas pour le rectangle 3×4 de type C. . 160

VIII.22 Construction d'un pavage valide pour le rectangle de type A de taille $p \times q$ avec p et q pairs. . . . 161

VIII.23 Construction d'un pavage valide pour le rectangle de type A de taille $p \times q$ avec p et q pairs. . . . 162

VIII.24 Existence d'un pavage de type A par induction descendante sur une classe d'objets lorsque $pq \equiv 0\,[2]$. 163
VIII.25 Existence d'un pavage carré de côté $n \geqslant 2$ pair et de type A par induction descendante sur une classe d'objets. 166
VIII.26 Construction de pavages valides pour les rectangles de types $|B|$ et $\overline{\underline{B}}$ à partir d'un pavage de type A de taille $p \times q$ avec p et q pairs. 167
VIII.27 Construction de pavages valides pour les rectangles de types $|B|$ et $\overline{\underline{B}}$ à partir d'un pavage de type A de taille $p \times q$ avec p pair et q impair. 168
VIII.28 Construction de pavages valides pour les rectangles de types C avec p et q impairs, à partir d'un pavage de type A de taille $p \times q$ avec p et q pairs. 171
VIII.29 Partition d'un rectangle de type C en quatre rectangles de différents types pour lesquels il existe un motif valide. . . . 172
VIII.30 Existence d'un pavage pour le rectangle de type C et de taille $p \times q$ par induction descendante sur une classe d'objets. . . . 173
VIII.31 Exemple de dilatation-substitution pour un type de tuiles de $\mathcal{T}$ générant un pavage valide 2×2 de type C. 174
VIII.32 Premières étapes de construction de pavages par substitution pour des carrés de type C et de la taille d'une puissance de deux. 175
VIII.33 Pavage d'un rectangle $1 \times q$ de type C avec $\#\mathcal{X} = 5$. 180
VIII.34 Existence d'un pavage pour le rectangle de type C lorsque p est impair, q est pair et $\#\mathcal{X} = 5$. 181
VIII.35 Existence d'un pavage pour le rectangle de type C lorsque p est pair, q est impair et $\#\mathcal{X} = 5$. 182
VIII.36 Pavage d'un rectangle $1 \times q$ de type $|B|$ avec $\#\mathcal{X} = 5$. 183
VIII.37 Existence d'un pavage pour le rectangle de type $|B|$ lorsque p est pair, q est impair et $\#\mathcal{X} = 5$ 184
VIII.38 Existence d'un pavage pour le rectangle de type C lorsque p est impair, q est impair et $\#\mathcal{X} = 5$. 184
VIII.39 Existence d'un pavage pour le rectangle de type A lorsque p est impair, q est impair et $\#\mathcal{X} = 5$ 185
VIII.40 Un nouveau type de pavages généré avec la nouvelle collection de tuiles. 187
VIII.41 Exemple d'un pavage d'une bande bi-infinie de hauteur $h = 4$ fixée ($\mathfrak{B}_4$) réalisé par translations horizontales d'un motif horizontalement périodique. 188

VIII.42 Pavage de la bande $\mathfrak{B}_1$ par translations horizontales d'un même motif rectangulaire $\mathfrak{M}$. 189
VIII.43 Exemple d'un ensemble $\mathcal{T}$ de cinq tuiles ne pavant pas la bande $\mathfrak{B}_1$ 191
VIII.44 Modélisation et changement de représentation d'une tuile de Wang par un graphe orienté. 192
VIII.45 Exemple d'un ensemble de tuiles $\mathcal{T}$ et son graphe G associé. 194
VIII.46 Pavages de la bande $\mathfrak{B}_1$ avec un circuit de quatre tuiles (a) et un circuit minimal de trois tuiles (b). 195
VIII.47 Ensemble de tuiles (a) pavant la bande $\mathfrak{B}_1$ avec toutes les tuiles (c) sans pour autant que son graphe associé (b) soit eulérien. 197
VIII.48 Exemple de pavage d'une bande bi-infinie de hauteur $h = 2$ ayant des tuiles avec les mêmes couleurs au NORD et au SUD. 198
VIII.49 Exemple de motifs possibles pour paver $\mathfrak{B}_2$ avec trois tuiles. 199
VIII.50 Type de tuiles de la famille $\mathscr{F}_1$ où a est une couleur arbitraire de $\mathcal{X}$. 201
VIII.51 Pavage de $\mathbb{Z}^2$ avec une tuile de la famille $\mathscr{F}_1$ 202
VIII.52 Types de tuiles de la famille $\mathscr{F}_2$ où a et b sont des couleurs arbitraires de $\mathcal{X}$. 202
VIII.53 Un exemple de pavage périodique du plan avec des tuiles de la famille $\mathscr{F}_1$ 203
VIII.54 Types de tuiles de la famille $\mathscr{F}_3$ où a et b sont des couleurs arbitraires de $\mathcal{X}$. 203
VIII.55 Exemple d'un pavage de $\mathbb{Z}^2$ avec une tuile autopavante de type 2 de la famille $\mathscr{F}_3$. 204
VIII.56 Exemple d'une collection de tuiles de la famille $\mathscr{F}_3$ coupées dans le sens /. 204
VIII.57 Itérations des translations de bandes dans le processus de construction d'un pavage du plan avec des tuiles coupées dans le sens / de la famille $\mathscr{F}_3$. 205
VIII.58 Extrait d'un pavage périodique du plan avec des tuiles coupées dans le sens / de la famille $\mathscr{F}_3$. 205
VIII.59 Extrait d'un pavage de $\mathbb{Z}^2$ avec des tuiles de type 1 de la famille $\mathscr{F}_3$ 206
VIII.60 Différentes étapes pour démontrer l'inexistance de pavage apériodique pour la famille $\mathscr{F}_3$ de type 1. 207
VIII.61 Deuxième zoom sur l'espace-problème $\Omega_{\mathbb{W}}$. 209
VIII.62 Deuxième zoom sur l'espace-problème $\Omega_{\mathbb{W}}$ et relations entre les problèmes $\mathscr{P}_i \in \Omega_{\mathbb{W}}$. 211

IX.1 Espace-problème $\Omega_{\mathbb{W}}$ et relations entre les problèmes $\mathscr{P}_i \in \Omega_{\mathbb{W}}$ (voir p. 211). 215
IX.2 Extrait d'une production d'étudiants démontrant l'existence d'un pavage de type A. 219
IX.3 Extrait d'une production d'étudiants prouvant l'existence d'un pavage en utilisant la stratégie (DE)CONSTRUCTION. 220
IX.4 Extrait d'une production d'élèves démontrant l'existence d'un pavage de type C de taille 1×5 en utilisant MOTIF_PERIODIQUE couplé avec (DE)CONSTRUCTION 221
IX.5 Extrait d'une production d'étudiants pour démontrer l'existence d'un pavage de type A utilisant PARTITION couplé à MOTIF_PERIODIQUE. 221
IX.6 Extrait d'une production d'étudiant relatif à une preuve d'existence de pavage de type C utilisant PARTITION couplé à MOTIF_PERIODIQUE. 222
IX.7 Extrait d'une production d'étudiant utilisant de manière inappropriée la stratégie de PARTITION dans une preuve d'impossibilité. 223
IX.8 Extrait d'une production d'élèves de CM2 relatif à une preuve incomplète d'impossiblité utilisant la stratégie de FORÇAGE. 224
IX.9 Extrait d'une production d'élève de sixième relatif à une preuve d'impossibilité utilisant FORÇAGE. 225
IX.10 Extrait d'une production d'étudiants relatif à la preuve de la CN pour les rectangles de type $\overline{B}$ utilisant DENOMBREMENT. 226
IX.11 Trois types de rectangle dans nos situations. 229
IX.12 Construction des trois types de rectangle à partir de la réglette. 230
IX.13 Construction d'un rectangle à paver de type C et de taille 3×6. 230
IX.14 Pavage de la bande bi-inifinie $\mathfrak{B}_1$ avec des bords NORD et SUD de la même couleur : une tuile suffit à rotation près pour paver $\mathfrak{B}_1$. 232
IX.15 Portion du plan discret avec un poinçon sur le NORD de chaque cellule pour imposer l'orientation des tuiles. 233
IX.16 Les six types de tuiles de Wang pouvant générer la collection complète de vingt-quatre par rotations. 235
IX.17 Collection $\mathcal{T}$ de huit tuiles pour la situation de la bande bi-infinie de hauteur $h = 1$. 236
IX.18 Pavage de $\mathfrak{B}_1$ avec un circuit horizontalement périodique de trois tuiles. 236
IX.19 Pavage de $\mathfrak{B}_1$ avec un circuit horizontalement périodique de six tuiles. 237

IX.20 Sous-collection de sept tuiles de $\mathcal{T}$ dépouvue de la tuile τ_6. . . 238
IX.21 Unicité du chemin de longueur maximale de cinq tuiles. . . 239
IX.22 Collection $\mathcal{T}$ de quatorze tuiles. 239
IX.23 Énumération de tous les blocs verticaux de deux tuiles valides avec la collection $\mathcal{T}$ de la figure IX.22. 240
IX.24 Exemple d'un motif rectangulaire horizontalement périodique de taille 2×4 permettant de paver $\mathfrak{B}_2$ par translations. . . . 240
IX.25 Un exemple de pavage de $\mathfrak{B}_2$ avec le motif précédent. 240
IX.26 Motif horizontalement périodique. 241
IX.27 Pavage de $\mathfrak{B}_2$ par translations horizontales du motif précédent. 241
IX.28 Collection de sept tuiles pour la situation du plan. 242
IX.29 Pavage de $\mathbb{Z}^2$ avec la collection de la figure IX.28. 242
IX.30 Une partie du milieu artefactuel. 245
IX.31 Plateaux des deux tables hautes représentant les deux types de situations. 246
IX.32 Exemple de réglette et de tuiles manipulables. 247
IX.33 Contours des tables hautes représentant les zones d'information. 247
IX.34 Grille 4×9 avec ses coordonnées entières. 250
IX.35 Exemple d'une partie de retranscription entre deux sujets agissant sur la même situation (Da Ronch, Gandit et Gravier, 2023). 252
IX.36 Exemple d'un résumé en rapport avec la retranscription de l'exemple IX.17, p. 252. 253

X.1 Extrait issu du programme de la Fête de La Science concernant l'appel à participation (sur inscription préalable). 258
X.2 Extraits issus du site de la médiathèque de Malataverne concernant l'appel à participation (sur inscription préalable). . . . 258

XI.1 Rappel des trois types de rectangles construtibles avec la réglette (voir p. 230). 264
XI.2 Sous-mot périodique extrait de la retranscription générant un motif 2×2 périodique. 265
XI.3 Extrait de pavage du résumé 2.5 (figure E.11, p. 343) montrant la mise en œuvre de la stratégie MOTIF_PERIODIQUE couplée avec (DE)CONSTRUCTION. 266
XI.4 Extrait de pavage du résumé 2.5 (figure E.11, p. 343) montrant encore la mise en œuvre de la stratégie MOTIF_PERIODIQUE à l'aide d'un autre motif 2×2. 266
XI.5 Extrait de l'entretien ENT-EXP-I-6 avec s_8 évoquant la stratégie de périodicité. 266

XI.6 Extraits du fichier `VEXPIV_M1_003.mp4` où apparaissent des productions périodiques. 267
XI.7 Extrait de l'entretien ENT-EXP-IV-6 pointant la prise de conscience de l'individu sur la mise en œuvre de la stratégie MOTIF_PERIODIQUE pour paver le rectangle de type A de taille douze (2×6). . . 267
XI.8 Extrait de l'entretien ENT-EXP-IV-1 évoquant la formulation d'une CS d'existence. 268
XI.9 Exemple d'un sous-mot générant un motif 2×2 horizontalement périodique. 268
XI.10 Autre exemple de sous-mot générant un motif 2×2 périodique. 268
XI.11 Résumé 1.5 issu de la figure E.6, p. 339. 269
XI.12 Extrait du résumé 3.4 de la figure E.16 (p. 347). 269
XI.13 Extrait du résumé 3.7 de la figure E.19, p. 348 n'évoquant pas explicitement la stratégie MOTIF_PERIODIQUE. 269
XI.14 $\mathcal{T}$-actions d'ajout conditionnées par rapport à l'environnement de la $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$ à cet instant t. 270
XI.15 Résumé 1.3 issu de la figure E.4, 337. 270
XI.16 Stratégie FORÇAGE repérée dans la deuxième retranscription. 271
XI.17 Repérage de l'absurdité. 272
XI.18 Extrait des résumés 3.1 et 3.3 des figures E.13 et E.15 (p. 344 et 346). 272
XI.19 Extrait de l'intervalle $[102,106]$ de la troisième retranscription de l'annexe E. 273
XI.20 Extrait de l'entretien ENT-EXP-I-7 évoquant la prise de conscience de s_4 sur les stratégies mises en œuvre dans les tentatives de pavage du rectangle. 273
XI.21 Extrait de l'entretien ENT-EXP-I-7 montrant s_4 formuler une conjecture sur l'impossibilité de paver le rectangle. 274
XI.22 Extrait de l'entretien ENT-EXP-I-3 montrant s_5 qui formule la conjecture d'existence d'un pavage pour ce rectangle. 274
XI.23 Autre extrait de l'entretien ENT-EXP-IV-1 mentionnant un argument d'impossibilité 275
XI.24 Existence d'un sous-mot périodique permettant de paver $\mathfrak{B}_1$. 277
XI.25 Extrait du résumé 3.1 de la figure F.8, p.354 montrant la répétition d'un motif 1×2. 277
XI.26 Extrait de l'entretien ENT-EXP-I-1 de l'annexe I, p. 381. . . . 277
XI.27 Exemple de répétition de motifs rectangulaires lors de la deuxième expérimentation. 278
XI.28 Extrait de l'entretien ENT-EXP-II-5 de l'annexe J, p. 435. . . 279

XI.29 Sous-mots extraits de l'intervalle [8,12[de la première retranscription de l'annexe G. 280
XI.30 Exemples de motifs horizontalement périodiques exhibés. . 280
XI.31 Répétion du premier sous-mot permettant de générer deux motifs identiques. 280
XI.32 Sous-mot d'ajout de tuiles par translation extrait de l'intervalle [17,18[. 280
XI.33 Motif déplacé par translation horizontale à partir du sous-mot précédent. 281
XI.34 Extrait de l'entretien ENT-EXP-I-2 de l'annexe I, p. 381. . . . 281
XI.35 Exemple du sous-mot correspondant au motif 2×2 extrait de l'intervalle [13,16[. 281
XI.36 Extrait du résumé 2.4 de la figure G.9 (p. 361) montrant la répétion du motif 2×2 dans le pavage de la bande et leur structuration partiellement ordonnée. 282
XI.37 Prise de conscience de s_4 sur sa mise en œuvre de la stratégie MOTIF_PERIODIQUE. 282
XI.38 Extrait du résumé 2.4 de la figure G.9 (p. 361) montrant que la stratégie FORÇAGE est mobilisée localement par s_4. 283
XI.39 Extrait du résumé 2.4 de la figure G.9 (p. 361) montrant que la stratégie EMPILEMENT est mobilisée partiellement par s_4. . . 283
XI.40 Extrait du résumé 2.2 de la figure H.6 (p.372) montrant FORÇAGE pour la quatorzième, quinzième et seizième $\mathcal{T}$-action de s_7. 283
XI.41 Extrait du fichier `VEXP1_M2_003.mp4` montrant s_6 faire un geste en diagonale pour montrer à s_7 la structure du pavage. . . . 284
XI.42 Exemples du sous-mot de l'intervalle [112,121[montrant explicitement l'empilement diagonal d'une même tuile dans la construction du pavage. 284
XI.43 Extrait du résumé 2.5 de la figure H.9 (p.375) montrant la structuration « diagonale » d'une de ces $\mathcal{T}$-actions. 284
XI.44 Extrait des résumés 2.5 et 2.6 des figures H.9 et H.10 (p. 375 et 376) montrant le déplacement des tuiles (avec du orange) sur le bord de la $\mathcal{Z}_\mathcal{T}$. 285
XI.45 Sous-mot répété à plusieurs reprises générant un motif 1×4 horizontalement périodique permettant de paver le plan par décalage d'un carreau en diagonale. 285
XI.46 Extrait du résumé 1.2 de la figure H.4, p. 370 montrant la répétition du motif 1×4 pour paver le plan. 286
XI.47 Extrait de l'entretien ENT-EXP-I-8 de l'annexe I, p. 381. . . . 286

XI.48 Extrait de l'entretien ENT-EXP-I-8 de l'annexe I, p. 381. . . . 286
XI.49 Extrait de l'entretien ENT-EXP-IV-5 de l'annexe L, p. 521. . 287
XI.50 Extrait de l'entretien ENT-EXP-IV-5 de l'annexe L, p. 521. . 288
XI.51 Extrait de l'entretien ENT-EXP-IV-5 de l'annexe L, p. 521. . 288

XII.1 Modèle du problème transposé décrit selon trois composantes : (i) épistémologie, (ii) didactique, (iii) ergonomie (p. 27). . . . 298
XII.2 Modèle ORA de traitement et d'analyse de données audiovisuelles (p. 74). 299

C.1 Rappel de la collection $\mathcal{T}$ de huit tuiles pour la situation de la bande bi-infinie de hauteur $h = 1$ (voir p. 236). 327
C.2 Graphe $G(V,A)$ associé à la collection $\mathcal{T}$ et sa matrice d'adjacence $\mathscr{A}$. 328
C.3 Rappel de la collection de quatorze tuiles pouvant être partitionnée en deux sous collections de sept tuiles (voir p. 239). 330
C.4 Graphe orienté associé aux couleurs EST et OUEST des blocs de tuiles de hauteur $h = 2$ et sa matrice d'adjacence associée. . . 330

E.1 Grille utilisée pour faciliter la lecture des retranscriptions. . 335
E.2 Résumé 1.1 : le cas du rectangle de type A. 336
E.3 Résumé 1.2 : le cas du rectangle de type A. 337
E.4 Résumé 1.3 : le cas du rectangle de type A. 337
E.5 Résumé 1.4 : le cas du rectangle de type A. 338
E.6 Résumé 1.5 : le cas du rectangle de type A. 339
E.7 Résumé 2.1 : le cas du rectangle de type $|B|$. 340
E.8 Résumé 2.2 : le cas du rectangle de type $|B|$. 340
E.9 Résumé 2.3 : le cas du rectangle de type $|B|$. 341
E.10 Résumé 2.4 : le cas du rectangle de type $|B|$. 342
E.11 Résumé 2.5 : le cas du rectangle de type $|B|$. 343
E.12 Résumé 2.6 : le cas du rectangle de type $|B|$. 343
E.13 Résumé 3.1 : le cas du rectangle de type C. 344
E.14 Résumé 3.2 : le cas du rectangle de type C. 345
E.15 Résumé 3.3 : le cas du rectangle de type C. 346
E.16 Résumé 3.4 : le cas du rectangle de type C. 347
E.17 Résumé 3.5 : le cas du rectangle de type C. 347
E.18 Résumé 3.6 : le cas du rectangle de type C. 348
E.19 Résumé 3.7 : le cas du rectangle de type C. 348
E.20 Résumé 3.8 : le cas du rectangle de type C. 349
E.21 Résumé 3.9 : le cas du rectangle de type C. 349

F.1 Bande $\mathfrak{B}_1$ se rapprochant de la réalité du matériel en situation. 351

F.2 Résumé 1.1 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_1$. 352
F.3 Résumé 1.2 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_1$. 352
F.4 Résumé 1.3 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_1$. 352
F.5 Résumé 2.1 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_1$. 353
F.6 Résumé 2.2 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_1$. 353
F.7 Résumé 2.3 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_1$. 353
F.8 Résumé 3.1 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_1$. 354
F.9 Résumé 3.2 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_1$. 354
F.10 Résumé 3.3 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_1$. 355

G.1 Bande $\mathfrak{B}_2$ se rapprochant le plus de la réalité du matériel en situation. 357
G.2 Résumé 1.1 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$. 357
G.3 Résumé 1.2 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$. 358
G.4 Résumé 1.3 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$. 358
G.5 Résumé 1.4 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$. 359
G.6 Résumé 2.1 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$. 359
G.7 Résumé 2.2 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$. 360
G.8 Résumé 2.3 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$. 360
G.9 Résumé 2.4 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$. 361
G.10 Résumé 3.1 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$. 362
G.11 Résumé 3.2 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$ (retour à l'état initial). . . 362
G.12 Résumé 3.3 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$. 363
G.13 Résumé 3.4 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$. 364
G.14 Résumé 3.5 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$. 364

H.1 $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$ concernant la situation du plan. 367
H.2 Grille discrète utilisée pour faciliter la lecture des rectranscriptions dans le cas du plan. 368
H.3 Résumé 1.1 : le cas du plan. 369
H.4 Résumé 1.2 : le cas du plan. 370
H.5 Résumé 2.1 : le cas du plan. 371
H.6 Résumé 2.2 : le cas du plan. 372
H.7 Résumé 2.3 : le cas du plan. 373
H.8 Résumé 2.4 : le cas du plan. 374
H.9 Résumé 2.5 : le cas du plan. 375
H.10 Résumé 2.6 : le cas du plan. 376
H.11 Résumé 2.7 : le cas du plan. 378
H.12 Résumé 3.1 : le cas du plan. 379
H.13 Résumé 3.2 : le cas du plan. 380

Ancrages théoriques et méthodologiques, problématique et questions de recherche

Chapitre I

Introduction

1 Contexte de la recherche et préoccupations

Cette recherche s'inscrit dans le thème Combinatoire et Didactique du laboratoire de mathématiques de l'Institut Fourier de l'Université Grenoble Alpes.

Les membres de ce thème sont également rattachés à la structure fédérative de recherche *Maths à modeler*. Cette structure est composée d'une équipe de mathématiciens et de didacticiens des mathématiques qui s'intéressent à la transposition de l'activité mathématique auprès d'un large public : élèves, élèves en situation de handicap, étudiants, formateurs, grand public...

Une des préoccupations de notre équipe se situe sur la conception d'ingénieries didactiques pour la pratique de l'activité mathématique, grâce à la construction de situations de recherche, issues des mathématiques discrètes et à leur diffusion. Récemment, un projet de centre de culture scientifique dédié aux mathématiques nommé *la Grange des Maths* est en pourparlers et devrait se situer dans la périphérie grenobloise. Ce projet intéresse, entre autres, notre équipe. Ainsi, nos travaux s'inscrivent dans cette vision de diffusion de l'activité mathématique pour tous et ouvre alors de nouvelles questions d'ordre écologique et didactique.

2 Faire des mathématiques dans les institutions de culture scientifique : utopie ou réalité ?

Les mathématiques font partie des disciplines scientifiques trop souvent rattachées au monde scolaire ou académique. Pourtant depuis plusieurs années il y a une réelle volonté de démocratiser et disséminer les mathématiques et plus largement les sciences et leurs pratiques afin de les rendre accessibles au plus grand nombre (Blandin et Renar, 2003 ; Hamelin, 2003 ; SNCSTI, 2017). En France, un des domaines qui s'engagent dans ce paradigme est celui de la culture scientifique. En effet, différents acteurs de ce domaine jouent un rôle dans la diffusion des mathématiques et de ses pratiques comme les musées et les centres de culture scientifique par exemple. Les acteurs de ces institutions s'engagent, par leurs discours, à promouvoir les mathématiques et proposent, selon eux, des dispositifs permettant au public de devenir, le temps d'un instant, des « mathématiciens en herbe ». Ce discours montre une réelle volonté d'engager le public dans une pratique mathématique et soulève des questions d'ordre écologique et didactique qui sont encore très, voire trop peu investiguées dans les travaux didactiques autour de la médiation des mathématiques (Pelay et Artigue, 2016).

De plus, ce discours nous interroge sur ce qu'il en est dans les faits. *Actuellement, ces infrastructures proposent-t-elles des conditions (forme de médiation , temps suffisant, public volontaire...) et des ressources qui permettent d'être en adéquation avec ce discours ?* En fait, de manière générale, *peut-on réellement proposer au public de ces institutions de faire des mathématiques comme pourrait le faire un mathématicien ?*

A cette première question, nous formulons l'hypothèse, à partir de nos travaux antérieurs de master (Da Ronch, 2018b), selon laquelle, en France, très peu voire aucune structure de ce type ne propose au public des dispositifs permettant l'accès à une véritable pratique mathématique.

A cette occasion cette thèse vise d'une part, à confirmer ce manque, d'autre part, à proposer des ingénieries didactiques permettant de combler cette carence et donner l'occasion au public d'avoir accès à la pratique mathématique. Cela permettra ainsi de donner des éléments de réponse à la deuxième question formulée précédemment.

Pour ce faire, la première partie de notre travail consiste à construire un cadre théorique et méthodologique. Nous commençons par définir notre principal objet d'étude : « l'activité mathématique », à partir d'une étude épistémologique prenant en compte le point de vue des mathématiciens et des didacticiens des mathématiques. Ceci nous conduit à préciser l'acception du vocable « problème » inhérent à la pratique d'une telle activité.

Une fois ces précisions apportées, nous élaborons un cadre théorique permettant, dans un premier temps, de mettre à l'épreuve notre hypothèse. Pour cela nous utilisons d'abord l'échelle des niveaux de co-détermination didactique (Chevallard, 2010) permettant de structurer, la seconde partie de notre travail, concernant l'analyse écologique sur la place de l'activité mathématique dans ces institutions spécifiques. Nous proposons ensuite un modèle didactique, celui du *problème transposé*, qui donne un moyen d'évaluer le potentiel mathématique des ressources dans ces institutions. C'est-à-dire leur potentiel à engager le public dans la pratique mathématique. Ce modèle est par la suite réinvesti dans la construction de nos ingénieries didactiques (Artigue, 1988) et notamment au niveau de l'analyse *a priori* des situations didactiques construites (Brousseau, 1998).

La conception de cette ingénierie se déroule en trois étapes selon notre modèle, d'abord au niveau épistémologique, ensuite au niveau de la transposition didactique et enfin au niveau ergonomique, tout en sachant que ces deux dernières étapes s'enrichissent l'une de l'autre. Ainsi, la troisième partie de cette thèse concerne la conception de ces ingénieries didactiques. A cette occasion, nous partons d'un problème de recherche contemporain : le problème de pavage de Wang (Wang, 1961) et nous réalisons une large étude épistémologique et didactique en lien avec des concepts d'ergonomie (Rabardel, 1995; Tricot *et al.*, 2003) pour concevoir des situations et un milieu favorable à la pratique mathématique dans ces institutions.

La quatrième partie de ce travail concerne l'analyse des expérimentations. Partant du constat qu'il n'existe, à notre connaissance, aucune méthode efficace de retranscription de données audiovisuelles, nous avons alors développé, au début de cette thèse, un modèle didactique de retranscription pour décrire, repérer et objectiver les traces d'activité mathématique du public placé, de manière autonome, en résolution de problème. Nous réalisons à cette occasion quatre expérimentations en conditions cliniques proches du réel et opérationnalisons notre modèle afin de repérer ces traces, pour ainsi qualifier (ou non) l'activité du public d'activité mathématique.

Enfin, la dernière partie de ce travail propose un bilan général et des perspectives d'action et de recherche envisageables dans un futur proche.

Chapitre II

Définition de l'objet d'étude

Ce premier chapitre vise dans un premier temps à clarifier notre objet d'étude, à savoir ce que nous entendons par « activité mathématique ».[1] Ceci en vue d'identifier, dans les institutions de culture scientifique, les ressources[2] ayant un *potentiel mathématique*. C'est-à-dire des ressources qui favoriseraient la mise en œuvre d'une *activité mathématique* au sens que nous préciserons par la suite.

Le terme « activité mathématique » recouvre en réalité des acceptions très diverses selon le rapport personnel de chaque individu aux mathématiques mais aussi selon le cadre théorique. Par exemple, dans le cadre de la double approche (Robert et Rogalski, 2002), l'expression « activité mathématique » a un sens précisé. Dans une acception courante, on pourrait dire qu'*une* activité mathématique est une activité humaine qui peut prendre différentes formes suivant sa propre pratique — scolaire, professionnelle, privée, etc. L'acception que nous allons donner de ce terme se centre principalement autour d'un double point de vue, celui du mathématicien et celui du didacticien des mathématiques. Il offre selon nous une vision cohérente et assez précise de ce que pourrait être une *véritable* activité mathématique. De fait, nous articulons cette approche dans une dimension épistémologique pour faire ressortir les invariants significatifs qui justifieront, *in fine*, notre acception sur ce vocable. Dans un second temps, et dans la continuité de notre recherche, nous serons amenés à clarifier le terme de « problème » relevé dans ce contexte comme une ressource fondamentale dans la pratique d'une activité mathématique. Ce chapitre constitue donc une base sur laquelle nous nous appuierons tout au long de notre travail, notamment dans la construction de notre cadre théorique (voir chap. IV, p. 37).

1. Dans notre étude le terme « activité mathématique » est vu comme un objet de savoir et non comme une ressource à destination d'un public.

2. Le terme « ressource » est à prendre dans le sens de tout support matériel ou numérique donnant accès à un contenu spécifique.

1 Approche épistémologique de l'activité mathématique

1.1 Le point de vue des mathématiciens et des didacticiens des mathématiques

De prime abord, il semble difficile de donner une réponse universelle et précise à la question : **qu'est-ce qu'une activité mathématique ?** En effet, il est très probable qu'elle diffère selon le point de vue de chacun, et cela quelle que soit leur position institutionnelle — chercheur, enseignant, médiateur des mathématiques, étudiant, élève, parent, enfant, etc. Pourtant chacun d'eux est capable de se positionner sur sa propre activité mathématique en tant que sujet d'une institution : le chercheur cherche, l'enseignant enseigne, le médiateur médie, l'étudiant étudie. Cette vision primaire fait écho à plusieurs choses. D'une part le rapport personnel qu'entretient chacun de ces acteurs à son activité mathématique est lié à son assujettissement institutionnel et, d'autre part, à la place qu'il occupe au sein de son institution.

Prenons l'exemple du chercheur en mathématiques, l'une de ses activités consiste à produire puis communiquer des résultats, vus comme de nouveaux savoirs, validés par sa communauté. La manière de les communiquer suit le modèle standard proposé par Thurston (1995) : le modèle DTP (*Definition-Theorem-Proof*). Dans la communication du résultat ce modèle donne « presque » la conviction d'une certaine linéarité, voire d'une systématisation, entièrement dépersonnalisée, décontextualisée et détemporalisée de l'activité mathématique alors que le processus pour produire ce résultat n'est pas, comme nous le verrons ensuite, quelque chose de linéaire. Outre ce fait, il semblerait que ce mode de communication en trois étape (DTP) soit issu des « standards internationaux » en matière de communication — conférence, article — dans la recherche mathématique, et résulterait en fait d'un choix communautaire d'uniformisation des résultats. Ce modèle de communication donne en plus le sentiment d'une hiérarchisation de l'activité mathématique, en ce sens où l'on commencerait par définir certains objets pour produire un théorème dont ce dernier serait le résultat ultime du processus de preuve. Dans la démarche de production d'un résultat ceci est différent, puisque le processus de construction de définitions joue un rôle important dans la dialectique entre définition et preuve. En effet, le travail d'épistémologie d'Ouvrier-Buffet (2003, 2006) sur la notion de définition, montre bien que cette procédure est avant tout l'aboutissement d'un processus de recherche dans la formation d'un concept, qui lui-même résulterait de la preuve ou d'un composant de la preuve. On voit là toute l'importance de l'articulation entre l'activité de définition et celle de la preuve dans le processus de production d'un résultat alors qu'elle est occultée au niveau de la communication (modèle DTP). En outre, nous partageons également la vision des auteurs de la recherche INRP-ADIREM (Bronner *et al.*, 2003) sur ce modèle qui amènerait « à considérer les mathématiques comme un catalogue de preuves qu'il faudrait mémoriser » (p. 72), sans finalement avoir plus de précision sur la genèse du questionnement.

> A clear difficulty with the DTP model is that it doesn't explain the source of the questions (Thurston, 1995, p. 3).

On constate également que le modèle DTP répond parfaitement au *style déductiviste* déjà évoqué chez Lakatos (1984). En effet, selon cet auteur ce style résulterait du format de présentation obligatoire issue de *la méthodologie euclidienne*, qui ne montrerait que des définitions, axiomes, suivis de théorèmes et de preuves sans en préciser leur genèse.

> Dans ce style on commence par une liste précautionneuse d'*axiomes*, de *lemmes* ou de *définitions*. Les axiomes et les définitions paraissent fréquemment artificiels et d'une complication déroutante. On ne dit jamais comment ces complications sont nées. La liste d'axiomes et de définitions est suivie de *théorèmes* soigneusement mis en mots, encombrés de conditions pesantes ; il semble impossible que quiconque ait jamais pu les inventer. Le théorème est suivi de la *preuve*. [...] L'exposé se donne des airs de certitudes en commençant par des définitions déguisées, issues des preuves et à l'épreuve des monstres, et par le théorème dans sa forme définitive, faisant disparaître la conjecture primitive, les réfutations et la critique de la preuve. Le style déductiviste cache la lutte, dissimule l'aventure. L'histoire toute entière disparait. Les tentatives successives de formulation du théorème au cours de la procédure de preuve sont vouées à l'oubli cependant que le résultat final est exalté, élevé à une infaillibilité sacrée (*ibid.*, pp.183-184).

Indéniablement le modèle de communication DTP occulte la partie la plus importante du travail du mathématicien à savoir son activité de recherche, ses questions, ses pistes de résolution, qu'elles aient été fructueuses ou non, ses pensées, ses moments d'incertitude, de grands doutes, voire d'échecs. En quelque sorte, ce modèle laisse en partie dans l'ombre les (méta)-heuristiques développées par le chercheur lors de son activité effective. En effet, même si l'un des objectifs institutionnels de son travail est de produire et de communiquer ses résultats dans un langage scientifiquement reconnu et admis, c'est bien sa façon de faire, ses mécanismes et ses procédures intrinsèques menant à la recherche de vérité et de son explication, régis par les règles du jeu hypothético-déductif qui sont au cœur de son activité. Cette dernière centrée, bien évidemment, autour de problèmes mathématiques, ou pour le moins mathématisables (Halmos, 1980 ; Perrin, 2007). Pour Perrin (2007), c'est d'ailleurs la caractéristique principale de l'activité : « faire des mathématiques, c'est poser et — si possible — résoudre des problèmes » (p. 7). En outre, l'analyse du discours des mathématiciens réalisée par Godot (2005), à partir des entretiens de Nimier (1989) autour de la question, « qu'est-ce que l'activité mathématique pour vous ? », va dans ce sens [3].

> L'activité mathématique pour moi [A. Lichnerowicz], enfin, pour n'importe quel chercheur mathématique est d'une espèce assez différente : vous vous posez une question, vous vous préoccupez d'un problème [...] (Nimier, 1989 cité par Godot, 2005, p. 20).

En réponse à une commande institutionnelle, les travaux de l'INRP ADIREM (Bronner *et al.*, 2003, chap. 3) s'attachent au sens que l'on peut donner à l'idée de faire ou ne pas faire des mathématiques en classe, et se donnent pour objectif de le clarifier en s'appuyant sur trois points de vue, celui du mathématicien, du didacticien des mathématiques, mais aussi celui des *curricula* français. A cette occasion les auteurs montrent entre autres que la résolution de problèmes est l'un des invariants significatifs qui caractérise principalement l'activité mathématique. Effectivement, on remarque que les travaux de recherche issus de la didactique des mathématiques accordent une place privilégiée à la résolution de problèmes, et cela quel que soit le parti pris théorique dans lequel les auteurs se positionnent. Dans ces travaux, on se réfère à ceux de Brousseau (1998) et Chevallard (1998).

Par exemple, Brousseau (1998) affirme qu'il n'est pas question de réduire l'activité mathématique comme le simple fait d'apprendre des définitions, des théorèmes pour ensuite les utiliser et les appliquer uniquement dans certaines situations. Pour ce dernier « faire des mathématiques implique que l'on s'occupe des problèmes » (*ibid.*, p. 49).

Chevallard (1998), quant à lui, souligne l'importance de la résolution de problème dans l'activité mathématique, mais ajoute une précision importante sur le fait que le résultat au problème n'est en lui-même qu'un objectif secondaire de l'activité mathématique. Le cœur de l'activité réside davantage dans le développement de techniques régi par un environnement technologico-théorique qui le justifie. Cette précision fait écho au discours de Lichnerowicz rapporté dans les entretiens de Nimier.

> [...] le but en fait, le plus souvent le problème, est un prétexte - le but est de faire à ce propos une méthode ou de créer des êtres mathématiques... qui, dans le réseau de la connaissance mathématique, irradient (Nimier, 1989).

Nous partageons l'idée que la résolution du problème n'est pas une fin en soi, il s'agirait plutôt d'identifier les problèmes qui permettraient le développement d'une méthode ou démarche scientifique qui exigerait de l'individu qu'il

3. Évidemment d'autres dimensions de l'activité sont relevées aussi bien dans le texte de Thurston (1995) que dans les entretiens de Nimier (1989), on retrouve entre autres les dimensions sociales mais aussi psychologiques très présentes dans l'activité mathématique.

> agisse, qu'il formule, qu'il prouve, qu'il construise des modèles, des langages, des concepts, des théories, qu'il échange avec d'autres, qu'il reconnaisse celles qui sont conformes à la culture, qu'il lui emprunte celles qui lui sont utiles, etc (Brousseau, 1998, p. 49).

1.2 Notre acception de l'activité mathématique

De la citation précédente, nous ajoutons quelques précisions en référence au triplet — agir, formuler, prouver — sous-tendu par les différentes dialectiques d'action, de formulation et de validation de la Théorie des Situations Didactiques (*ibid.*). En fait, il s'agirait pour nous que l'individu se positionne comme un « explorateur », autrement dit, qu'il entre dans l'investigation du problème à la recherche du « trésor » celui de la *vérité mathématique*. La recherche de cette vérité et de son explication ne peuvent avoir lieu, selon nous, sans une articulation entre les raisonnements de plausibilité, purement inductifs, et ceux des nécessités attachés au raisonnement déductif. Ce va-et-vient permet ainsi de tisser un lien entre les différents processus d'expérimentation, de formulation et de preuve. Ces processus mettent en jeu des connaissances spécifiques que l'on nommera plus loin connaissances d'ordre II en référence à Sackur, Drouhard, Assude, Paquelier et Maurel (2005).

Par exemple, l'étude de « petits cas » est une connaissance du processus d'expérimentation. De même, la formulation de conjectures, le changement de registre de représentation et plus généralement la modélisation sont des connaissances du processus de formulation. Le processus de preuve repose sur des hypothèses telles que le principe du tiers exclu ainsi que la nécessité de preuve et l'enjeu de vérité. Il obéit à des règles de la logique telles que l'implication, la condition nécessaire et la condition suffisante. Les connaissances d'ordre II du processus de preuve sont celles des hypothèses et des règles de la logique.

Pour nous, faire des mathématiques c'est donc partir d'un *problème*, étudier *ce problème* sur des cas particuliers, se l'approprier — comprendre la règle du jeu, le but à atteindre —, valider ou invalider ses premiers résultats en identifiant ce qui est vrai de ce qui est faux et les raisons du vrai et du faux assurées par la validité logique [4]. En outre, l'acte de définition est aussi important, il permet de cerner le problème, de le délimiter voire de le simplifier, tout en étant central dans la formation de concepts mathématiques (Ouvrier-Buffet, 2003). Faire des mathématiques, c'est ainsi être capable de mobiliser des connaissances

4. La partie expérimentale est donc pour nous une phase importante de l'activité mathématique (voir p. ex., Dias, 2008 ; Gardes, 2013 ; Gardes et Durand-Guerrier, 2016 ; Giroud, 2011).

spécifiques, par exemple de voir ce qu'il y a de général ou de généralisable à partir du particulier, de formuler des conjectures à l'issue de l'observation, de les mettre à l'épreuve de la vérité, au moyen d'arguments rigoureux, dont seul le raisonnement nous assurerait de leur vérité (Gandit, 2008). C'est aussi être capable de dissocier le statut de certains énoncés émis en situation, — en particulier, être en mesure de distinguer une conjecture, d'un résultat établi qui serait soit vrai, soit faux et dont on serait capable d'en expliquer les raisons —, de distinguer aussi une condition nécessaire d'une condition suffisante mais également entrer dans la résolution d'un problème par l'étude de petits cas particuliers. Concernant le statut des énoncés, Durand-Guerrier (1996, 2003) évoque le concept d'*énoncé contingent* pour lequel « sa vérité et sa fausseté sont toutes deux possibles » (Durand-Guerrier, 1996, p. 237), dans le sens où nous n'avons pas, à un instant donné, « les moyens de savoir si l'énoncé est vrai ou faux » (*ibid.*, p. 237). Ainsi une conjecture émise peut, dans certains cas, avoir le statut d'énoncé contingent qu'on se doit de préciser afin de lever toute ambiguïté. On voit là l'importance de l'articulation entre l'expérience et la raison, entre le raisonnement inductif et le raisonnement déductif, qui donnent du sens à ce que l'on fait au cours d'une activité mathématique. Le premier permet en effet la construction d'énoncés (contingents) comme les conjectures, l'autre, quant à lui, permet de confirmer ou d'infirmer la vérité de ces dernières en leur donnant un autre statut, celui de résultats qui ne pourraient plus être ni discutables, ni réfutables. Toutes ces actions menées lors d'une activité mathématique sont le jeu, d'une part, d'un entrelacement entre le réel et l'abstrait, d'autre part, d'un processus d'intériorisation appartenant à la sphère privée de l'individu, qui évolue, par la construction de langages, de représentations jusqu'à les extérioriser dans un langage communicable plus ou moins formalisé et acceptable par d'autres. Pour conclure, avoir une activité mathématique, c'est donc accepter une certaine responsabilité, celle de la responsabilité scientifique du devoir et de l'explication de vérité.

Le sens que nous portons à l'objet avoir « une activité mathématique » que nous avons décrit ci-dessus, nous donne d'ores et déjà des conditions, qui nous semblent nécessaires pour permettre l'engagement dans une telle pratique. Tout d'abord, nous considérons donc qu'une activité mathématique s'effectue au travers d'une rencontre entre un *problème* — dont nous préciserons le sens dans les prochains paragraphes — et un individu (ou groupe d'individus) qui accepte la responsabilité scientifique d'entrée dans son univers. De ce point de vue, il faut donc avoir *un problème*. Ensuite, nous affirmons que cette responsabilité scientifique n'est possible que si d'une part, l'individu accepte d'y accorder un temps suffisant , ce qui implique que le problème détient un « quantité » épistémologique significative et, d'autre part, que l'institution à laquelle il est assujetti le lui autorise. *De facto*, ce n'est que lorsque ces conditions sont acceptées de part et d'autre que cette responsabilité scientifique est susceptible d'émerger. Évidemment, nous soulignons que lors de la première rencontre avec le *problème*, les conditions d'ordre psychologique — l'affect, la sensibilité au problème, etc. —, sont aussi des vecteurs significatifs de cet engagement. Néanmoins ils sont propres à chaque individu et relèvent donc du domaine privé auquel nous n'avons pas accès. Pour cette raison, ces conditions ne nous semblent pas pertinentes pour repérer des ressources qui auraient un potentiel à développer une activité mathématique, mais pourront, dans une certaine mesure, être mises en relation avec d'autres conditions d'ordre ergonomique, par exemple, qui sont susceptibles de les influencer.

En résumé, l'engagement dans une activité mathématique nécessite la prise d'une responsabilité scientifique au cours de la résolution d'un problème, d'où la nécessité de l'existence d'un problème ayant une « quantité » épistémologique significative et donc la mise à disposition d'un temps suffisant pour que puisse émerger cette responsabilité scientifique. Le problème et le temps alloué/nécessaire pour le résoudre sont donc significatifs, *a priori*, pour identifier, au sein de la culture scientifique, les ressources qui sont susceptibles d'avoir, ou non, un *potentiel mathématique*. Ce potentiel sera repérable grâce à la caractérisation que nous allons donner au vocable problème et nous permettra de donner des conditions pour savoir si nous sommes en présence d'un problème mathématique au sens où nous l'aurons défini.

Ainsi, l'objet « problème » est, *a priori*, une ressource fondamentale pour faire des mathématiques. **Mais alors qu'entendons-nous par problème, et quelles sont ses caractéristiques spécifiques à l'engagement dans une activité mathématique ?** Le paragraphe ci-dessous vise, justement, à clarifier ce terme en lui donnant un sens qui semble être en adéquation avec l'acception faite de l'activité mathématique que nous avons présentée jusqu'ici.

2 Problème : étymologie et définitions

De manière générale le substantif problème est plurivoque et relève la plupart du temps des domaines scientifique, philosophique, psychologique voire social pour ne citer que les plus représentés. La signification de ce terme a ainsi évolué au fil de l'histoire et le paragraphe ci-après vise à en retracer succinctement l'évolution. Pour ce faire, nous nous appuyons dans un premier temps sur des travaux déjà existants comme ceux de Priolet (2008) et de Rey (2011) autour de la notion de problème, dans une dimension étymologique et épistémologique. A cette occasion, nous montrons que l'étude épistémologique réalisée par Priolet (2008) sur cet objet reste superficielle et ne permet pas, selon nous, d'en donner une caractérisation précise. En outre, nous soutenons que les problèmes issus d'un processus de transposition, du savoir savant au savoir à enseigner ou à médier par exemple, doivent répondre à certains critères d'ordre didactique évidemment voire ergonomique selon le contexte, mais aussi et avant tout d'ordre épistémologique. Ce dernier permettrait ainsi d'éviter de dénaturer les problèmes mathématiques rencontrés dans le savoir savant. De ce point de vue et dans un second temps, nous élargissons notre étude afin d'affiner le sens épistémologique donné aux problèmes mathématiques rencontrés dans la communauté savante à partir de quelques ouvrages spécialisés (Bouvier, George et Le Lionnais, 2005 ; Cavagnaro, Haight *et al.*, 2001 ; Glenn et Littler, 1984 ; Itō, 1993 ; Schwartzman, 1994).

2.1 Les travaux de Priolet (2008) et de Rey (2011)

Priolet (2008) s'intéresse à l'enseignement et à l'apprentissage de la résolution de problèmes mathématiques. En particulier, l'auteure étudie des problèmes numériques au début du cycle 3 [5] dans une approche didactique et ergonomique. L'amorce de son travail consiste d'abord à interroger la notion de *problème* à travers un point de vue étymologique et historique. Son étude s'appuie essentiellement sur des ouvrages de type dictionnaire et encyclopédie comme le *Dictionnaire historique de la langue française* de Rey ainsi que les éditions successives du *Dictionnaire de l'Académie Française* de la fin du XVII^e siècle vers le milieu du XX^e siècle. Ensuite, elle analyse le concept de problème dans le champs des mathématiques à travers un regard épistémologique croisant les conceptions platonicienne, bourbakiste et constructiviste qui ressortent des entretiens menés par Nimier (1989).

D'un point de vue étymologique, Rey (2011) affirme que le terme problème est apparu vers la fin du XIV^e siècle emprunté au substantif latin *problema* signifiant question à résoudre. Ce dernier, lui-même venant du grec *problêma* qui signifie « ce que l'on a devant soi, et spécialement un obstacle, une tâche, un sujet de controverse, une question à résoudre » (p. 7555). Selon cet auteur (*ibid.*), le terme problème a été repris dans son sens latin dans divers domaines — philosophique, théologique, spéculatif —, et était la seule acception connue au XVII^e siècle, période pour laquelle ce vocable était particulièrement utilisé en mathématiques mais aussi en physique « pour désigner une question à résoudre par des méthodes rationnelles déductives ou par l'observation » (p. 7555). Entre le XVIII^e et XX^e siècle d'autres significations sont apparues, l'une relevant de l'ordre des difficultés pratiques, l'autre plutôt de l'ordre des difficultés affectives et psychologiques par exemple (*ibid.*). L'analyse de l'évolution des définitions

5. Élèves de 10 ans.

menée par Priolet (2008) permet de faire ressortir des points communs mais aussi des différences. Par exemple le terme de « proposition » évolue et change en prenant la forme d'une « question à résoudre ». La notion de « solution » et de « difficulté » prend un rôle prépondérant. Tout comme le remarque Priolet, il résulte de ces définitions un enracinement étymologique lié à la notion d'obstacle. On constate également que la notion de problème est étroitement liée aux notions de demande ou question, de résolution ou de solution mais aussi de démonstration (*ibid.*).

En outre, le travail de Priolet (*ibid.*) montre aussi, d'après l'analyse des entretiens de Nimier (1989), que quelle que soit la conception — platonicienne, bourbakiste ou constructiviste — à laquelle se rattachent certains mathématiciens contemporains, un problème conserve toujours son acception latine désignant une question à résoudre. Priolet (2008) présente également quelques problèmes mathématiques comme certains problèmes de Hilbert ou encore celui des sept ponts de Kœnigsberg afin d'illustrer ces différentes conceptions, mais aucune analyse sur l'aspect structurel des problèmes ni sur leur « quantité » épistémologique n'a été réalisée. Le prochain paragraphe vise donc à poursuivre cette étude à partir d'ouvrages spécialisés.

2.2 Difficultés à définir le substantif problème dans les ouvrages de mathématiques professionnelles

Dans la poursuite de ce travail et afin de pouvoir spécifier davantage ce que pourrait être un problème mathématique, nous analysons les différentes entrées de ce terme à travers des encyclopédies et dictionnaires français et internationaux spécialisés dans le domaine des mathématiques professionnelles (Bouvier, George et Le Lionnais, 2005 ; Cavagnaro, Haight *et al.*, 2001 ; Glenn et Littler, 1984 ; Itō, 1993 ; Schwartzman, 1994). Des similitudes étymologiques et historiques sont relevées dans certains ouvrages anglo-saxons.

i. The Gk. problema, something thrown forward, is a question whose solution is sought but is not known in advance. A problem in the application of mathematics is solved when formulated in such a way that it yields to known mathematical methods (Glenn et Littler, 1984, p. 162).
ii. From the Greek compoung problema. The first element is pro (q.v.) "forward," from the Indo-European root per- "forward, througt." The second element is from Greek ballein "to throw," from the Indo-European root gwel [...] A problem is a question or a puzzle "throuwn out (= forward)" to you that you are expected to try to solve (Schwartzman, 1994, p. 173).

Néanmoins pour d'autres l'entrée de ce terme est soit absente, soit complétée d'un complément du nom pour en préciser le type — problème de décision —

ou pour en exhiber des exemples comme : *Abel's problem*, *Archimedes' problem*, *etc.* (Glenn et Littler, 1984 ; Itō, 1993). Cependant une des ressources que nous avons analysée attire particulièrement notre attention. Il s'agit du Dictionnaire des mathématiques de Bouvier, George et Le Lionnais (2005) qui possède cette entrée au sens strict — sans ajout de complément. En revanche, la définition donnée n'est pas une définition au sens conventionnel du terme (voir iii ci-après), puisque seuls des exemples de problèmes sont donnés (*ibid.*, pp. 680-681).

iii. Problème, Problèmes

- *Problème du coloriage des cartes.*
- *Problème d'Ulam.*
- *Problème de la duplication du cube.*
- *Problème des n-corps.*
- *Problème des quatre couleurs.*
- *Problème des sept ponts de Kaliningrad ou de Kœnigsberg.*
- *Problème de quadrature du cercle.*
- *Problème de la trisection de l'angle.*
- *Problèmes de Hilbert.*
- *Problèmes de Waring.*
- etc.

Cette analyse succincte à travers différents ouvrages français et anglo-saxons montre que le terme problème est difficile à définir précisément. Certaines origines étymologiques ressortent, mais la plupart des auteurs s'abstiennent de donner une définition et se cantonnent à fournir des exemples historiques de problèmes, issus de différentes branches des mathématiques, qui ont animé ou animent encore la communauté scientifique. Par exemple, le problème d'Ulam ou certains problèmes de Hilbert ne sont pas encore résolus au XXIe siècle. Par la suite, le prochain paragraphe tentera de donner un sens plus précis du vocable « problème » à travers une approche épistémologique et historique.

3 Notion de problème dans la sphère des mathématiciens

Entre le XVIIe et le XVIIIe siècle, Leibniz a sans doute été le premier mathématicien à s'intéresser à la notion très large de problèmes mathématiques. Il pensait qu'il était possible de résoudre tous les problèmes mathématiques en imaginant une machine capable de manipuler des symboles afin de déterminer de manière binaire si un énoncé mathématique était soit vrai soit faux (Bouveresse, 2001). La pensée qui consiste à dire qu'il est possible de résoudre tout problème mathématique a également été partagée par Hilbert (1902). En effet, ce dernier avait la conviction que tout problème mathématique devait nécessairement posséder une solution directe d'existence ou une démonstration de son impossibilité.

> Le fait remarquable dont nous venons de parler et certains raisonnements philosophiques ont fait naître en nous la conviction que partagera certainement tout mathématicien, mais que jusqu'ici personne n'a étayée d'aucune preuve, la conviction, dis-je, que tout problème mathématique déterminé doit être forcément susceptible d'une solution rigoureuse, que ce soit par une solution directe à la question posée, ou bien par la démonstration de l'impossibilité de la résolution, c'est-à-dire la nécessité de l'insuccès de toute tentative de résolution (*ibid.*, p. 68).

Hilbert (*ibid.*) poursuit même en disant :

> Cette conviction de la possibilité de résoudre tout problème mathématique est pour nous un précieux encouragement pendant le travail. Nous entendons toujours résonner en nous cet appel : *Voilà le problème, cherches-en la solution. Tu peux la trouver par le pur raisonnement. Jamais, en effet, mathématicien ne sera réduit à dire « Ignorabinus* [6] » (*ibid.*, p. 69).

Cette conviction a pourtant été ébranlée par Gödel (1931) qui, grâce à son théorème d'incomplétude, a permis de répondre de manière négative à la question de la cohérence des mathématiques issue du programme d'Hilbert (1902). A partir de là se fut, comme le souligne Ghys (2012), « un grand changement dans la vision des mathématiciens du *vrai* et du *faux* » (p. 4).

En 1928 le « Problème de la décision » nommé ENTSCHEIDUNGSPROBLEM a été explicité et formulé par Hilbert et Ackermann et son indécidabilité, au sens algorithmique, a été donnée par Turing (1936) et Church (1936) quasiment au même moment. Le point fort de Turing et de Church a été de montrer qu'on saisit ainsi toutes les mathématiques et qu'on peut s'intéresser à leur « puissance » : calculabilité au sens de Turing ou décidabilité au sens de Gödel. Lorsqu'on parle de problèmes de décision, on est dans la formulation où la réponse au problème est de nature binaire oui, non. Dès lors que l'on s'intéresse à des problèmes de décision, il se peut, dans certains cas, que la solution soit inatteignable ou qu'il ne soit pas toujours possible de conclure à la question du problème (voir p.ex., ENTSCHEIDUNGSPROBLEM). C'est le cas notamment lorsqu'on s'intéresse à la décidabilité/calculabilité, au sens de la théorie de la calculabilité, de certains problèmes de décision. Par exemple lors d'un voyage ayant un nombre infini d'étapes, pour lequel chaque étape comporte un numéro d'identification distinct, à la question, « arrivera-t-on sur le numéro 25 à la 10ᵉ étape ? », est un problème décidable, puisqu'il existe en théorie un algorithme, qui en un nombre fini d'étapes pourra décider si oui ou non nous sommes bien sur ce numéro. En revanche, à la question, « arrivera-t-on sur le numéro 25 ? », est sous-jacent à un problème indécidable. Effectivement, le voyage possédant un nombre infini d'étapes, il se peut qu'on arrive sur le numéro 25 à la 3ᵉ étape, comme à la

6. Nous ne savons pas et nous ne saurons jamais.

150e, voire que l'on erre d'étape en étape sans jamais atteindre ce dernier... Historiquement, l'un des premiers problèmes démontré indécidable a été le problème de l'ARRÊT qui a permis, entre autres, à Turing (1936) de démontrer l'indécidabilité de l'ENTSCHEIDUNGSPROBLEM grâce à une réduction à partir d'ARRÊT.

De ces questions de décidabilité/calculabilité résultent des questions liées à des problèmes de complexité algorithmique. En effet, bien qu'en théorie la réponse à un problème décidable/calculable puisse être décidée/calculée par un algorithme en un nombre fini d'étapes, il se peut qu'en réalité cet algorithme soit impraticable car sa complexité en temps ou en espace est très voire trop grande. C'est ainsi que la théorie de la complexité s'est construite à partir d'une classification des problèmes en fonction de leur classe de complexité algorithmique en temps et en espace (voir p. ex., Cook, 1971 ; Garey et Johnson, 1979 ; Karp, 1972 ; Savitch, 1970).

De plus, on retrouve également dans la communauté mathématique plusieurs types de problèmes comme ceux relevant de l'existence, de la caractérisation, de la reconnaissance ou encore de l'optimisation... et on peut, au moins partiellement, formuler tous ces problèmes comme des problèmes de décision où l'on peut répondre par oui ou par non à la question.

Après ce bref aperçu historique, on va tâcher d'identifier des invariants concernant la formulation des problèmes mathématiques. Plus précisément, on observera la structure, c'est-à-dire la syntaxe des problèmes tels qu'ils sont formulés dans la communauté mathématique.

3.1 Syntaxe d'un problème mathématique

Dans la liste des problèmes mentionnés précédemment (voir iii, p. 16), on retrouve bien cet enracinement étymologique puisque, selon nos recherches, les problèmes sont effectivement des questions à résoudre, des phrases de type injonctif formulant une demande ou un énoncé mathématique tel qu'une conjecture à démontrer.

Prenons le cas des problèmes de Hilbert. Au début du XXe siècle, ce dernier balaye divers domaines des mathématiques pour en extriquer une liste de problèmes considérés comme fondamentaux dans la recherche mathématique. Ces problèmes sont énoncés lors d'une conférence en 1900 puis publiés à l'issue de celle-ci dans un papier (Hilbert, 1902)[7]. Ce texte (*ibid.*) met en avant vingt-trois problèmes inhérents à différents domaines des mathématiques qui ont animé ou animent encore la recherche au XXIe siècle, puisque certains de ces problèmes

7. Traduit de l'allemand par L. Laugel.

sont encore ouverts ou partiellement résolus. De cette liste, et sans en expliquer les détails, on observe une certaine structure des formulations des problèmes qui sont présentés sous la forme d'une question, d'une demande ou bien d'un énoncé mathématique comme la conjecture.

- Problème de Goldbach : « on se demande si tout nombre pair est représentable par une somme de deux nombres premiers » (*ibid.*, p. 86).
- Problème des nombres premiers jumeaux [8] : « y a-t-il une infinité de couples de nombres premiers ayant comme différence le nombre 2 ? » (*ibid.*, p. 86).
- Problème de l'axiomatisation de la physique sur le modèle mathématique : « traiter sur ce modèle les branches de la Physique où Les Mathématiques jouent aujourd'hui un rôle prépondérant ; ces branches de la Science sont, avant toutes autres, le Calcul des Probabilités et la Mécanique » (*ibid.*, p. 81).
- Problème de la transcendance [9] de certains nombres : « la puissance α^β, pour une base algébrique α et un exposant algébrique irrationnel β, comme par exemple le nombre $2^{\sqrt{2}}$ ou $e^\pi = i^{-2i}$, représente toujours un nombre transcendant ou pour le moins irrationnel » (*ibid.*, pp. 84-85).

Nous avons fait ce choix de problèmes parmi la liste des vingt-trois pour deux raisons. La première est qu'ils sont présentés dans un langage « accessible ». La deuxième vient du fait qu'ils permettent de mettre en évidence l'aspect structurel d'un problème mathématique dans la communauté savante. Par exemple, le problème de Goldbach ou de l'axiomatisation de la physique est présenté sous la forme d'une demande. On retrouve en effet des verbes tels que « demander » ou « traiter » qui indiquent clairement une assignation. Le problème des nombres premiers jumeaux est, quant à lui, présenté sous la forme interrogative avec une question clairement identifiable. Pour finir, le problème de la transcendance est lui présenté comme un énoncé mathématique de type conjecture. Il s'agit en fait d'en démontrer sa vérité ou sa fausseté.

Parmi la liste donnée par Bouvier, George et Le Lionnais (2005) on trouve le problème de la duplication du cube (voir iii, p. 16). Ce problème consiste à savoir, si étant donné un cube, il existe une construction à la règle et au compas permettant de le dupliquer de telle sorte que le volume initial soit doublé. On voit ici que le problème porte sur un objet donné : un cube, à prendre dans le sens de n'importe quel cube de côté a réel, et une condition : l'utilisation de la règle (non graduée) et du compas qui restreint ce problème. Or, on sait depuis Wantzel (1837) que le problème de la duplication du cube est insoluble. Autrement dit,

8. Deux nombres premiers $p_1 > p_2$ sont jumeaux si $p_1 - p_2 = 2$.
9. Un nombre transcendant est un nombre irrationnel, réel ou complexe qui n'est racine d'aucune équation polynomiale à coefficients rationnels.

qu'il n'existe aucune construction à la règle non graduée et au compas permettant de répondre de manière positive au problème de la duplication du cube. En revanche, si nous modifions à présent la donnée de l'énoncé, en prenant non plus un cube, mais un carré de côté a réel le problème est alors évident, puisque pour doubler l'aire d'un carré, il faut et il suffit de savoir construire un segment de longueur $\sqrt{2}$, construction qui est tout à fait possible en utilisant uniquement la règle non graduée et le compas. Par cet exemple, on voit ici toute l'importance des données et des conditions qui jouent un rôle à la fois dans l'approche de la résolution du problème (algébrique, géométrique), la difficulté, mais aussi sur la solution exhibée (existence, inexistence).

De ces exemples, on peut tirer de manière générique une structure « syntaxique » dans la formulation d'un problème comme un couple formé d'une question générale [10] et d'un ensemble de données et de conditions permettant d'en délimiter la portée. D'ailleurs, pour Garey et Johnson (1979), la structure dans la formulation d'un problème est une question générale à laquelle il faut répondre, et dont les données seraient les paramètres ou les variables libres du problème pour lesquelles aucune valeur ne serait spécifiée, et dont la solution devrait respecter certaines conditions du problème.

> For our purposes, a problem will be a general question to be answered, usually possessing several parameters, or free variables, whoses values are left unspecified. A problem is described by giving : a general description of all its parameters, and a statement of what properties the answer, or solution, is required to statisfy. An instance of a problem is obtained by specifying particular values for all the problem parameters (*ibid.*, p. 4)

La portée générale de la question est à prendre au sens où les valeurs des paramètres ne sont pas fixées, elles sont libres. Dès lors qu'au moins une des valeurs est fixée, on parlera alors de problème instancié, c'est-à-dire d'un sous-problème spécifique à une instance fixée du problème initial. Ces auteurs (*ibid.*) illustrent leur définition par un problème classique d'algorithmique celui du voyageur de commerce : étant donné n villes et les distances qui les séparent, il s'agit de déterminer le chemin le plus court passant une et une seule fois par chacune des n villes jusqu'à retourner à la ville de départ. Une instance du problème reviendrait à fixer par exemple le nombre de villes muni de leurs distances comme le propose Garey et Johnson (*ibid.*) dans le cas où $n = 4$ (figure II.1).

10. Un problème peut tout aussi bien être décrit comme une phrase de type injonctive formulant une demande ou sous la forme d'un énoncé mathématique de type conjecture. Quoi qu'il en soit on peut toujours les reformuler sous la forme d'une question.

Cette instanciation n'a aucun intérêt mathématique, puisqu'elle est évidente à résoudre étant donné que le nombre de cas à traiter, ici $4! = 24$ est relativement faible. Néanmoins de manière générale lorsque n est grand, ce problème est difficile à résoudre puisque tous les algorithmes déterministes connus sont d'une complexité algorithmique exponentielle (Karp, 1972).

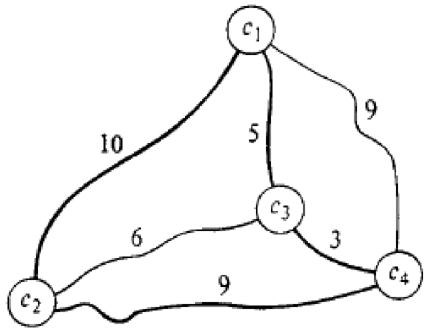


***Figure II.1** – Instanciation du problème du voyageur de commerce : le cas où $n = 4$*

Ces quelques exemples, bien que non exhaustifs, nous permettent d'inférer un premier critère épistémologique. Il concerne l'aspect structurel d'un problème mathématique, que nous avons nommé aspect « syntaxique » dans la formulation d'un problème, et qui rejoint l'acception faite par Garey et Johnson (1979).

Dans le prochain paragraphe, nous évoquerons un deuxième critère de nature épistémologique sur le sens d'un problème mathématique. C'est-à-dire sur son aspect sémantique.

3.2 Sémantique d'un problème mathématique

Pour faire des mathématiques nous avons vu qu'il faut un problème et que pour le résoudre il est nécessaire de lui accorder un temps suffisant, ce qui implique que le problème doit détenir une « quantité » épistémologique significative. Dans le sens que pour un problème donné, son *espace-problème* au sens de Giroud (2011) ou son univers doit être suffisamment consistant. C'est-à-dire qu'un bon nombre de problèmes connexes doit graviter dans cet espace et que ce problème doit entretenir une certaine proximité avec les autres. Cette proximité s'établit par des relations construites à partir de la formulation du problème : portée de la question, instances du problème différentes, mais aussi grâce aux invariants de preuves qui permettent de les résoudre — au moins partiellement. Ainsi, plus le problème a un univers riche, plus il a de sens et plus il possède une quantité épistémologique significative qui demandera donc d'allouer un temps suffisant pour tenter de le résoudre. On dira qu'un problème est sémantiquement intéressant lorsqu'il existe un bon nombre de connexions dans son univers qui permet de dire que ce problème n'est pas un problème isolé et il y a donc du sens voire un intérêt de le résoudre.

Ainsi, au niveau épistémologique nous retenons l'aspect syntaxique et l'aspect sémantique d'un problème. Le premier fait référence à la nomenclature décrite par Garey et Johnson (1979) qui caractérise la structure dans la formulation d'un problème mathématique comme un couple formé d'une question et d'un ensemble d'instances et de conditions. Le deuxième fait référence au fait que le problème doit avoir du sens, c'est-à-dire posséder un espace-problème au sens de Giroud (2011) suffisamment riche permettant de détenir une quantité épistémologique significative pour y accorder un temps de réflexion suffisant pour y faire des mathématiques tel que nous l'attendons.

Dans la section qui suit, on ne se situe plus au niveau épistémologique sur la notion de problème mais au niveau du didactique. On va donc chercher à définir ce vocable à cette échelle.

4 Notion de problème en « éducation mathématique »

4.1 Une pluralité d'acceptions

Le terme de problème en *mathematics education* est loin de faire consensus dans la communauté. En nous centrant dans le cadre scolaire, Xenofontos et Andrews (2014) rappellent en effet qu'il a longtemps été employé dans la littérature comme s'il ne posait aucun souci, comme si tous les acteurs de la communauté voyaient à travers ce terme une acception unique et partagée de tous. Or de nombreux travaux de recherche en *mathematics education* soulignent le fait que ce terme prend des significations diverses et n'est pas toujours utilisé de la même manière selon la culture, le contexte et bien évidemment les auteurs (Borasi, 1986 ; Hoosain, 2004 ; Schoenfeld, 1992). Dans l'article de Hoosain (2004), l'auteur propose un état des lieux des différentes définitions du terme problème proposées dans la littérature en *mathematics education* (tableau II.1, p. 24). Au même titre que cet auteur, on constate que la plupart de ces définitions, bien qu'assez générales, mettent en avant le fait que l'on définit un problème lorsque la réponse n'est pas immédiate, dans le sens qu'une procédure algorithmique n'est pas connue et que les connaissances initiales ne suffisent pas à le résoudre immédiatement (voir les définitions de Kantowski, Lester, Buchanan, McCleod et Blum et Niss du tableau II.1, p. 24). D'ailleurs ces points sont en fait antagonistes à la conception qu'ont les étudiants et enseignants de mathématiques sur ce terme (voir Frank, 1988 ; Hoosain, 2004 ; Thompson, 1989). Cette opposition tient au fait que la distinction sur la nature des problèmes mathématiques [11] rencontrée en *mathematics education* n'est pas claire (exercice/problème) et amène parfois à des croyances et conceptions faussées du terme problème et conduit indubitablement à une conception naïve de l'activité mathématique (voir p.ex., Godot, 2005).

De ces définitions précédemment citées, Hoosain (2004) définit à son tour le terme problème, et ce de façon plus précise.

> The essence of these definitions is that a problem is a task or experience which is being encountered by the individual for the very first time and, therefore, there is no known procedure for handling it. The individual has to design his/her own method of solution drawing upon the various skills, knowledge, strategies, and so forth, which have been previously learned. What the individual does in the process of working towards a solution is referred to as problem solving; so the emphasis is not on the answer but on the processes involved. [...] A problem is relative to the individual; what may constitute a problem for one person may not be a problem for another because he/she might have encountered it before (*ibid.*, p. 6).

Tout d'abord, nous partageons bien entendu l'idée qu'un problème ne doit pas faire appel à une procédure déjà connue, sinon la démarche pour le résoudre n'a aucun intérêt mathématique si ce n'est son réinvestissement. Ce point n'est d'ailleurs pas totalement partagé dans la communauté de la didactique française : au premier degré où « la résolution de problèmes » recouvre, par exemple, la résolution des problèmes arithmétiques simples, où ces derniers se résolvent le plus souvent par une simple opération arithmétique et qui se répète, éventuellement, en changeant les valeurs numériques ou le contexte sémantique dans la formulation des « problèmes ».

Par ailleurs, Glaeser (1971) souligne qu'un problème « est une question dont on ne connaît pas la réponse ». Il ajoute à cela au même titre que Pólya (1967) le fait que la réponse ne doit pas être triviale, sinon il n'y a guère de problème. En outre, Hoosain (2004) soutient le fait que le sujet doit lui-même concevoir sa propre démarche de résolution à partir de ses compétences, connaissances et stratégies acquises antérieurement. Nous n'avons donc pas affaire à un problème lorsque la démarche de résolution est indiquée à la lecture de l'énoncé comme le rappelle Glaeser (1971). Une dimension psychologique est apportée à la définition d'Hoosain (2004) sur le point qu'un problème est relatif à une personne, dans le sens qu'il peut être un problème pour l'un et une simple tâche routinière pour l'autre. Cette dimension psychologique accordée au problème est également partagée par le philosophe Brun (1990).

11. Le lecteur ou la lectrice pourra aller voir les articles de Schoenfeld (1992) et de Borasi (1986) qui traitent en partie de la nature des problèmes rencontrés en *mathematics education*.

Auteur·s	Définition du terme problème
Kantowski (1977)	An individual is faced with a problem when he encounters a question he cannot answer or a situation he is unable to resolve using the knowledge immediately available to him. He must then think of a way to use the information at his disposal to arrive at the goal, the solution of the problem (Kantowski, 1977 cité par Hoosain, 2004, p. 2).
Mervis (1978)	A question or condition that is difficult to deal with and has not been solved (Mervis, 1978 cité par *ibid.*, p. 2).
Lester (1980)	A problem is a situation in which an individual or group is called upon to perform a task for which there is no readily accessible algorithm which determines completely the method of solution (Lester, 1980 cité par *ibid.*, p. 2).
Buchanan (1987)	non-routine problems that required more than ready-to-hand procedures or algorithms in the solution process (Buchanan, 1987 cité par *ibid.*, p. 2).
McLeod (1988)	"those tasks where the solution or goal is not immediately attainable and there is no obvious algorithm for the student to use (McLeod, 1988 cité par *ibid.*, p. 2).
Blum et Niss (1991)	challenge somebody intellectually who is not in immediate possession of direct methods/procedures/algorithms, etc. sufficient to answer the question (Blum et Niss, 1991 cités par *ibid.*, p. 2).
Kilpatrick (1985)	A situation in which a goal is to be attained and a direct route to the goal is blocked (Kilpatrick, 1985 cité par *ibid.*, p. 3).
Mayer (1985)	A problem occurs when one is faced with a "given state" and one wants to attain a "goal state" (Mayer, 1985 cité par *ibid.*, p. 3).

Tableau II.1 – *Différentes définitions du terme problème recensées par Hoosain (ibid.) en mathematics education.*

> Dans une perspective psychologique, en effet, un problème est généralement défini comme une situation initiale avec un but à atteindre, demandant à un sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but. Il n'y a problème que dans un rapport sujet/situation, où la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire. C'est dire aussi qu'un problème pour un sujet donné peut ne pas être un problème pour un autre sujet, en fonction de leur niveau de développement intellectuel par exemple (Brun, 1990, p. 2).

Cette dimension psychologique est intrinsèquement liée à la notion de difficulté d'un problème clairement évoquée par Glaeser (1971). Effectivement un problème peut être difficile mais le sujet doit sentir qu'il progresse. « Une question inabordable n'est pas un problème mais un casse-tête » (*ibid.*). Ce point de vue est également partagé par Hilbert (1902), dans le sens qu'un « problème mathématique doit être difficile mais non pas inabordable, sinon il se rit de nos efforts » (p. 59). Tout comme les problèmes mathématiques rencontrés dans la sphère savante, l'énoncé d'un problème mathématique, sinon le problème lui-même n'est pas définitif. « Il peut être modifié, précisé, restreint, ou au contraire, envisagé dans le cadre d'une solution générale » (Glaeser, 1971). Dans ce sens, il n'est pas fermé et doit être suffisamment ouvert pour pouvoir être modifié. Cette modularité n'est possible que si une épistémologie artificielle du problème mathématique savant est recréée, c'est-à-dire si certaines conditions d'ordre épistémologique sont respectées comme les aspects syntaxique et sémantique rencontrés dans l'univers savant. Si ces conditions fondamentales sont absentes, alors on ne parlera plus d'un problème mais d'un *casse-tête* mathématique, non pas au sens de Glaeser, mais dans une vision plus large où un casse-tête se présente :

> [. . .] sous la forme d'un couple formé d'une question particulière assimilée à une valeur d'une variable bien précise d'une situation donnée. Cette instanciation ne laisse a priori aucune place à paramétrisation et sa résolution ne dépasse pas le simple raisonnement par tâtonnements ou essais-erreurs. La pluralité des raisonnements utilisés pour le résoudre intervient plutôt du côté du concepteur que de l'utilisateur [...](Da Ronch, 2019a, p. 51).

Glaeser (1971) évoque également deux autres aspects dans sa définition du problème. Le premier vient du fait que le problème doit être motivant. Cet aspect semble relever, *a priori*, du domaine privé d'un sujet et est propre à chacun. Néanmoins au moins deux facteurs extérieurs peuvent jouer un rôle dans le processus de motivation. Le premier est le contexte (intra/extramathématique) dans lequel le problème est posé qui peut favoriser cette motivation. Le deuxième est, quant à lui, relatif à l'aspect matériel permettant de jouer un rôle de levier dans l'enrôlement de toute personne dans la résolution du problème, et donc, à motiver le sujet dans le processus de recherche de solutions lors de la résolution du problème. Le deuxième aspect évoqué par Glaeser (1971) est la guidance, c'est-à-dire qu'il ne faut pas que la résolution du problème soit *téléphonée* par l'enseignant, sinon il n'y a plus d'intérêt pour celui qui résout le problème. Cet aspect s'étend bien entendu à toute personne (médiateur, parent, etc.) susceptible de transformer un problème en de simples tâches successives à réaliser pour le résoudre.

4.2 Ce que nous retenons de cette littérature

Selon nous, un problème mathématique dans la sphère éducative, au sens large, n'est pas un problème mathématique communément rencontré dans la sphère savante, c'est un *problème transposé* où l'épistémologie du problème mathématique savant est recréée de manière « artificielle » grâce à des conditions d'ordre épistémologique évidemment, mais aussi grâce à des conditions d'ordre didactique voire ergonomique permettant cette transposition (figure II.2, p. 27). *Un problème transposé* doit donc respecter des conditions épistémologiques relevant à la fois de l'aspect syntaxique (question,[12] instances, conditions) et de l'aspect sémantique, c'est-à-dire que le problème doit avoir du sens et ce sens est donné grâce à une quantité épistémologique significative repérable par les nombreux problèmes connexes qui gravitent dans son univers.

Un *problème transposé* doit ensuite vérifier des critères d'ordre didactique notamment sur le choix des variables ou conditions et de leurs valeurs associées qui ont un impact sur la compréhension du problème mais aussi sur le travail mathématique d'un sujet. Un choix arbitraire de ces variables pourrait faire passer un problème en un simple casse-tête mathématique au sens où nous l'entendons (Da Ronch, 2019a). L'analyse *a priori*, c'est-à-dire l'analyse mathématique du problème et didactique de la situation sous-jacente, est alors fondamentale quant aux choix de la nature et des valeurs des variables ou des conditions qui façonnent le problème. Il en résulte qu'un choix réfléchi ne permet donc pas, *a priori*, un accès immédiat à la solution et ne doit en aucun cas être indiqué. En outre, une condition nécessaire, mais non suffisante comme le rappelle Radford (1996) est qu'avant de résoudre un problème, il faut bien évidemment le comprendre. Autrement dit, un problème doit être *clair* et *limpide* comme le souligne Hilbert (1902). Bien entendu ceci est une affaire de point de vue. On croit comprendre, mais on se rend compte de la nécessité de choisir certaines conditions pour réduire la difficulté... Ajoutons à cela que le problème

12. Cette question peut être parfois remplacée sous la forme d'une demande de type injonctif ou d'un énoncé mathématique de type conjecture. Toutefois, la forme traditionnelle interrogative semble en général privilégiée.

doit être dépourvu de tout formalisme qui pourrait nuire à sa compréhension. Ces points sont proches de la nomenclature des Situations de Recherche pour la Classe (SiRC) proposée par Grenier et Payan (2003).

Enfin, un *problème transposé*, en particulier hors cadre scolaire, doit respecter également des critères d'ordre ergonomique. En effet l'environnement n'étant pas le même qu'en classe ordinaire, le support matériel s'avère dès lors primordial pour entrer dans la résolution du problème, pour se l'approprier dans la phase d'exploration de cas particuliers et peut, dans une certaine mesure, jouer un rôle positif dans le rapport aux mathématiques et la motivation grâce au caractère ludique du matériel. Ce dernier doit être alors construit de telle manière que, d'une part, il suscite l'envie et l'adhésion du sujet d'entrer dans la résolution du problème, d'autre part, qu'il permette une exploration de cas, sans perdre de vue le caractère général du problème. Pour ce faire le milieu matériel doit avoir une certaine modularité permettant d'instancier le problème sur de nombreux cas, laissant alors entrevoir cette généralité entrelacée entre le monde concret et le monde des idées tant important dans l'*activité mathématique*.

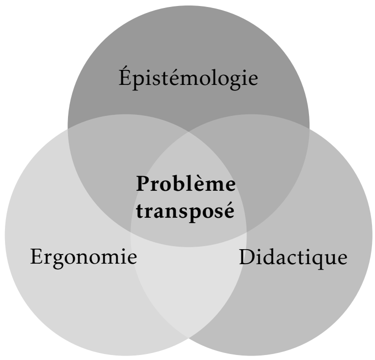


Figure II.2 *– Problème transposé décrit selon trois composantes : (i) épistémologie, (ii) didactique, (iii) ergonomie.*

5 Conclusion et ouvertures

Objectif et sens donné à l'activité mathématique

Ce chapitre avait pour objectif de définir notre objet d'étude à savoir qu'est-ce que nous entendions par « activité mathématique » et le concept sous-jacent de « problème » à la fois d'un point de vue épistémologique et didactique. Ceci dans le but *in fine* d'avoir des premiers éléments qui nous permettront de construire un cadre théorique afin d'évaluer qualitativement le potentiel mathématique d'une ressource au sein du domaine de la culture scientifique et de concevoir, ensuite, des ressources ayant ce potentiel. Le sens donné à l'activité mathématique montre l'importance des articulations entre le réel et l'abstrait, les raisonnements inductifs et les raisonnement déductifs inhérents dans l'entrelacement entre le particulier et le général. Il est ressorti qu'un des moyens pour atteindre ces différents aspects relève du processus de résolution de problèmes, comme étant le maître dans l'art de faire des mathématiques, autant dans la communauté des mathématiciens que des didacticiens des mathématiques. Cette pratique mathématique n'est possible que si l'individu prend la responsabilité scientifique au cours de la résolution du problème. Il est alors fondamental pour faire des mathématiques de proposer des problèmes où les épistémologies de ces derniers sont recréées, de manière artificielle, d'un point de vue syntaxique et sémantique pour lequel ce dernier aspect implique une quantité épistémologique significative qui permet de lui accorder un temps de résolution suffisant afin d'entrer dans une réelle pratique mathématique.

Problèmes savants et problèmes transposés

Dans un second temps, nous avons tenté de définir ce que pouvait être un problème mathématique à la fois dans la communauté savante et la communauté éducative. Certains ouvrages historiques de la langue française et travaux de recherche en didactique ont permis de retracer l'évolution étymologique et historique du sens donné au substantif problème à travers les siècles. Nous avons montré qu'il n'en reste qu'une acception superficielle relevant principalement d'idées clés comme l'idée de question ou demande, de résolution ou de solution, ou encore de démonstration. L'analyse d'ouvrages spécialisés dans le domaine des mathématiques professionnelles a permis de montrer également toute la difficulté à définir précisément ce substantif : absence de définition, ajout de complément du nom pour préciser le type de problème, exemples de problèmes mathématiques en guise de définition. Néanmoins, certains des exemples proposés dans ces ouvrages, nous ont permis d'analyser la structure dans la formulation des problèmes mathématiques rencontrés dans l'univers savant. Nous avons alors relevé d'une part, l'aspect « syntaxique » ou structurel dans la formulation d'un problème comme un couple formé d'une question de portée générale et d'un ensemble d'instances et de conditions (Garey et Johnson, 1979). D'autre part, nous avons aussi relevé l'aspect sémantique des problèmes mathématiques rencontrés où la quantité épistémologique d'un problème doit être significative. C'est-à-dire que son univers doit être riche de relations entretenues avec d'autres problèmes connexes et montre ainsi que ce problème a du sens et n'est pas un problème isolé avec peu d'intérêt en soi.

En outre, les problèmes mathématiques rencontrés dans l'univers savant semblent assez différents de ceux relevant de l'éducation mathématique. En effet, le sens que nous portons à la notion de problème issu d'un processus de transposition se fonde en partie sur nos convictions épistémologiques relatives à l'activité mathématique. Nous soutenons effectivement que pour développer une activité proche de celle des experts, et éviter ainsi de dénaturer cette pratique, il faut avoir des problèmes consistants, c'est-à-dire ayant une quantité épistémologique significative. De fait, un ancrage épistémologique du problème issu de ce processus semble être une condition nécessaire pour assurer la reproductibilité de l'activité mathématique au sens où nous l'entendons. Cette condition nécessaire, relevant de critères d'ordre épistémologique liés à la fois à l'aspect syntaxique dans la formulation du problème et à l'aspect sémantique par sa quantité épistémologique, n'est cependant pas suffisante. En effet, bien que nous soutenions qu'il faille reconstituer une épistémologique artificielle au problème transposé, d'autres dimensions du problème sont également à prendre en considération. En particulier celles de l'ordre de la transposition didactique.

À partir de l'étude de nombreux travaux de recherche en *mathematics education* et en didactique des mathématiques autour de la notion de problème, nous avons mis en perspective un certain nombre de conditions fondamentales permettant d'affiner notre acception de ce vocable. Par exemple, nous retenons qu'une bonne compréhension du problème, qu'un choix réfléchi sur les natures et les valeurs des variables du problème, ainsi que l'absence totale d'éléments de résolution sont des critères didactiques primordiaux pour un « bon » problème. Cette condition relevant de l'ordre du didactique n'est, elle non plus, pas suffisante. Des conditions d'ordre ergonomique qui sont prépondérantes hors cadre scolaire sont également à prendre en considération.

Effectivement, dans notre contexte de recherche, du matériel manipulable est nécessaire pour permettre l'appropriation du problème. Ainsi, en nous appuyant sur la littérature relevant de l'ergonomie cognitive et en particulier des environnements informatiques pour l'apprentissage humain [13] (Rabardel, 1995; Tricot *et al.*, 2003), nous retiendrons, pour la construction de notre cadre théorique développé dans un prochain chapitre, trois critères adaptés à notre contexte, *l'utilité*, *l'utilisabilité* et *l'acceptabilité* issus des travaux de Tricot *et al.* (2003). Ces critères, nous permettrons d'évaluer la dimension ergonomique d'une ressource. Nous discuterons aussi des phénomènes de détournement de l'artefact de ce pourquoi il a été construit initialement, communément appelés en ergonomie cognitive phénomènes de *catachrèse* (Rabardel, 1995).

Cette triple approche, à la fois épistémologique, didactique et ergonomique, fondera notre modèle du *problème transposé* que nous développerons ensuite dans notre cadre théorique.

13. Dont l'abréviation s'écrit EIAH.

Chapitre III

Recension des écrits scientifiques sur la médiation des mathématiques dans la communauté didactique

Nous présentons dans un premier temps un état des lieux des travaux en didactique des mathématiques sur la médiation mathématique. Nous verrons à cette occasion que ce domaine est assez récent et encore peu investigué dans la communauté de la didactique francophone. Les recherches à ce sujet sont encore en construction ou très largement ouvertes suivant le contexte de médiation [1]. Cela ouvre donc de réelles perspectives de recherche dans ce champs d'autant plus que le domaine relevant de la diffusion des mathématiques est, dans certains contextes spécifiques, un domaine actuellement en plein essor dans notre société (voir chap. VI).

1 Nos travaux antérieurs à cette thèse

Nos premier travaux de recherche [2] (Da Ronch, 2018a,b, 2019a,b, 2021) nous ont conduits à nous interroger s'il était possible de faire des mathématiques dans un contexte d'exposition [3]. A cette occasion, nous avons montré que cela dépendait fortement des ressources proposées. Ainsi, nous avons donné une

1. Dans ce texte, nous choisissons d'employer les termes de médiation, de vulgarisation ou encore de popularisation dans un sens commun sans distinction. le lecteur intéressé par l'évolution dans l'usage de ces termes pourra se référer, par exemple, à Bensaude-Vincent (2010) et Chavot et Masseran (2010). Cette évolution est surtout due, en partie, aux différents changements de courants de communication scientifique.

2. Issus de notre travail de Master 2 qui a donné lieu à des publications dans des revues et des actes de didactique des mathématiques.

3. L'expérimentation était en contexte scolaire mais non le questionnement.

première classification des ressources étudiées selon si ces dernières étaient relatives à un *problème* ou à un *casse-tête* mathématique. Une première proposition de définition de ces termes a été donnée dans Da Ronch (2019a). Par ailleurs, notre étude a également permis d'établir une première caractérisation selon trois composantes : artefactuelle, cognitive et sociale, nécessaire à l'émergence d'une activité mathématique dans un contexte d'expérimentation où l'exposition se situait dans le cadre scolaire.

Dans la continuité de ce travail et dans une vision d'une plus large diffusion des mathématiques et de ses pratiques, nous poursuivons ce questionnement dans un contexte d'expériences qui sort du cadre traditionnel scolaire. A cette occasion, nous allons faire un état des lieux succinct des différents travaux en didactique des mathématiques qui traitent des questions de médiation des mathématiques.

2 Travaux francophones de didactique des mathématiques autour de la médiation en mathématiques

Outre nos premiers travaux mentionnés ci-avant, on remarque, au même titre que Pelay et Artigue (2016) mais aussi Esclafit (2020), qu'en France, très peu de travaux en didactique des mathématiques se sont intéressés aux questions de médiation des mathématiques. En effet, depuis plus de vingt ans on recense quelques travaux de thèse ou de master qui se sont centrés sur ce sujet (p. ex., Da Ronch, 2018b ; Esclafit, 2020 ; Godot, 2005 ; Pelay, 2011 ; Poisard, 2005). Parmi ces travaux peu se sont réellement questionnés dans le contexte spécifique d'institutions relevant de la diffusion scientifique comme les centres ou les musées, avec un public non scolaire. Pourtant ces institutions accueillant un large public prolifèrent de plus en plus dans le paysage de la culture scientifique en France (voir chap. VI) et participent aussi activement à la diffusion des mathématiques. Il est donc important, selon nous, que la communauté didactique se saisisse de ces questions de diffusion en se centrant sur ces institutions spécifiques, puisqu'elles font parties des acteurs incontournables de la diffusion des mathématiques pour tous.

Dans la prochaine section, nous présentons succinctement les différents travaux de thèse et de master recensés en France.

2.1 Travaux de thèse et de master en France

La thèse de Godot (2005) a eu pour objectif de développer une situation de recherche présentée sous forme de jeu et de matériel manipulable (*La roue aux* *couleurs*) avec pour volonté d'étudier les savoirs mobilisés et visés par la situation développée, les apprentissages induits et les conditions qui permettent de faire émerger ces apprentissages que cela soit au niveau de l'école ou sur le temps des loisirs (atelier, fête de la science...). Ceci dans le but d'utiliser ces situations de recherche dans un cadre de formation et de vulgarisation.

Poisard (2005), dans sa thèse, a conduit des expérimentations dans un centre d'animation scientifique et technique qui reçoit en particulier un public scolaire du primaire. L'un des enjeux était de fabriquer et d'étudier des objets mathématiques liés à des instruments de calcul comme le boulier chinois, les bâtons de Néper et de Genaille-Lucas ou encore la règle à calcul. Ce cadre a permis l'étude des instruments à calculer lors des apprentissages des nombres et du calcul.

Pelay (2011), quant à lui, étudie le lien entre jeu et apprentissage mathématique dans un contexte particulier de séjours en vacances où la dimension didactique est articulée avec la dimension ludique qui a donné lieu à la notion de *contrat didactique et ludique*

Enfin, Esclafit (2020) analyse un dispositif de médiation pour aborder l'apprentissage par renforcement et l'intelligence artificielle grâce à une situation basée sur un jeu combinatoire de type soustractif et une « machine » pensée dans le cadre de l'informatique débranchée. Les expérimentations se sont déroulées avec le cadre du stage « MathC2+ » à l'Université de Montpellier avec des élèves de 3e (14-15 ans) motivés et volontaires.

On remarque que ces travaux traitent des questions de médiation des mathématiques à travers une variété de contextes d'expérimentations à l'instar de la diversité des lieux de diffusion des mathématiques (voir chap. VI). Cependant aucun d'eux ne se situe à la fois dans le cadre d'une infrastructure de culture scientifique de type musée ou centre et dans des contextes d'expérimentation où les individus ne sont pas des élèves mais un plus large public.

2.2 Travaux de recherche dans la communauté didactique francophone à partir des actes de l'EMF

En outre, Pelay et Artigue (2016) et plus récemment Esclafit (2020), soulignent qu'il en est de même dans la communauté francophone [4] avec un faible nombre de papiers sur la médiation des mathématiques dans les actes des colloques de l'EMF (Espace Mathématique Francophone) [5]. D'ailleurs, depuis les

4. Nous remarquons que cela s'étend également au-delà de la communauté francophone, dans la *mathematics education*, puisqu'on retrouve seulement deux études ICMI (*International Commission on Mathematical Instruction*) sur les vingt-cinq, dont les deux dernières sont encore en préparation en 2022, portant sur ce sujet (voir p. ex., Barbeau et Taylor, 2009; Howson et Kahane, 1990).

5. Les actes des différentes éditions de l'EMF sont disponibles sur http://emf.unige.ch/ .

années 2000 et les sept éditions de l'EMF, seulement deux projets spéciaux ont eu lieu en 2012 et 2015 sur le thème « Vulgarisation des mathématiques ». En 2018, ce projet spécial est devenu un groupe de travail nommé « Étude des processus de vulgarisation des mathématiques » mais qui est, à nouveau, redevenu un projet spécial intitulé « Étude des processus de vulgarisation » pour le projet de colloque de l'EMF prévu en 2022 au Bénin. En ce qui concerne les papiers issus des actes des différentes éditions de l'EMF (2012, 2015 et 2018), on retrouve, en 2012, neuf articles sur la médiation des mathématiques sur presque deux-cents publications, six articles en 2015 sur un peu plus de quatre-vingt publications et enfin neuf articles en 2018 (dont un, hors projet spécial sur la vulgarisation) sur environ cent-quatre-vingt publications.

Certains de ces papiers s'intéressent aux pratiques de la vulgarisation en particulier lors de l'EMF 2012. D'autres visent, par un regard théorique sur ces pratiques, à établir des liens entre vulgarisation des mathématiques et didactique des mathématiques (EMF 2015 et 2018). En particuliers, certains auteurs mettent en avant l'usage des outils de la didactique issus, par exemple de la Théorie des Situations Didactiques de Brousseau (1998) ou de l'ingénierie didactique d'Artigue (1988), qui permettent de contribuer à l'analyse et à la conception des actions de popularisation (voir p. ex., AlPaGe, 2018a,b ; Fiorelli, Audin, Belbachir, Cherix et Rittaud, 2015 ; Grenier, 2012 ; Pelay, 2018 ; Pelay et Mercat, 2012 ; Poisard, 2018) [6]. Par ailleurs, nous retrouvons également des auteurs qui tentent d'éclaircir l'acception du vocable « vulgarisation » afin d'en délimiter ses frontières, entre ce qu'elle est et ce qu'elle n'est pas, et ses principaux enjeux (voir p. ex., Fiorelli, Audin, Belbachir, Cherix et Rittaud, 2015 ; Rittaud, 2015). Enfin, certains s'intéressent plutôt à la présentation, à l'usage et à l'étude de situations ou de dispositifs de vulgarisation (voir p. ex., Attal, Audin, Jamet et Reuiller, 2012 ; Belbachir, 2012 ; Da Ronch, 2018a ; Godot, 2012, 2015 ; Pelay et Boissiere, 2015 ; Rittaud et AlPaGe, 2018). On remarque cependant que presque aucun de ces papiers ne se focalise réellement sur l'étude *a priori* et a *a posteriori* de situations issues de dispositifs se situant dans des infrastructures de type musée ou centre de culture scientifique avec un large public. En effet, peu de papiers présentent des dispositifs dans ce contexte spécifique (AlPaGe, 2018a ; Attal, Audin, Jamet et Reuiller, 2012 ; Belbachir, 2012 ; Fiorelli, Audin, Belbachir, Cherix et Rittaud, 2015) et un papier, seulement, propose une méthode pour évaluer une action de vulgarisation avec médiateur à l'aide de deux graphes quantifiant les différentes postures et interactions entre public et médiateur. Ceci afin de comparer les activités, mais aussi évaluer l'adéquation entre l'activité envisagée

6. AlPaGe est un groupe de travail sur la vulgarisation des mathématiques constitué de P. Audin, H. Belbachir, F. Caron, P-A. Cherix, S. Fiorelli, R. Jamet, C. Mercat et B. Rittaud (https://www.unige.ch/math/alpage/).

et son déroulement effectif (Fiorelli, Audin, Belbachir, Cherix et Rittaud, 2015).

Par ailleurs, on constate également que depuis les précédents travaux de recension (Esclafit, 2020 ; Pelay et Artigue, 2016), il n'y a toujours aucun article en 2022 sur la médiation des mathématiques au niveau de la revue de recherche RDM (Recherche en Didactique des Mathématiques).

3 Bilan de cette recension

Cette brève revue de littérature (thèses, mémoires de master, actes de l'EMF) montre que la médiation des mathématiques, dans la communauté de didactique francophone, est un domaine assez récent pour lequel il y a encore peu de travaux à ce sujet. Les questionnements sur la conception, l'analyse et l'évaluation d'actions de diffusion sont en cours de construction comme le relatent les travaux des différentes éditions de l'EMF (2012, 2015, 2018), passant de simples présentations de dispositifs, à un regard plus théorique visant à construire un cadre d'analyse et de conceptions à partir de concepts issus de la didactique des mathématiques. Malgré cet effort, la recherche en didactique des mathématiques dans certains contextes spécifiques, comme les musées et les centres de culture scientifique, est encore ouverte et à explorer. Cette remarque permet donc de souligner l'intérêt de se questionner sur la médiation des mathématiques dans ce contexte spécifique, d'autant plus que le domaine des mathématiques dans les infrastructures de type musée ou centre de culture scientifique est en plein essor ces dernières années (voir, chap. VI). De plus, ces structures offrent, selon nous, des conditions enclines pour une pratique mathématique puisque le public est *a priori* volontaire, le temps alloué est suffisant et les formes de médiation favorisent l'autonomie et la responsabilité scientifique du public... En revanche, ces conditions ne sont pas suffisantes, et nous formulons l'hypothèse, issue d'un précédent travail (Da Ronch, 2018b), selon laquelle *très peu des ressources présentes dans ces institutions permettent réellement d'entrer dans l'activité mathématique*. A cette occasion, nous développons dans le prochain chapitre un cadre théorique permettant d'une part, de structurer notre analyse écologique, d'autre part, de concevoir des ingénieries répondant à ce manque.

Chapitre IV

Cadre théorique & problématique

1 Écologie et évaluation des ressources

1.1 L'échelle des niveaux de co-détermination didactique

Pour réaliser cette étude écologique, nous utilisons l'échelle des niveaux de co-détermination didactique issue des travaux de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 2010).

…
↓↑
Société
↓↑
École
↓↑
Pédagogie
↓↑
Discipline
↓↑
…

Figure IV.1 – *Fragment d'échelle des niveaux de codétermination didactique (ibid., p. 138).*

Cet outil va nous permettre d'avoir un regard, à différents degrés de granularité, du global au local, lors de l'identification des conditions mais aussi les contraintes de viabilité de la pratique mathématique au sein des institutions de culture scientifique (musée ou centre de culture scientifique).

Pour nos besoins, notre étude écologique s'intéressera d'abord au niveau macro-didactique : civilisation, société, institution de type musée et centre de culture scientifique, pédagogique (temps alloué, public, forme de médiation...). Ensuite, on se placera au niveau du didactique c'est-à-dire au niveau de la discipline et des ressources proposées. En effet, même s'il est probable que certaines conditions au niveau macro-didactique soient propices pour faire des mathématiques, les conditions et les contraintes au niveau de la discipline et des ressources proposées ne sont pas à négliger comme le rappelle Chevallard (2010).

> Dans l'étude des conditions et des contraintes, deux grands obstacles sont à éviter. Le premier est précisément celui contre lequel la didactique s'est bâtie à l'origine : il consiste à ne considérer que les contraintes et conditions relevant des niveaux de la pédagogie, de l'école, voire de la société, en oubliant les conditions et contraintes de niveau disciplinaire, comme si « la » discipline, qui est pourtant le fruit d'une transposition didactique toujours à l'œuvre, était tenue pour nécessaire, transcendante, transparente, intouchable et non problématique à la fois. (*ibid.*, p. 139).

Dans le domaine des mathématiques nous avons identifié, dans notre premier travail, deux types de ressources *les problèmes* d'une part et *les casse-têtes* d'autre part. L'objectif principal de cette recherche était de démontrer s'il était possible ou non d'avoir accès à cette pratique mathématique dans le cadre scolaire à des fins d'exposition. Et donc de mettre à l'épreuve notre hypothèse sur le fait que *les problèmes* favorisent davantage cet accès *a contrario des casse-têtes*, et cela à partir de quelques études de cas prototypiques (Da Ronch, 2019a,b). Avant de confirmer ces dires, il nous a fallu développer un modèle de critères semblables à ceux des situations de recherche pour la classe (Grenier et Payan, 2003), permettant d'évaluer qualitativement une ressource quant à sa potentialité à permettre de développer l'activité mathématique lors de son utilisation. Bien que cette méthode d'analyse qualitative soit pertinente lorsqu'elle est utilisée sur quelques cas, elle ne semble pas opérationnelle lors d'analyses de ressources multiples. En effet, certains de ces critères nécessitent une analyse *a priori* pour chaque situation. Face à l'abondance des ressources dans le domaine de la culture scientifique et en particulier de ces institutions, il nous faut donc utiliser un modèle plus efficace.

1.2 Modèle du problème transposé pour l'évaluation du potentiel mathématique d'une ressource

A cette occasion, nous utilisons la notion de *problème transposé* comme modèle d'évaluation du potentiel mathématique des ressources mises à disposition dans ce type d'institution. Le lecteur ou la lectrice pourra retrouver les fondements théoriques de cette notion dans le chapitre II. Ce modèle d'évaluation sera nommé *modèle du problème transposé* dans la suite de notre travail. Ce modèle est donc un outil d'analyse décrit en trois étapes ordonnées : (i) épistémologique, (ii) transposition didactique et (iii) ergonomique.

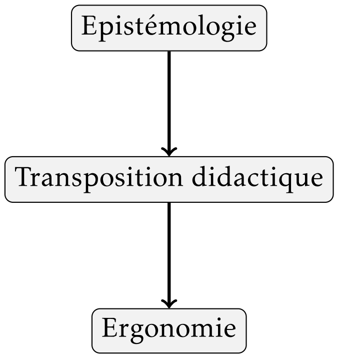


***Figure IV.2** – Modèle du problème transposé utilisé pour évaluer le potentiel mathématique d'une ressource.*

Au niveau épistémologique

Cette première étape vise à évaluer l'aspect syntaxique et l'aspect sémantique des « problèmes » proposés à travers les ressources de ces institutions. Il s'agit de vérifier tout d'abord si la structure dans la formulation du « problème » correspond à la forme question/instances proposée par (Garey et Johnson, 1979). Ensuite, nous vérifions que le « problème » proposé ait du sens. C'est-à-dire qu'il soit sémantiquement intéressant à résoudre en vérifiant qu'il soit proche, par la proximité de sa question, de ses instances ou de ses invariants de preuves pour le résoudre, à d'autres problèmes mathématiques épistémologiquement pertinents qui ont animé ou animent encore la recherche mathématique (Giroud, 2011). Ceci permettra ainsi de dire que le problème proposé n'est pas isolé.

Au niveau de la transposition didactique

Pour cette étape nous retenons principalement trois aspects : la compréhension du problème, le fait qu'aucun élément de résolution ne soit mentionné et enfin la nature et les valeurs des variables du problème. Le premier aspect sera validé seulement si le problème voire l'énoncé du problème est formulé dans un langage accessible au plus grand nombre. Le dernier aspect, quant à lui, nécessiterait une analyse *a priori* pour chacune des situations proposées, mais étant donné que le nombre de ressources à traiter est important, nous ne pouvons pas faire ce choix. Ainsi, nous faisons l'hypothèse selon laquelle la plupart des problèmes proposés proviennent déjà de situations existantes et ont déjà été étudiés au sein de la communauté (réseau des IREM, Maths à Modeler, Maths en Jeans, etc.). Nous pourrons alors nous appuyer sur la littérature existante.

Au niveau de l'ergonomie

Nous terminons par la dimension relevant de l'ergonomie du matériel lié à la ressource. Pour évaluer cette dernière, nous utilisons trois critères issus de l'évaluation des environnements informatiques pour l'apprentissage humain (EIAH) relevés comme pertinents et complémentaires. En particulier, *l'utilité*, *utilisabilité* et *l'acceptabilité* adaptées au matériel [1] et dont nous ne garderons que les idées générales et simplifiées de ces termes (Tricot *et al.*, 2003).

Dans notre cas, *l'utilité* doit permettre de répondre à la question : le matériel proposé permet-il de résoudre au moins en partie le problème ? En l'occurrence, préciser les objectifs : question, règle du jeu., etc., montrer une cohérence entre le matériel mis à disposition et le problème proposé. En effet, le matériel doit permettre d'approcher le problème sur de nombreux cas particuliers, allant de l'étude de petits cas à l'étude de cas plus grands, permettant ainsi de ne pas perdre de vue l'aspect général sous-tendu par le problème. De plus, le matériel doit permettre l'auto-régulation du sujet qui résout le problème en renvoyant des rétroactions quant à la validité des actions mises en œuvre pour résoudre le problème donné.

Concernant *l'utilisabilité*, celle-ci fait référence à la prise en main du matériel associé à la ressource. Autrement dit, est-ce que le matériel est facile « à utiliser, à réutiliser sans perdre de temps et sans faire d'erreur de manipulation ? » (*ibid.*, p. 381). La règle du jeu (guidage) est-elle suffisamment claire pour utiliser le matériel mis à disposition ?

Enfin, le critère de *l'acceptabilité* relève, selon ces auteurs, de la compatibilité « avec les valeurs, la culture, l'organisation » (*ibid.*, p. 391) dans lesquelles la ressource est insérée. Le matériel doit donc être en adéquation avec les besoins et les objectifs institutionnels et, dans une certaine mesure, prendre en compte également les attentes voire les caractéristiques spécifiques du public...Ces aspects semblent donc être étroitement liés à l'institution, au public, et dépassent le cadre matériel de la ressource. Nous retenons aussi que le matériel doit être suffisamment abouti pour susciter l'envie et l'adhésion du public.

À noter que ce modèle sera davantage développé dans la section 3.2 (p. 45), notamment au niveau des deux premières étapes, épistémologique et didactique, lors de la conception d'une ingénierie.

1.3 Remarques objectives

Le modèle du problème transposé nous permet ainsi de vérifier la potentialité mathématique d'une ressource, c'est-à-dire son potentiel à engager le public

1. Non nécessairement numérique.

dans une pratique mathématique tel que nous l'entendons. En outre, ce modèle permet également d'identifier *les conflits* qui compromettent cette potentialité lorsque celle-ci est identifiée comme une ressource ne favorisant pas ce potentiel. On parlera alors de conflits d'ordre épistémologique (resp. didactique, ergonomique) lorsque des divergences opèreront lors de la confrontation entre nos critères d'ordre épistémologique (resp. didactique, ergonomique) et le « problème » proposé dans la ressource dont il est question d'évaluer sa potentialité mathématique.

Dès lors qu'une des étapes n'est pas vérifiée, on arrête le processus d'évaluation et on renvoie que la ressource n'a pas le potentiel à développer une pratique mathématique chez un sujet.

Nous attirons tout de même l'attention du lecteur ou de la lectrice sur le fait qu'une ressource dont *le potentiel mathématique* est jugé compromis ne signifie pas que le sujet ne fait rien, n'apprend rien et ne développe aucune compétence. Il s'agit juste de remarquer que l'activité mathématique, au sens où nous l'avons définie, est impactée. Cela signifie que l'activité mathématique risque d'être réduite, voire inexistante mais qu'il est envisageable, par exemple, que le sujet développe une culture mathématique à travers des éléments historiques, des anecdotes, voire qu'il retienne certains concepts et notions mathématiques présentés au travers d'une ressource.

En outre, notons également que bien qu'une ressource soit identifiée comme ayant un potentiel mathématique, il se peut aussi que des éléments extérieurs impactent son utilisation voire rendent l'activité mathématique quasi inexistante. Nous discutons succinctement de ce point au prochain paragraphe.

1.4 Phénomènes extérieurs et confrontation à la contingence

Nous savons que contrairement aux institutions scolaires, les institutions de culture scientifique ne possèdent pas les mêmes modalités temporelles, spatiales, organisationnelles relatives à la pédagogie, et d'un point de vue disciplinaire ne sont pas toujours focalisées sur les mêmes objectifs. Cependant, comme en classe ordinaire, il y a des phénomènes extérieurs qui peuvent interférer au cours de l'activité, et ce même si la ressource est « bien » construite. Tout d'abord, nous n'avons pas la certitude que le public se saisisse des ressources mises à leur disposition, bien que le public de ces institutions soit pour la plupart du temps un public de volontaires contrairement à l'institution scolaire par exemple. Il y a en effet divers facteurs de natures différentes qui sont susceptibles d'influencer leur choix et donc impacter leur propre activité. Parmi ces facteurs on retrouve entre autres, leur motivation à un instant donné, les formes de médiation proposées, ou encore l'utilisation faite du matériel mis à disposition d'une ressource qui peut, dans certains cas, être complètement détourné de l'objectif principal (catachrèse). En outre, les formes de médiation et leurs modalités liées aux contraintes de temps, au nombre de personnes, aux rétroactions du médiateur ou à son absence, etc., sont autant de points qui peuvent impacter l'activité du public. Tous ces phénomènes externes à la ressource sont donc propres au sujet, à l'institution pour lequel il est assujetti à un instant donné et sont, dans une certaine mesure, soumis à la contingence puisqu'il y a dans ce cas l'éventualité que ces phénomènes se produisent sans pouvoir tous les expliquer. Ces phénomènes peuvent donc impacter sensiblement l'activité mathématique du public.

À travers ces différents paragraphes, nous avons proposé une méthode de conduite de recherche permettant de réaliser une étude écologique sur la place de l'activité mathématique au sein des institutions de culture scientifique et nous avons proposé un modèle permettant l'évaluation du potentiel mathématique des ressources mises à disposition dans ces infrastructures.

Dans la prochaine section nous présentons la problématique de notre thèse ainsi que les différentes questions de recherche qui en découlent.

2 Problématique et questions de recherche

En France, les infrastructures de type musée ou centre de culture scientifique qui proposent des mathématiques prolifèrent de plus en plus dans le paysage de la culture scientifique française (voir chap. VI). L'usage de l'échelle des niveaux de co-détermination didactique nous permet de restreindre le domaine de recherche à ce type de structure et nous tenterons d'apporter des réponses à notre problématique.

Au sein des institutions de culture scientifique, est-il possible qu'un individu (ou groupe d'individus) fasse des mathématiques ?

L'hypothèse de recherche que notre thèse vise à vérifier est qu'il est possible, selon nous, de faire des mathématiques dans ce contexte si des conditions pour une telle pratique sont réunies : public volontaire, temps suffisant, forme de médiation favorisant l'autonomie et la responsabilité scientifique... mais aussi que les ressources proposées soient construites en adéquation avec les conditions épistémologiques, didactiques et ergonomiques proposées dans notre modèle du *problème transposé*.

Plus précisément, dans cette thèse nous nous intéresserons à ce problème **lorsqu'il n'y a pas de médiateur** puisque, comme nous le verrons lors de notre étude écologique, ces institutions proposent un type de médiation sans médiateur, nommé *médiation indirecte* [2] (Contenot, 2011), laissant alors une place importante à l'autonomie et à la responsabilité scientifique du public assurant

2. *A contrario* de la médiation directe où le médiateur est présent.

ainsi les conditions fortes d'adidacticité. De plus, ce type de médiation permet ainsi d'éviter certains effets didactiques néfastes à une pratique mathématique qu'il est difficile de prévoir lors de l'interaction entre le public et le médiateur : *effet Jourdain*, *effet Topaze*...

La problématique mentionnée ci-avant nous conduit à d'autres questions de recherche relevant de la conception d'ingénieries, de conditions sur le milieu et sur les situations proposées.

- **Comment concevoir une ingénierie didactique ayant pour vocation de faire des mathématiques ?**
- **Quelles sont les conditions sur le milieu pour concevoir ces ingénieries ?**
- **Quelles sont les situations qui sont propices à une pratique mathématique de ces conditions ?**

Pour tenter d'apporter des réponses à ces questions, nous nous appuierons, pour la conception de nos ingénieries, sur notre modèle du *problème transposé*.

3 Modèle du problème transposé dans la conception d'une ingénierie didactique

3.1 Situation et ingénierie didactique

Brousseau (1998) a développé la théorie des situations didactiques dans le but de modéliser, à des fins d'analyse, des situations d'apprentissage dans le cadre scolaire. Il les appelle les situations didactiques, qui comportent également des phases d'adidacticité où l'enseignant est en retrait. L'interaction se fait donc uniquement entre l'élève ou le groupe d'élèves et le milieu construit pour la situation. Dans ce modèle plusieurs phases ou dialectiques apparaissent : celle de l'action, de la formulation et de la validation (*ibid.*).

Dans notre travail, nous avons une réelle intention de transposer la pratique de l'activité mathématique. Nos travaux s'inscrivent naturellement dans le cadre des situations didactiques avec l'intention de construire un milieu suffisamment riche et porteur de déséquilibre pour atteindre cet objectif. De plus, nous avons vu que pour faire des mathématiques, le sujet ou groupe de sujets doit se saisir de la responsabilité scientifique par rapport à la résolution du problème donné. Il est donc nécessaire de recréer des conditions qui favorisent cette prise de responsabilité, donc laisser une place importante à l'autonomie de l'individu ou groupe d'individus placé en résolution de problème.

Pour ce faire, d'un point de vue théorique, nous nous appuierons sur la notion de situation adidactique, tout en faisant en sorte que les situations construites puissent favoriser les dialectiques d'action, de formulation et de validation. En outre, le concept de dévolution décrit par Brousseau (1998) sera aussi utilisé pour caractériser l'entrée du public dans la résolution du problème tout en lui donnant accès à l'autonomie et à la responsabilité scientifique par rapport au problème considéré. Brousseau (*ibid.*) définit ce concept comme :

> l'acte pour lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (adidactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfère (*ibid.*, p. 303).

Dans notre contexte de recherche, ce concept évolue légèrement puisqu'il n'y a, *a priori*, ni enseignant, ni médiateur présent, ainsi cet acte est pris en charge, de manière globale, par l'institution et les ressources mises à disposition qui permettent donc l'enrôlement du public. De plus, le processus de dévolution ne s'arrête pas ici à la phase de « conclusion » sur le problème juste avant le processus d'institutionnalisation des savoirs, puisque cette phase n'est, *a priori*, pas présente dans ce contexte de médiation... Enfin, le concept d'institutionnalisation (*ibid.*) ne sera pas repris dans notre recherche car ce processus ne sera pas présent *in situ* (absence de médiateur et de textes de savoirs...).

Pour construire les situations adidactiques favorisant les différentes dialectiques décrites ci-avant et les analyser, nous adopterons une méthode classique, celle de l'analyse *a priori* et *a posteriori*, issue du concept d'ingénieries didactiques au sens d'Artigue (1988).

Au niveau de l'analyse *a priori* de la situation, nous allons incorporer *le modèle du problème transposé* qui nous a servi dans l'évaluation du potentiel mathématique d'une ressource mais cette fois-ci dans un but de conception.

Nous avons vu que pour faire des mathématiques, il faut proposer des problèmes. Toutefois, le cadre général de notre recherche diffère de la classe ordinaire puisque nous nous situons dans des institutions spécifiques de culture scientifique. De fait, nous avons un plus large public et nous formulons alors une première hypothèse de travail sur le fait qu'il n'est donc pas envisageable de proposer des problèmes où le contenu mathématique est trop spécifique, c'est-à-dire cloisonné à un savoir curriculaire précis ou hors de portée des individus. Une deuxième hypothèse tient au fait que dans ce type d'institution il est, selon nous, fondamental de proposer du matériel manipulable pour susciter l'envie et l'adhésion du public dans la situation proposée. Or, un domaine des mathématiques favorable à ces deux hypothèses de travail préalablement mentionnées est le domaine des mathématiques discrètes. En effet de nombreux travaux conduits en France, en particulier à l'Université Grenoble Alpes, ou bien à l'étranger, auprès de différents publics (élèves, élèves en situation de handicap, étudiants, professeurs stagiaires, public...) ont montré la pertinence des mathématiques discrètes dans le développement des raisonnements et des processus de preuves inhérents à l'activité mathématique dans une démarche de recherche (voir p. ex., Abdallah, 2020 ; Da Ronch, 2020a ; Da Ronch, Gandit et Gravier, 2020, 2021 ; Gandit, Balicco, Gravier et Modeste, 2013 ; Gandit, Giroud et Godot, 2011 ; Giroud, 2011 ; Godot, 2005 ; Grenier, 2012 ; Grenier et Payan, 1998 ; Ouvrier-Buffet, 2003 ; Semri, 2012). En outre, le fait que les problèmes de ce domaine soient facilement déclinables sous la forme d'objets tangibles et que les actions pour les résoudre sous la forme « papier-crayon » soient également analogues à celles réalisées sur du matériel, rend cohérentes nos deux hypothèses. Notre travail de construction de situations s'appuiera donc dans le domaine de la recherche mathématique du discret.

3.2 Analyse *a priori* par le modèle du problème transposé

Épistémologie du problème : aspect syntaxique et aspect sémantique

Selon notre modèle, la première étape se rapporte à l'analyse épistémologique qui correspond usuellement à l'analyse mathématique du problème. Celle-ci sera conduite selon les aspects syntaxique et sémantique développés dans notre *modèle du problème transposé*. Nous nous intéresserons donc à valider d'une part, que l'aspect structurel dans la formulation du problème soit respecté selon la nomenclature décrite par exemple par Garey et Johnson (1979). D'autre part, que le problème étudié ait du sens, c'est-à-dire une portée suffisante pour faire écho à d'autres problèmes épistémologiquement pertinents. Pour ce faire, on s'appuiera sur les travaux de Giroud (2011), et en particulier sur la notion *concept-problème*.

Giroud (*ibid.*) caractérise le *concept-problème* selon trois ensembles :

- l'ensemble des problèmes $\mathbb{P}$ qui donnent du sens à $\mathscr{P}$, nous parlerons d'espace problème ;
- l'ensemble des invariants opératoires qui correspondent aux connaissances sur lesquelles repose l'action du sujet en situation de résolution d'un élément de $\mathscr{P}$;
- l'ensemble des représentations $\mathscr{R}$ que l'on peut associer aux éléments de $\mathbb{P}$ (*ibid.*, p. 21).

Pour notre recherche, nous nous restreindrons à l'utilisation de la notion d'espace-problème ou univers suffisant pour caractériser la portée d'un problème donné, étudier ses ramifications et sa proximité avec d'autres problèmes mathématiques sous-jacents grâce au jeu des modifications des valeurs de ses instances et/ou de la portée de sa question. Ceci nous permettra de repérer si le problème détient une quantité épistémologique significative. Cette quantité sera jugée d'autant plus importante que son espace-problème ou univers contiendra un nombre significatif de problèmes dans son voisinage et que ces problèmes entretiendront, entre eux, des relations établies grâce aux proximités des questions, des instances mais aussi des invariants de preuves pour les résoudre.

Nous décrivons l'univers ($\Omega_{\mathbb{P}}$) des problèmes mathématiques [3] comme un espace constitué d'ensembles de problèmes tels que

$$\Omega_{\mathbb{P}} := \Big\{\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \ldots, \mathbb{P}_j, \ldots, \mathbb{P}_l, \ldots\Big\}$$

Chacun des ensembles de ces problèmes s'inscrit dans différentes branches mathématiques. Ainsi, lors de l'analyse épistémologique d'un problème $\mathscr{P}$ donné, lorsque nous souhaitons repérer sa quantité épistémologique et voir si ce problème est sémantiquement intéressant (non isolé), son univers $\Omega_{\mathscr{P}}$ se limite, dans un premier temps, à des ensembles de problèmes $\mathbb{P}$ auxquels $\mathscr{P}$ se rattache par la proximité de sa question et de ses instances. Il suffit ensuite de se centrer sur certains de ces ensembles de problèmes jugés significativement proches de $\mathscr{P}$ (figure IV.3). Nous donnons ci-après un exemple explicite.

Exemple IV.1

Étant donné une collection finie de polyminos, est-il possible de recouvrir le plan ou une région finie du plan avec ces polyminos ? Ce problème s'inscrit dans une problématique plus large où l'on cherche à décider, si étant donné une collection finie de pavés, il est possible de recouvrir le plan ou une région finie du plan par des pavés de cette collection. Cette problématique recouvre différents questionnements issus de diverses classes de problèmes mathématiques comme celles recouvrant des problématiques de pavages, de décidabilité algorithmique où l'on cherche à savoir s'il existe un algorithme, qui en un nombre fini d'étapes, permet de décider de la solution au problème. Mais aussi, des problématiques de complexité algorithmique où l'on souhaite déterminer les ressources nécessaires, en temps ou en espace, pour résoudre, par exemple, des problèmes de pavages sur des régions finies du plan.

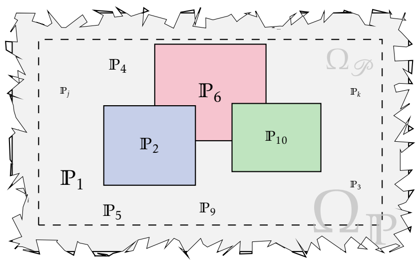


Figure IV.3 – *Fragment de l'espace des problèmes $\Omega_{\mathbb{P}}$ centré sur l'univers d'un problème $\mathscr{P}$ autour de trois ensembles de problèmes $\mathbb{P}_6$, $\mathbb{P}_2$ et $\mathbb{P}_{10}$ dont les questions sont jugées proches de celle de $\mathscr{P}$.*

3. Cet univers est infini, si nous partons du postulat qu'une infinité de problèmes mathématiques existe...

Une fois ces ensembles de problèmes déterminés, nous introduisons le *zoom* qui permet, dans l'univers $\Omega_{\mathscr{P}}$, de regarder, avec un facteur de grossissement, les problèmes appartement aux ensembles de problèmes sur lesquels nous nous somme centrés (figure IV.4). Le choix des problèmes issus de ces ensembles est toujours déterminé grâce à l'étude épistémologique de $\mathscr{P}$ qui permet d'établir des relations de « voisinage » entre les problèmes de $\Omega_{\mathscr{P}}$ (voir prochain paragraphe et figure IV.5), donnant ainsi du sens à $\mathscr{P}$.

Ainsi, plus l'univers $\Omega_{\mathscr{P}}$ est riche de problèmes avec des relations de « voisinage », plus $\mathscr{P}$ est un problème sémantiquement intéressant à étudier, puisque non isolé, et qui, de plus, possède une quantité épistémologique significative demandant alors du temps pour l'étudier et le résoudre, au moins, partiellement.

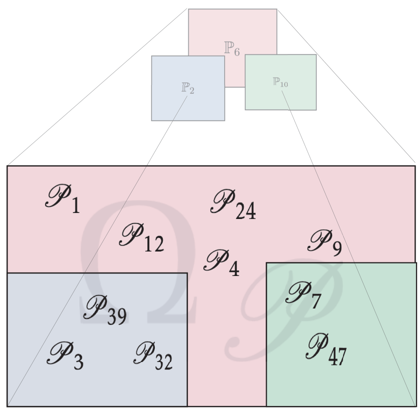


FIGURE IV.4 – *Premier zoom sur l'espace-problème ou univers* $\Omega_{\mathscr{P}}$.

Nous reprenons à Giroud (2011) les spécificités des relations de « voisinage » que peuvent entretenir les problèmes dans l'univers $\Omega_{\mathscr{P}}$. Nous retenons la relation de suffisance entre deux problèmes $\mathscr{P}_a$ et $\mathscr{P}_b$ ($\mathscr{P}_a \rightarrow \mathscr{P}_b$). Nous dirons que si nous savons résoudre $\mathscr{P}_a$ alors nous pouvons résoudre $\mathscr{P}_b$. Si la réciproque est également vraie alors nous établissons une relation d'équivalence entre $\mathscr{P}_a$ et $\mathscr{P}_b$ ($\mathscr{P}_a \leftrightarrow \mathscr{P}_b$). De plus, nous introduisons la notion de *relation de suffisance partielle* entre $\mathscr{P}_a$ et $\mathscr{P}_b$, si nous savons résoudre $\mathscr{P}_a$ et que nous pouvons résoudre partiellement $\mathscr{P}_b$ grâce à $\mathscr{P}_a$ ($\mathscr{P}_a \dashrightarrow \mathscr{P}_b$).

Nous donnons, ci-après, un exemple de l'espace $\Omega_{\mathscr{P}}$ avec des problèmes qui entretiennent des relations de suffisance, de suffisance partielle voire d'équivalence (figure IV.5).

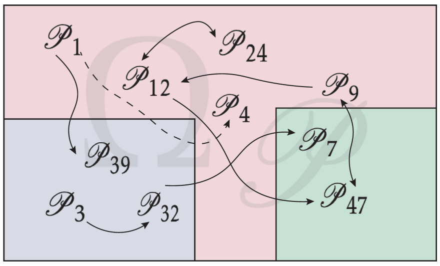


Figure IV.5 – *Relations de suffisance, de suffisance partielle ou d'équivalence entre des problèmes $\mathscr{P}_i \in \Omega_{\mathscr{P}}$.*

Bien entendu lors de la conception d'une ingénierie didactique à partir d'un problème, l'analyse épistémologique de ce dernier nécessitera un affinement plus important en fonction des objectifs et du public ciblé. Ainsi, le processus de zoom décrit précédemment pourra être réalisé autant de fois que nécessaire en fonction des besoins.

Comme nous l'avons dit en début de section, dans son acception générale, l'analyse épistémologique correspond à l'analyse mathématique du problème. Néanmoins, dans nos travaux nous ferons clairement une différence. Effectivement, l'analyse d'un problème de recherche mathématique peut être affinée selon le public ciblé. Ainsi, pour nous, l'analyse épistémologique correspondra à l'histoire du problème et à ses principaux résultats de recherche, donc destinée à un public averti. Cela nous permettra de faire une première épuration, de délimiter le champ des possibles par rapport à nos objectifs. Ensuite, nous ferons l'analyse mathématique où des premiers choix seront réalisés en fonction des résultats de notre analyse épistémologique. Cette analyse mathématique sera donc toujours en lien avec l'épistémologie du problème mais sera étroitement liée à la conception des situations qui seront proposées ensuite.

Transposition didactique : modèle des SiRC

La seconde étape de notre modèle en lien avec la transposition didactique d'un problème s'appuie sur des critères spécifiques issus de la littérature de recherche en didactique des mathématiques et plus largement dans la *mathematics education*. Notre analyse a montré (voir chap. II) que la notion de problème en éducation mathématique possède des acceptions diverses qui reprennent, pour certaines, les principaux points évoqués dans le modèle des Situations de Recherche pour la Classe de Grenier et Payan (2003). Ce modèle a démontré sa robustesse dans la construction de situations de recherche issues de problèmes de mathématiques discrètes faisant émerger une véritable pratique mathématique (voir p. ex., Da Ronch, Gandit et Gravier, 2020 ; Giroud, 2011 ; Godot, 2005). Ainsi, les mathématiques discrètes et en particulier les SiRC, semblent être un cadre adéquat pour la construction de situations dans un contexte de médiation (Da Ronch, 2020a ; Grenier, 2012 ; Semri, 2012). A cette occasion, nous nous appuierons sur le modèle des SiRC au niveau de la transposition d'un problème de recherche professionnel vers un problème transposé pour un public ciblé. Grenier et Payan (2003) donnent une caractérisation précise dont le dernier point a été mis en avant dans le travail de thèse de Godot (2005) :

> (1) une SiRC s'inscrit dans une problématique de recherche mathématique professionnelle ;
> (2) la question initiale est facile d'accès ;
> (3) des stratégies initiales existent, sans que soient indispensables des prérequis spécifiques ;
> (4) plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche et plusieurs développements sont possibles ;
> (5) une question résolue renvoie très souvent à une nouvelle question ;
> (6) des variables de recherche existent, elles pourraient être des variables didactiques — à la charge de l'enseignant —, mais dans ce cas-ci elles sont à la charge de l'élève (Grenier et Payan, 2003, pp. 191-192).

Par ailleurs, ce modèle est cohérent et dans la continuité par rapport à notre première étape sur l'épistémologie du problème, en particulier les points 1, 4, 5 en font echo. Les points 2,3 montrent aussi que ce modèle reste également en adéquation avec l'hypothèse de travail préalablement mentionnée. Le dernier point, quant à lui, est fondamental dans le processus de résolution du problème. En effet, faire des mathématiques c'est aussi approcher le problème en l'instanciant, c'est-à-dire en jouant sur les valeurs de ces variables. Ceci est donc de la responsabilité scientifique de celui qui tente de le résoudre et non de celui qui le propose. Ainsi, les concepts de variables didactiques de Brousseau (1998) et de variables de recherche de Godot (2005) nous seront utiles dans la construction de nos situations.

En outre, Grenier et Payan (2003, p. 197) évoquent trois aspects fondamentaux dans les SiRC : l'« enjeu de vérité » ; l'aspect « social » et l'aspect « recherche ». Nous en ajoutons un quatrième concernant l'aspect « ludique et captivant ». En effet, pour nos recherches et ayant un public différent de celui de l'institution scolaire traditionnel, il faut que la situation construite suscite l'envie de la découvrir, de chercher des solutions au problème... Ainsi, les choix de conception du milieu artefactuel sont donc des éléments non négligeables que nous devons prendre en compte. Ceci nous amène à la troisième étape de notre modèle touchant l'ergonomie du milieu.

Milieu et aspects ergonomiques

Enfin, la troisième étape de conception utilise la notion de milieu au sens de Brousseau (1998) et des éléments de l'ergonomie de Rabardel (1995) et de Tricot *et al.* (2003).
Brousseau (1998) définit le milieu de la situation comme :

> L'élève apprend en s'adaptant à un milieu qui est facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres, un peu comme le fait la société humaine. Ce savoir, fruit de l'adaptation de l'élève, se manifeste par des réponses nouvelles qui sont la preuve de l'apprentissage (*ibid.*, p. 59).

Nous étendons cette définition au sens de Sensevy et Mercier (2007) en parlant de la notion de double milieu. Le milieu de l'élève, qui dans notre contexte sera le public, est vu comme l'ensemble des conceptions du public et le milieu de la situation vu comme les actions possibles du public ainsi que les artefacts qui contiennent aussi les consignes du problème (milieu artefactuel). En effet, nous ne pouvons pas construire un milieu sans prendre en compte les connaissances intrinsèques des individus qui vont agir sur le milieu de la situation. Or, contrairement à la classe ordinaire nous n'avons pas accès à ces connaissances car le public est très varié. Pour rendre les situations accessibles et permettre aux individus de développer une activité mathématique en situation, il faudra veiller à ce que les connaissances mobilisées et visées soient accessibles à tous.

Ainsi, nous nous apercevons que pour générer le milieu, au sens double, il est important d'étudier les connaissances en jeu. Pour caractériser les connaissances mobilisées et visées, nous prendrons appui sur la caractérisation des connaissances donnée par Sackur, Drouhard, Assude, Paquelier et Maurel (2005). En particulier, les connaissances d'ordre I et II. Les auteurs définissent les connaissances d'ordre I comme « les définitions et les axiomes, les "contenus" des énoncés mathématiques vrais « (*ibid.*, p. 67). Elles sont relatives aux connaissances notionnelles. Alors que les connaissances d'ordre II font plutôt références à la représentation, dans différents registres, des objets mathématiques en jeu, au raisonnement, mais aussi à sa validité. Pour ces auteurs *faire des mathématiques*, c'est donc produire des connaissances d'ordre I, c'est-à-dire des énoncés mathématiques vrais au moyen de connaissances d'ordre II régies par la logique, la sémiosis et le raisonnement mathématique.

Dans notre travail, nous avons en fait caractérisé l'activité mathématique comme le fait de résoudre des problèmes détenant une quantité épistémologique significative, ce qui nécessite, lors de leur résolution, de mettre en œuvre certaines connaissances, nommées connaissances d'ordre II (voir chap. II) : étude de « petits » cas, CN, CS, formulation de conjectures, enjeu de vérité, raisonnements, modélisation...

Ainsi, cela montre aussi que notre modèle du problème transposé n'est pas utilisé, dans la conception de nos situations de manière totalement ordonné comme lors de l'évaluation du potentiel mathématique d'une ressource. Il y a bien là des va-et-vient entre la transposition didactique du problème — identification des connaissances mobilisées et visées par la situation — et l'ergonomie du milieu dans lequel le problème va être présenté afin d'apporter des déséquilibres, des difficultés et permettre aux individus de s'autoréguler par le biais des rétroactions renvoyées par le milieu de la situation.

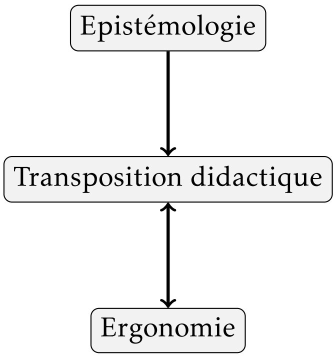


Figure IV.6 – *Modèle du problème transposé utilisé pour la conception d'une ingénierie : articulation entre transposition didactique et ergonomie du milieu.*

De plus, pour concevoir notre milieu artefactuel, nous nous appuierons sur des concepts issus de l'ergonomie (Rabardel, 1995 ; Tricot *et al.*, 2003). En particulier sur les notions d'*utilité*, d'*utilisabilité* et d'*acceptabilité* (Tricot *et al.*, 2003) mais aussi de l'effet de détournement d'un artefact (*catachrèse*) de ce pourquoi il a été construit initialement (Rabardel, 1995). Ces éléments ont déjà été mentionnés avant, notamment dans le processus d'évaluation d'une ressource par exemple (voir section 1.2, p. 40).

3.3 Caractérisation des zones fonctionnelles du milieu et nouvelle question de recherche

Enfin, nous construisons un milieu dans le but que les individus placés en résolution de problèmes agissent sur ce dernier tout en ayant la possibilité de formuler, puis de valider leurs résultats. Nous savons que lorsqu'un individu (ou groupe d'individus) agit en vue de résoudre un problème, il produit des actions. Or, les actions dirigées vers le milieu n'ont pas toutes les mêmes fonctionnalités. C'est-à-dire qu'elles ne sont pas toutes sur un même plan dans l'activité mathématique que nous cherchons à repérer. Il nous semble alors intéressant de proposer une partition du milieu de la situation afin de typer les actions en fonction des éléments de cette partition.

Brousseau (1990) propose une première structuration du milieu complétée par Margolinas (1995) avec différents niveaux du milieu, de l'élève, du professeur et des situations. Cette structuration n'est pas utile pour nos travaux puisqu'elle ne permet pas de catégoriser les actions réalisées sur le milieu en situation.

En revanche, nous allons plutôt nous intéresser à catégoriser le milieu effectif de la situation, c'est-à-dire celui qui sera proposé au public en fonction des actions qui pourraient être engendrées par l'individu (ou groupe d'individus) qui agit. Ces actions sont de natures diverses et appartiennent à différentes « zones » du milieu qui ont des fonctionnalités différentes dans la résolution du problème $\mathscr{P}$ donné. Nous retrouvons une caractérisation du milieu effectif dans lequel le sujet (ou groupe de sujets) agit selon trois espaces : le micro-espace, le méso-espace et enfin le macro-espace (voir p. ex., Berthelot et Salin, 1992 ; Brousseau, 1983 ; Gálvez, 1985). Cette caractérisation permet d'engendrer une valeur de la « taille » de l'espace dans lequel le sujet (ou groupe de sujets) entre en interaction (Berthelot et Salin, 1992, p. 98). Par exemple, le micro-espace est « l'espace d'interactions liées à la manipulation des petits objets » (*ibid.*, p. 99) et le méso-espace, selon (Brousseau, 1983) et repris par Berthelot et Salin (1992), est défini comme :

> L'espace des déplacements du sujet dans un domaine contrôlé par la vue, les objets sont fixes et mesurent entre 0,5 et 50 fois la taille du sujet » (D'après Brousseau 1983 cité par Berthelot et Salin, 1992, p. 99).

Ainsi, nous pourrions avoir des actions qui relèvent du micro-espace, et d'autres, du méso-espace qui ne sont pas présentes dans le micro-espace par exemple. Cependant, certaines interactions avec des « petits objets » du micro-espace n'ont pas le même rôle dans l'activité mathématique.
D'ailleurs, cette classification permet juste de « découper » le milieu selon la valeur de la variable concernant la « taille » de l'espace, elle est, pour nos besoins, trop générale et ne permet pas réellement de catégoriser finement nos actions élémentaires sur les différents espaces, d'autant plus qu'ils sont en réalité encapsulés. Ainsi, il nous semble plus pertinent de catégoriser notre milieu selon ces fonctionnalités. Ceci nous donnera l'avantage de pouvoir typer nos actions en fonction de la zone d'interaction et de leur fonction attribuée.

De manière générale, nous caractérisons donc le milieu — artefactuel — en zones fonctionnelles : *la zone de travail* ($\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$) ; *la zone d'outillage* ($\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$) et la zone d'information ($\mathcal{Z}_{\mathcal{I}}$) tout en prenant en considération, dans la situation, la dimension sociale [4].

4. La dimension sociale est une part importante de l'activité mathématique puisqu'elle permet de repérer des actions liées à la formulation de connaissances d'ordre II, comme l'émission de conjectures, la formulation d'un changement de registre de représentation d'un objet en jeu ou bien la formulation de CS et de CN par exemple.

- La $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$ est la zone principale du milieu où le sujet va agir en vue de donner des éléments de réponse au problème. Les actions sur cette zone sont donc liées aux actions de résolution du problème.
- La $\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$ est la zone du milieu qui fournit au(x) sujet(s) les objets nécessaires à l'élaboration des actions de résolution du problème.
- La $\mathcal{Z}_{\mathcal{I}}$ est la zone du milieu qui communique des informations sur le problème : règle du jeu, consigne, exemple, etc.

Maintenant que nous avons donné des indications concernant l'élaboration de notre ingénierie didactique, par une analyse *a priori* selon le modèle *du problème transposé*, et que nous avons caractérisé le milieu en zones fonctionnelles afin de pouvoir donner une typologie des actions selon ces zones, nous allons à présent tenter de répondre à cette nouvelle question de recherche.

- **Comment repérer des traces d'activité mathématique d'individus placés en autonomie face à un problème $\mathscr{P}$ donné ?**

Et ainsi, pourvoir inférer si les individus ont fait des mathématiques ou non.

3.4 Les stratégies : un moyen pour repérer l'activité mathématique d'individus

Avant d'expliciter nos choix sur la méthode de recueil des données et de proposer un modèle pour repérer les traces d'activité, il convient de donner une définition plus pragmatique de l'activité mathématique. En effet, comme nous l'avons déjà définie comme objet d'étude dans le chapitre II, l'acception donnée à l'activité mathématique relève d'une vision « méta » de cette activité, donc difficilement opérationnelle en situation d'expérimentations.

Pour repérer des traces d'activité d'individus afin de pouvoir induire si ces traces relèvent bien de la pratique mathématique, il nous faut repérer des actions en fonction des connaissances que nous avons sur la résolution du problème. Un moyen d'y parvenir, et donc d'observer si les individus sont dans une activité mathématique, est de relever leurs stratégies de résolution du problème mettant en jeu des connaissances d'ordre II. Ainsi, pragmatiquement, faire des mathématiques c'est produire des stratégies qui nécessitent la mobilisation de connaissances d'ordre II, au moyen d'actions ordonnées réalisées sur des objets, en vue de résoudre un problème $\mathscr{P}$ donné. La structuration des actions amenant à des stratégies nous donnera des indications sur les connaissances d'ordre II mobilisées et donc sur les processus de raisonnement mis en œuvre dans la résolution du problème .

De plus, ces stratégies seront définies, soit en *extension*, soit en *compréhension*. En effet, lorsque nous aurons accès à toutes les stratégies et que nous serons capable de les décrire comme une suite d'actions a_i, sur des objets instanciés

o_j, nous les définirons en extension. Ainsi, la séquence $a_i o_j$ définira un *mot* w caractérisant une stratégie particulière décrite par cette séquence. Par exemple, le mot $w = a_1 o_3 a_2 o_2 a_5 o_3$ correspond à une stratégie caractérisée par trois actions a_1, a_2 et a_5 sur deux objets différents o_3 et o_2. Lorsqu'un mot sera de la forme $w = a_i o_j a_i o_j \dots a_i o_j$, on dira que w est périodique et son motif périodique sera décrit par $a_i o_j$. Ainsi, repérer si un mot est périodique dans une séquence peut se relever pertinent si nous recherchons des stratégies de périodicité comme la recherche de motifs périodiques dans un pavage par exemple.

En revanche, lorsqu'il ne sera pas possible de décrire toutes les stratégies, car trop nombreuses par exemple, nous décrirons ces stratégies en compréhension, c'est-à-dire à l'aide d'ensemble d'actions sur des objets génériques [5].

Notons aussi que certaines connaissances d'ordre II liées à des actions de formulation comme par exemple la formulation de conjectures, de CS et de CN, voire la formulation de changement de registre de représentation amenant parfois à des prémisses de modélisation, ne sont pas clairement identifiables avec les stratégies. Il est donc nécessaire de prendre aussi en compte les actions relatives à la dimension sociale de l'activité pour identifier précisément ces connaissances d'ordre II spécifiques. En outre, cela montre aussi que l'activité mathématique doit être une activité socialement partagée si l'on souhaite que ces connaissances d'ordre II soient mobilisées en situation.

4 Conclusion et poursuite de notre questionnement

Ce chapitre propose des outils théoriques pour tenter d'apporter des réponses à notre problématique à savoir, s'il est possible de faire des mathématiques dans les institutions de culture scientifique de type musée ou centre. L'hypothèse de recherche que nous soutenons dans cette thèse est qu'il est possible de faire des mathématiques dans ces infrastructures si d'une part, elles possèdent des conditions propices à une telle pratique : volonté de faire des mathématiques *a contrario* de les montrer, public volontaire, temps alloué aux activités suffisant, responsabilité scientifique donnée au public (forme de médiation favorisant l'autonomie du public)... D'autre part, que ces institutions proposent des ressources ayant un potentiel mathématique pour favoriser cette pratique mathématique.

Ces outils théoriques vont ainsi nous permettre d'une part, de structurer notre étude écologique sur la place de l'activité mathématique au sein des institutions de type musée ou centre de culture scientifique, d'autre part, de concevoir, grâce à notre modèle du problème transposé, des ingénieries didactiques avec

5. Un choix justifié entre les stratégies définies en extension ou en compréhension sera réalisé dans le chapitre V et en particulier à la section 2.3, p. 63.

pour volonté de proposer des situations qui favorisent la pratique mathématique dans ce contexte spécifique.

Pour réaliser notre étude écologique, au niveau macro-didactique, nous utiliserons l'échelle des niveaux de co-détermination didactique de Chevallard (2010). L'usage de cet outil nous permettra d'évaluer, à différents degrés de granularité, les conditions et les contraintes permettant de faire vivre la pratique mathématique. Au niveau de la discipline, nous utiliserons notre modèle du problème transposé pour évaluer le potentiel mathématique des ressources proposées dans ce contexte. L'évaluation se fera en trois étapes, d'abord au niveau épistémologique, puis au niveau de la transposition didactique et enfin au niveau ergonomique. Par ailleurs, lors de la conception de nos ingénieries didactiques, nous réutiliserons ce modèle mais en prêtant attention à bien articuler le niveau didactique et ergonomique dans la construction du milieu.

Enfin, la suite de notre travail conduit à nous interroger sur les moyens qui permettent de repérer les traces d'activité mathématique d'individus lorsqu'ils sont placés, dans ce contexte spécifique, en résolution de problème. Pour ce faire, notre choix s'est porté sur l'identification des stratégies mises en œuvre qui mobilisent des connaissances d'ordre II (CN, CS, raisonnements...). Nous confronterons ainsi les stratégies relevées dans l'analyse épistémologique qui nécessitent la mise en œuvre de connaissances d'ordre II et les stratégies effectivement mises en place par le public en situation d'expérimentation. A cette occasion et dans la continuité de ce travail, nous proposerons dans le prochain chapitre un modèle de traitement et d'analyse pour repérer ces traces et ainsi pouvoir inférer sur la pratique mathématique des individus.

Chapitre V

Modèle pour repérer les traces d'activité mathématique d'individus en résolution de problème

Avant de présenter notre modèle de traitement et d'analyse pour repérer les traces d'activité mathématique d'individus placés en résolution de problème, nous allons d'abord justifier notre choix sur la méthode de recueil de données utilisée. Nous montrons ensuite que la vidéo est utilisée pour la récolte de données dans la communauté didactique, mais que pour nos besoins, aucun outil de retranscription efficace n'est, à notre connaissance, disponible. D'où la nécessité pour nous de proposer un tel modèle de traitement et d'analyse de données audiovisuelles.

1 L'usage de la vidéo comme méthode de recueil de données

1.1 Intérêts et précautions

Il est vrai que l'usage du numérique et en particulier de la vidéo facilite grandement la récolte de données. Il faut tout de même prendre certaines précautions comme le souligne Forest (2013) :

> Une conception de l'image comme reflet d'une réalité objective traduirait en effet une naïveté épistémologique qui est contredite par tout ce que nous ont appris les théoriciens de l'image : sans même parler d'un éventuel montage, les plans et le cadrage représentent des choix, qui s'ajoutent à la simple question du moment et de la durée du recueil, forcément circonscrits (*ibid.*, p. 104).

De plus, l'auteur mentionne que :

> Les images que nous « percevons » sont ainsi les produits de nombreux stimuli, et pas seulement visuels, eux-même informés dans une large mesure par le langage et la culture. La réalité perçue par l'homme ne peut ainsi être confondue avec le point de vue qu'en donne un objectif, qui paradoxalement ne garantit pas l'objectivité du point de vue (Forest, 2013, p. 104).

En prenant ces précautions, nous pouvons tout de même supposer que l'usage de la vidéo permet de retracer *une partie* de la réalité même si celle-ci est soumise à plusieurs biais de récolte et d'interprétation. Cette méthode de recueil nous semble la plus efficace présentement [1] puisqu'elle nous permet de récolter « toutes » les actions des individus jugées épistémologiquement et didactiquement pertinentes lors de la résolution de problème et non celles que les individus souhaitent laisser à travers leurs productions écrites par exemple. Cette récolte de données porte donc directement sur les actions effectives des individus *in situ*. Comme le souligne l'auteur, « on a donc affaire à un recueil direct d'informations sur l'action, à la différence de modalités éventuellement complémentaires, par questionnaire et entretien, ou par expérimentation contrôlée » (*ibid.*, p. 105).

Nous pouvons bien entendu réaliser une récolte« naturaliste », où le chercheur prend des notes, en utilisant ou pas une grille d'observation critériée avec des indicateurs de validité qui permet, là-aussi, un recueil direct d'informations sur les actions. Néanmoins, ce choix de recueil nous fait sans aucun doute perdre de l'information, comme le souligne Forest (*ibid.*), et rend de fait la retranscription des données d'autant moins objective. De plus, si ces grilles sont construites en amont du recueil, il y a déjà un biais d'objectivité et les phases de repérage et d'interprétation ne sont pas clairement identifiables.

Enfin la vidéo permet, *a contrario* des autres méthodes de recueil, de rejouer la scène autant de fois que nécessaire et ainsi « revenir sur les données recueillies et d'objectiver ainsi leur analyse » (*ibid.*, p. 105). Cette méthode permet en outre de laisser les individus placés en résolution de problème, dans des modalités adidactiques — sans la présence du chercheur, du médiateur... comme si l'on recréait, lors de nos expérimentations, des conditions réelles comme pourrait le vivre le public, en complète autonomie, dans les institutions de culture scientifique. Ainsi l'enregistrement audiovisuel semble être, actuellement, un bon moyen pour récolter des données à des fins de traitement et d'analyse.

1.2 L'usage de la vidéo en didactique

Nous informons le lecteur ou la lectrice que la littérature évoquée dans cette partie ne se veut pas être exhaustive. Elle a uniquement pour vocation de

1. Par rapport aux matériaux que nous avons à disposition.

montrer que la recherche en didactique se saisit de la vidéo comme méthode de recueil de données. Tout en pointant le fait que peu, voire aucun outil de retranscription efficace n'est, à notre connaissance, proposé à ce jour afin de « rejouer » finement les enregistrements audiovisuels en fonction des choix des observables effectués.

On observe en effet que de nombreuses recherches en didactique font usage de la vidéo pour la récolte de données. En particulier dans la formation des enseignants lors de l'analyse de pratiques et du renforcement des liens entre théorie et pratique professionnelle mais aussi en formation de formateurs (voir p. ex., Bertoni, Häusler, Floris et Weiss, 2006 ; Floris, Bertoni, Aymon, Ferrez et Weiss, 2010 ; Monnier, Weiss, de Marcellus, Erard et Staeger, 2008 ; Mottet, 1997 ; Robert et Vivier, 2013). A ce sujet, on retrouve aussi le projet de recherche ViSA [2] soutenu par l'ENS Lyon qui vise à mettre à disposition des chercheurs, des données audiovisuelles recueillies en situation d'enseignement et d'apprentissage, mais aussi de leur donner des éléments pour traiter et analyser ces données (voir p. ex., Tiberghien, 2015).

De plus, des recherches à l'échelle internationale utilisant la vidéo comme méthode de récolte de données ont également été mises en place comme, par exemple, la recherche *TIMSS 1999 Video* [3]. Cette recherche visait, comme le soulignent Ferrez, Floris et De Marcellus (2004) dans leur rapport, à utiliser pour la première fois « une telle technologie pour étudier l'enseignement à l'échelle d'un pays et comparer entre elles les pratiques d'enseignement de plusieurs pays » (p. 9).

Par ailleurs, d'autres recherches en didactique utilisent la vidéo pour récolter des données sur l'activité des élèves, de l'enseignant et des interactions qu'ils pourraient y avoir entre eux (voir p. ex., Chanudet, Coppé, Gandit et Moulin, 2017 ; Da Ronch, 2018b, 2019a,b ; Favier, 2022 ; Front, 2015).

Cependant, on constate qu'aucune méthode concrète de retranscription de données audiovisuelles, permettant de retranscrire le plus fidèlement possible « l'intégralité » des actions réalisées et jugées pertinentes au regard des choix des observables, n'est réellement proposée dans ces travaux.

Or, dans le cadre de notre recherche on s'intéresse à repérer des traces d'activité mathématique de sujet(s) par rapport à nos connaissances sur un problème $\mathscr{P}$ donné. Notre objectif est donc de retranscrire, à partir de données audio-

2. Vidéos de Situations d'Apprentissage (ViSA) : http://visa.ens-lyon.fr/.
3. Third International Mathematics and Science Study Replication (TIMSS) : http://www.timssvideo.com/.

visuelles [4], le plus fidèlement possible les actions de sujets jugées pertinentes par rapport à la résolution du problème donné et qui sont réalisées — éventuellement — sur des objets tangibles en vue de les analyser par la suite. Nous développons alors un modèle de traitement et d'analyse de données (Da Ronch, Gandit et Gravier, 2023) [5] que nous illustrons sur quelques exemples afin de montrer son caractère opérationnel. Ce modèle nous servira dans la suite de notre travail de recherche pour traiter et analyser les traces d'activité de sujets menées lors de nos expérimentations.

Ce modèle se scinde en trois étapes principales : une première au niveau du choix des observables ; une deuxième au niveau de la retranscription d'expériences ; et enfin, une dernière étape au niveau de l'analyse des retranscriptions. Pour chacune des étapes nous apporterons des éléments de réponse aux questions formulées dans la figure V.1 ci-après.

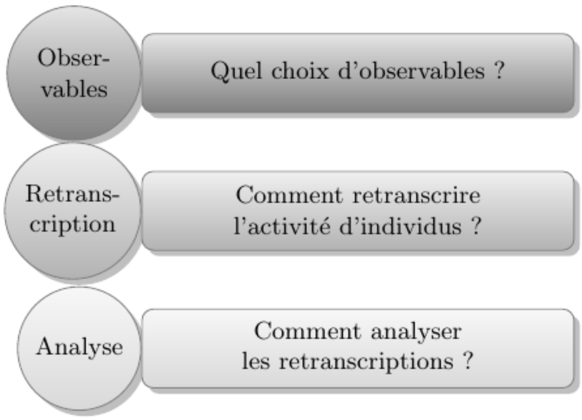


Figure V.1 – Questions formulées pour chaque étape de notre modèle.

2 Description du modèle au niveau des choix des observables

2.1 Typologie et choix d'actions

Dans les choix des observables, il nous faut d'abord identifier des actions élémentaires a_i. Parmi ces actions a_i nous conservons un sous-ensemble $\mathcal{A}$ pour

4. Ce choix a été justifié en début de chapitre, mais on pourrait très bien imaginer d'autres types de recueil comme une machine qui serait capable de retranscrire les actions de sujets de manière automatique par rapport à des actions préalablement choisies pour ensuite les retranscrire en un format symbolique.

5. La présentation de ce modèle a fait l'objet d'un article dans les actes de la XXI^e^ École d'Été de Didactique des Mathématiques (Da Ronch, Gandit et Gravier, 2023).

des raisons épistémologiques, c'est-à-dire des actions qui ont un lien étroit avec la résolution du problème ou bien pour des raisons didactiques. De plus, comme nous souhaitons traiter un corpus de données audiovisuelles nous imposons que l'ensemble $\mathcal{A}$ de ces actions élémentaires soit fini.

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, les actions élémentaires a_i sont réalisées sur le milieu de la situation construit à cet effet. Nous avons montré qu'il était nécessaire de caractériser ce milieu, notamment le milieu artefactuel, en fonction des zones fonctionnelles allouées : la *zone de travail* ($\mathcal{Z}_\mathcal{T}$), la *zone d'outillage* ($\mathcal{Z}_\mathcal{O}$) et enfin la *la zone d'information* ($\mathcal{Z}_\mathcal{I}$). Évidemment nous prenons aussi en considération, dans la situation, la dimension sociale.

Ainsi, selon la caractérisation donnée à notre milieu dans lequel le sujet ou groupe de sujets va agir en vue de résoudre un problème $\mathscr{P}$, nous proposons une typologie des actions $a_i \in \mathcal{A}$ selon quatre types.

- Les $\mathcal{T}$-actions qui sont les actions de modification de la zone de travail ($\mathcal{Z}_\mathcal{T}$)
- Les $\mathcal{O}$-actions qui sont les actions d'interaction avec la zone d'outillage ($\mathcal{Z}_\mathcal{O}$) .
- Les $\mathcal{I}$-actions qui sont les actions qui permettent d'accéder à la zone d'information ($\mathcal{Z}_\mathcal{I}$) .
- Et enfin, les $\mathcal{S}_\mathcal{O}$-actions qui sont les actions relevant des interactions sociales relatives aux échanges entre pairs voire à soi-même. Elles peuvent relever d'action dans le langage oral ou d'action monstrative qui consiste à communiquer dans un langage gestuel .

Exemple V.1

Exemple « feuille-fiche-trousse » — En classe lorsqu'un élève ou étudiant est confronté à la résolution d'un problème, on pourrait dire que sa $\mathcal{Z}_\mathcal{T}$ relève par exemple de la feuille sur laquelle il va écrire et/ou effacer et donc modifier $\mathcal{Z}_\mathcal{T}$. Pour effectuer ces modifications il va devoir interagir avec des objets qui sont à sa disposition, ce sont les objets disponibles dans sa trousse : crayon, stylo, gomme, règle... Par ces faits, il semble donc important de distinguer les $\mathcal{T}$-actions qui relèvent d'une modification de $\mathcal{Z}_\mathcal{T}$ des $\mathcal{O}$-actions qui consistent à interagir avec les objets de $\mathcal{Z}_\mathcal{O}$ nécessaires à la réalisation d'une $\mathcal{T}$-action. En prenant l'exemple de la feuille-fiche-trousse, on se rend bien compte que l'on doit dissocier le fait que le sujet prenne un stylo dans la trousse du fait qu'il écrive avec le stylo. L'action de prendre un stylo dans $\mathcal{Z}_\mathcal{O}$ qui ici est la trousse, est en particulier une $\mathcal{O}$-action nécessaire et préalable mais non suffisante pour la $\mathcal{T}$-action qui consiste à écrire sur la feuille, donc à modifier $\mathcal{Z}_\mathcal{T}$. De plus, il pourrait également y avoir une $\mathcal{Z}_\mathcal{I}$ mise à disposition de l'élève ou de l'étudiant comme une fiche mentionnant le problème, les consignes, les rappels ou les points importants... Les actions réalisées dans cette zone, qui pourraient être par exemple la lecture de la consigne ou bien l'usage d'un rappel, relèvent donc, d'après notre typologie, des $\mathcal{I}$-actions.

2.2 Partition des $\mathcal{O}$-actions en des actions de sélection ou de dépôt d'objet

Notre typologie pourrait bien entendu être affinée. En particulier, les $\mathcal{O}$-actions peuvent être partitionnées en des actions de sélection d'objet $\mathcal{O}_s$-actions et des actions de dépôt d'objet $\mathcal{O}_d$-actions.

En effet, le fait de sélectionner un objet dans $\mathcal{Z}_\mathcal{O}$ peut révéler des éléments de stratégies de résolution du problème.

Exemple V.2

Exemple de construction d'une médiatrice — La procédure de construction de la médiatrice d'un segment peut être influencée par le matériel sélectionné dans la zone d'outillage. En effet, le fait de sélectionner le compas, la règle et le crayon dans $\mathcal{Z}_\mathcal{O}$ peut être révélateur d'une procédure de construction différente que si l'on sélectionne l'équerre a contrario du compas par exemple. Ces $\mathcal{O}_s$-actions influent alors sur le processus de construction et semblent être pertinentes à décrire puisqu'elles jouent le rôle d'indicateurs permettant d'induire certaines stratégies.

En outre, si $\mathcal{Z}_\mathcal{O}$ a suffisamment d'objets alors les actions qui consistent à déposer des objets dans $\mathcal{Z}_\mathcal{O}$ ne devraient pas être révélatrices d'une activité de résolution de problème. En revanche, lorsque $\mathcal{Z}_\mathcal{O}$ est « pauvre » cela affirme une intentionnalité didactique et alors la description des $\mathcal{O}_d$-actions est nécessaire.

Exemple V.3

Exemple de construction de polyèdres réguliers — On cherche à construire la sous-classe des polyèdres réguliers avec comme matériel disponible seulement douze arêtes et huit sommets. Si l'on commence par construire un tétraèdre régulier (quatre sommets et six arêtes) il est alors impossible de construire d'autres polyèdres réguliers différents. Il faut alors « casser » tout ou une partie de la structure pour déposer des objets (sommets et arêtes) afin de pouvoir en construire de nouveaux comme le cube ou l'octaèdre régulier. Le fait de travailler avec un petit nombre d'arêtes et de sommets dans $\mathcal{Z}_\mathcal{O}$ affirme une intentionnalité didactique sur le fait qu'on ne peut construire de nouvelles structures régulières que par des $\mathcal{O}_s$-actions et $\mathcal{O}_d$-actions. Il est alors évident que si le nombre d'arêtes et de sommets était en quantité suffisamment importante pour construire tous les polyèdres réguliers alors les $\mathcal{O}_d$-actions n'auraient pas d'intérêt à être précisées.

2.3 Stratégies de résolution définies en extension ou en compréhension

Le choix de notre ensemble fini $\mathcal{A}$ d'actions élémentaires relevant de $\mathcal{T}$-actions, de $\mathcal{O}$-actions, $\mathcal{I}$-actions et des $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$-actions est conditionné par rapport à nos connaissances sur la résolution du problème donné. Ainsi à ce niveau il y a clairement une part d'interprétation puisque des choix sont effectués en fonction de notre rapport personnel au problème relevant de ses éléments et ses conditions de résolution.

En outre, l'analyse épistémologique du problème nous permet d'identifier les stratégies de résolution. Cette dernière étant théoriquement « parfaite » elle nous permet donc d'avoir accès, de manière exhaustive, à toutes les stratégies. Comme mentionné dans le précédent chapitre, une *stratégie* est définie comme une concaténation ordonnée d'actions élémentaires a_i réalisées sur des objets instanciés o_j qui permettent de définir un mot, c'est-à-dire une séquence $a_i o_j$. Dans notre modèle, les stratégies sont donc définies en *extension* car l'analyse épistémologique nous les donne toutes. En pratique, nous les définissons en *compréhension*, c'est-à-dire regroupant des ensembles d'actions sur des objets génériques.

Exemple V.4

Exemple de stratégie pour le problème de pavage par des dominos avec une grille rectangulaire possédant un trou. — Ce problème a fait l'objet de plusieurs publications, il s'agit d'un problème de décision qui cherche à déterminer, si étant donné une grille rectangulaire quelconque avec un trou et des dominos en quantité suffisante, il est possible de la paver (voir p.ex., Grenier et Payan, 1998). En prenant le cas particulier de la grille 3×3 dans cette configuration (figure V.2), on démontre l'impossibilité de la paver par un argument de forçage. C'est-à-dire qu'on raisonne par conditions nécessaires en forçant le positionnement des dominos. En effet, supposons que le pavage existe, dans la première configuration de gauche (figure V.2) on est obligé, à réflexion près, de positionner le domino dans cette configuration. On réalise ainsi l'action a_1 qui consiste à ajouter l'objet domino o_2 dans cette position. En poursuivant le raisonnement de manière analogue, on obtient finalement une stratégie de forçage démontrant que le pavage est impossible. Cette stratégie correspond au mot w tel que

$$w = a_1 o_1 a_2 o_2 a_3 o_2 a_4 o_2$$

Dans cette séquence les a_i, avec $i = \{1, \ldots, 4\}$, sont des actions d'ajout avec des positionnements précis sur la grille 3×3 et o_1 (resp. o_2) correspond à l'unomino (resp. aux dominos).

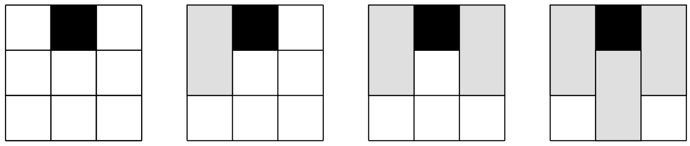


Figure V.2 – *Preuve par forçage pour démontrer l'impossibilité de paver la grille* 3×3 *avec le trou noir dans cette configuration.*

Il est assez évident que si la taille de carré était plus grande alors la stratégie d'impossibilité par forçage serait « coûteuse » à décrire avec une séquence $a_i o_j$ du fait que des sous-cas seraient à traiter. Ainsi, selon le cas, il est davantage pertinent de décrire les stratégies en compréhension.

3 Description du modèle au niveau de la retranscription d'expérience

3.1 Encodage des actions élémentaires en un format symbolique

Pour retranscrire les actions jugées pertinentes au regard de l'analyse *a priori*, notamment celles qui permettent de décrire les stratégies qui embarquent des connaissances d'ordre II et celles qui relèvent d'actions liées à la formulation de ces connaissances, nous devons alors procéder à un encodage de ces dernières. Afin de rendre intelligible notre retranscription, nous réalisons alors un encodage bijectif des actions a_i de $\mathcal{A}$ en un format symbolique intelligible pris dans un ensemble fini de symboles $\mathcal{L}$. Ces symboles sont construits au plus près possible de la réalité.

Exemple V.5

Exemple d'encodage pour le problème de pavage par des dominos avec une grille rectangulaire possédant un trou. —

Type d'action	Action élémentaire de $\mathcal{A}$	symbole associé de $\mathcal{L}$
$\mathcal{T}$-action	Ajouter	$+$
$\mathcal{T}$-action	Enlever	$-$
$\mathcal{O}$-action	Chercher	$\curvearrowright$
$\mathcal{S}_\mathcal{O}$-action	Pointer	$\curvearrowleft$
$\mathcal{S}_\mathcal{O}$-action	Dialoguer	
...	...	...

Tableau V.1 – *Quelques exemples d'encodage.*

Dans notre exemple, il n'est pas nécessaire de retenir la $\mathcal{O}$-action « chercher » puisque les dominos sont identiques et en nombre suffisant... En revanche, ce pourrait être utile dans d'autres cas, notamment lorsque $\mathcal{Z}_O$ possède un certain nombre d'objets différents. En outre, la $\mathcal{S}_O$-action « dialoguer » peut aussi être relative à un monologue.

3.2 Méthode pour retranscrire les données

Cette deuxième étape est dépourvue d'interprétation, elle est complètement déterministe puisque le traitement pourrait, dans l'idéal, être réalisé de manière automatique par une machine déterministe. On cherche ici à retranscrire le plus fidèlement possible le corpus de données audiovisuelles en fonction des actions a_i de $\mathcal{A}$ préalablement choisies, réalisées sur des objets o_j de $\mathcal{O}$, — éventuellement inexistants [6] —, par des sujets s_k de $\mathcal{S}$. Les actions réalisées sur des objets sont effectuées par des sujets, ceci caractérise donc l'activité locale d'un individu qui est en train d'agir. Nous définissons alors le triplet $\left(a_i, o_j, s_k\right) \in \mathcal{A} \times \mathcal{O} \times \mathcal{S}$ comme une *micro-activité* permettant de caractériser chacune des actions réalisées sur des objets par les sujets observés. En outre, chaque micro-activité est ordonnée par un *marqueur occuro-temporel* vu comme un couple mentionnant l'occurrence discrétisée ($occ \in \mathbb{N}$) de cette dernière et l'instant $t \in [0, d]$ où elle est effectuée au cours de l'enregistrement audiovisuel.

$$\cdots \xrightarrow[occ]{t} (a_i\,, o_j\,, s_k) \xrightarrow[occ+1]{t'} (a_p\,, o_m\,, s_k) \xrightarrow[occ+2]{t''} \cdots$$

Entre chaque marqueur occuro-temporel peut se trouver une mais aussi plusieurs micro-activités commençant au même moment. C'est le cas notamment lorsque nous sommes confrontés à des facteurs contingents conduisant à un biais d'information — sujet devant l'objectif par exemple. C'est-à-dire qu'entre deux micro-activités clairement identifiables, il existe plusieurs micro-activités auxquelles nous ne sommes pas en mesure de donner un ordre, puisque nous ne savons pas, avec précision, quand elles ont été réalisées. De fait, nous supposons qu'elles commencent toutes au même moment. D'ailleurs, il se peut aussi que plusieurs micro-activités soient situées entre deux marqueurs lorsque ces dernières sont réalisées dans un laps de temps quasi-immédiat. Nous appelons *phase* toutes les micro-activités situées entre deux marqueurs.

$$\cdots \xrightarrow[occ]{t} \overbrace{\{\text{Liste non ordonnée d'actions simultanées}\}}^{\text{Phase}} \xrightarrow[occ+1]{t'} \cdots$$

6. C'est le cas notamment lors d'actions relevant du dialogue ($\mathcal{S}_O$-action) par exemple.

Il est important de mentionner ici l'hypothèse selon laquelle le temps d'exécution de ces micro-activités est identique, ce qui implique la fin de ces dernières dès lors qu'un nouveau marqueur apparait explicitant de fait le début d'une « nouvelle » micro-activité. A contrario, si certaines d'entre elles ont des temps d'exécution différents, il est alors nécessaire d'avoir un marqueur de fin précisant l'occurrence et le positionnement de la micro-activité à laquelle ce marqueur fait référence, mais aussi son temps de fin. Nous avons donc tout intérêt au niveau des choix d'actions à conserver, dans la mesure du possible, des actions ayant des temps d'exécution « unitaires » car plus les actions choisies, et donc les micro-activités observées, ont des temps d'exécution différents, plus l'écriture et la lecture de la retranscription seront complexes. Afin d'illustrer nos propos, nous présentons ci-après deux exemples explicites (exemple V.6 et exemple V.7).

Exemple V.6

Exemple de micro-activités avec des temps d'exécution différents lors d'un entretien— Imaginons que l'on doive retranscrire finement le discours et les gestes d'un sujet lors d'un entretien en vue d'en analyser son comportement dans une situation problématique. Cet individu peut tout à fait, à un instant t, de l'entretien démarrer des actions simultanément en ayant toutes ou en partie des durées d'exécution différentes. Par exemple, le sujet s_1 observé à l'instant t prend la parole (a_1) pour répondre au problème tout en bougeant sa jambe (a_2) et en se touchant la menton (a_3). A l'instant $t' > t$ ce dernier continue toujours à s'exprimer par rapport au problème posé par son interlocuteur, seulement il a arrêté d'effectuer un mouvement avec sa jambe et ne se touche plus le menton mais a démarré, à cet instant t', une nouvelle action qui consiste à croiser ses jambes (a_4)... Au niveau de l'occurrence du temps t' nous sommes contraints de préciser que les micro-activités du sujet s_1 relatives aux actions a_2 et a_3 sont terminées alors qu'une nouvelle commence en lien avec l'action a_4 tout en poursuivant l'action a_1 qui elle n'a pas cessé.

Dans ce qui suit tous les objets (domino, unomino et grille) sont tangibles et manipulables et la grille à paver est de taille 5×5. L'exemple ci-après montre la manière de retranscrire l'activité des individus.

Exemple V.7

Exemple de retranscription pour le problème de pavage par des dominos avec une grille rectangulaire possédant un trou. — Dans cet extrait il y a deux joueurs s_1 et s_2 qui « cherchent à paver une grille 5×5 avec des dominos. Cette grille possède un trou (unomino noir) dont le positionnement est laissé à la charge des joueurs. Dans la retranscription, les sujets sont identifiables grâce aux couleurs rouge et bleue correspondant respectivement à s_1 et s_2. De plus, lorsqu'un sujet pose ou enlève, par exemple, un domino, on présente ce domino verticalement ou horizontalement que l'on munit, avec la couleur du joueur, du signe + ou − et des coordonnées de la case de la grille sur laquelle la case SUD (resp. OUEST) du domino vertical (resp. horizontal) est positionné. Pour identifier rapidement les coordonnées sur la grille 5×5, nous prenons comme origine la case du bas gauche de la grille dont les coordonnées sont $(1,1)$.

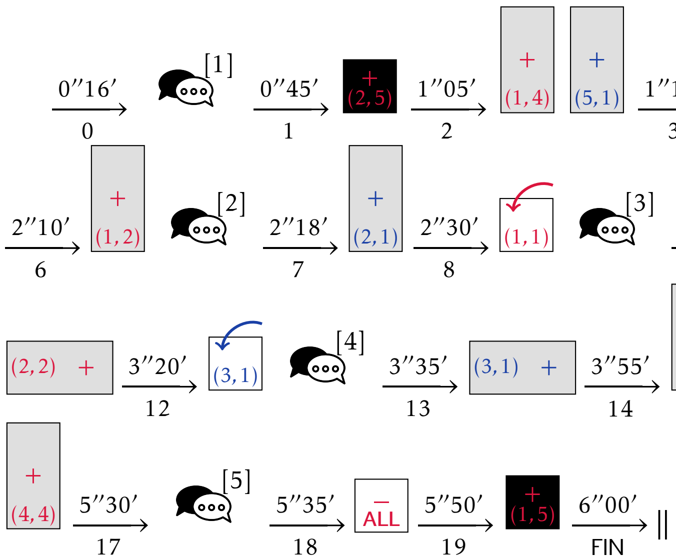


FIGURE V.3 – *Un exemple de retranscription de micro-activités.*

Le lecteur ou la lectrice retrouvera la transcription des dialogues ou monologues à l'annexe B de ce travail (p. 325).

La micro-activité située entre la 18ᵉ et la 19ᵉ occurrence est en réalité une somme de micro-activités de suppressions de dominos. Cela signifie que le sujet s_1 enlève l'intégralité (ALL) des dominos et de l'unomino posés sur la grille. Il serait trop fastidieux de préciser chacun des dominos enlevés dans le cas où tous les objets posés sont ôtés. De plus, cela permet au lecteur ou la lectrice qui lit la retranscription de se rendre compte rapidement que la partie est à nouveau à l'état initial.

À l'aide, si besoin, du tableau V.1 des actions (p. 64) et de la grille 5×5 ci-après, nous invitons le lecteur ou la lectrice à jouer la scène retranscrite de l'exemple V.7 pour s'approprier la sémantique de la retranscription.

(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)

FIGURE V.4 – *Grille* 5×5 *pour aider le lectorat à jouer la scène retranscrite.*

3.3 Résumé : une photographie enrichie

Nous proposons ensuite d'enrichir notre retranscription par un *résumé*, c'est-à-dire une photographie « enrichie » à un instant donné de la zone de travail permettant d'avoir une vision statique de la situation à un moment donné. Ce résumé permet donc de retracer la réalité du sujet ou des sujets à un instant t. Il permet aussi de connaitre exactement le nombre d'occurrences des $\mathcal{T}$-actions du sujet sachant le nombre d'occurrences des $\mathcal{T}$-actions des autres sujets. Ceci permet donc d'avoir le nombre de $\mathcal{T}$-actions réalisées entre deux $\mathcal{T}$-actions effectives mais aussi de connaître la distribution de ces actions, le sujet s_1 a-t-il effectué plus, moins ou autant de $\mathcal{T}$-actions que le sujet s_2 par exemple ? Dans ce résumé, nous ne prenons pas en compte l'occurrence des actions relevant d'autres types ($\mathcal{O}$-action, $\mathcal{I}$-action, $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$-action), ni le temps.

Exemple V.8

Exemple de résumé pour le problème de pavage par des dominos avec une grille rectangulaire possédant un trou (en lien avec la retranscription de l'exemple V.7, p. 66).— Ici on voit la réalité des sujets à un instant t de la retranscription. Les couleurs représentent toujours les sujets s_1 et s_2. Les symboles de type $a|_b$ où a et b sont des nombres entiers représentant, quant à eux, le nombre d'occurrences des $\mathcal{T}$-actions du sujet s_1 (resp. s_2) sachant le nombre d'occurrences des $\mathcal{T}$-actions de l'autre sujet s_2 (resp. s_1). Par exemple, le sujet s_1 pose, lors de sa première $\mathcal{T}$-action, l'unomino en position $(2,5)$ sachant que le sujet s_2 n'a pas encore réalisé de $\mathcal{T}$-action (voir retranscription de l'exemple V.7 et en particulier l'intervalle $[0,2[$). Il est aussi possible que plusieurs dominos posés possèdent le même symbole, dans notre cas $9|_4$. Cela signifie que ces dominos ont été posés simultanément par s_1 ou dans un temps quasi immédiat, ou encore, qu'il n'a pas été possible de déterminer l'ordre de ces micro-activités (voir retranscription de l'exemple V.7 et en particulier l'intervalle $[15,16[$).

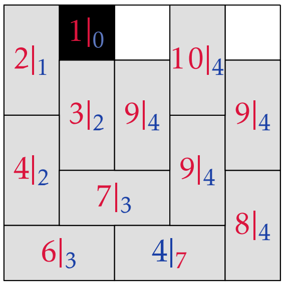
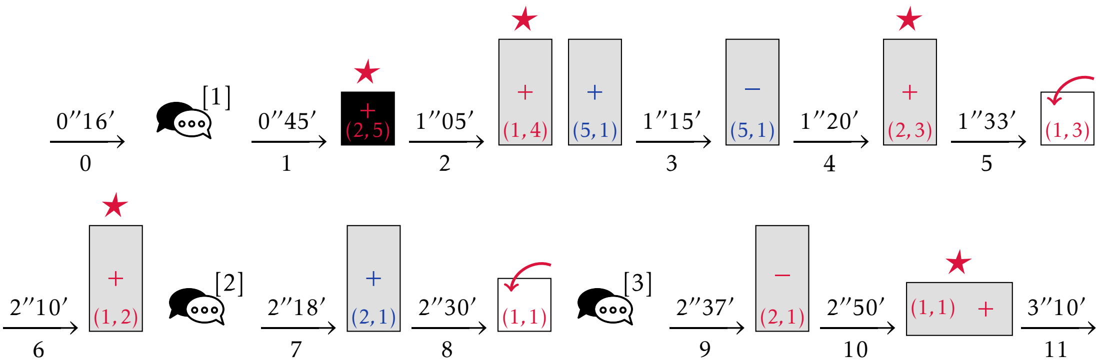


Figure V.5 – *Exemple de résumé relatif à l'intervalle* $[0, 17[$ *de la retranscription de l'exemple V.7, p. 66.*

Le résumé reproduit donc la $\mathcal{Z}_\mathcal{T}$ dans laquelle les sujets se trouvent à un instant t ce qui s'avère être tout à fait complémentaire à la retranscription. Afin d'identifier rapidement les éléments de la retranscription qui vont apparaître dans le résumé, on peut faire le choix de proposer un symbole apparaissant au-dessus des lignes de retranscription afin de différencier les actions qui vont apparaitre dans le résumé de celles qui n'apparaîtront pas. Enfin, nous faisons le choix de proposer un résumé dès lors que plus ou moins vingt-cinq pour-cents de la $\mathcal{Z}_\mathcal{T}$ a été modifiée car cela nous semble assez significatif pour apercevoir l'évolution des traces dans la résolution du problème. Pour illustrer nos propos, nous invitons le lecteur ou la lectrice à consulter l'exemple ci-après (exemple V.9).

Exemple V.9

Fragment de retranscription (sans les monologues/dialogues rapportés) issu de l'exemple V.7, (p. 66). — Le symbole « ★ » est placé au-dessus de certaines micro-activités permettant ainsi d'identifier les éléments qui apparaissent dans les résumés. Ces résumés sont ensuite présentés en dessous de la retranscription dès lors que plus ou moins vingt-cinq pour-cents de la $\mathcal{Z}_\mathcal{T}$ a été modifiée.



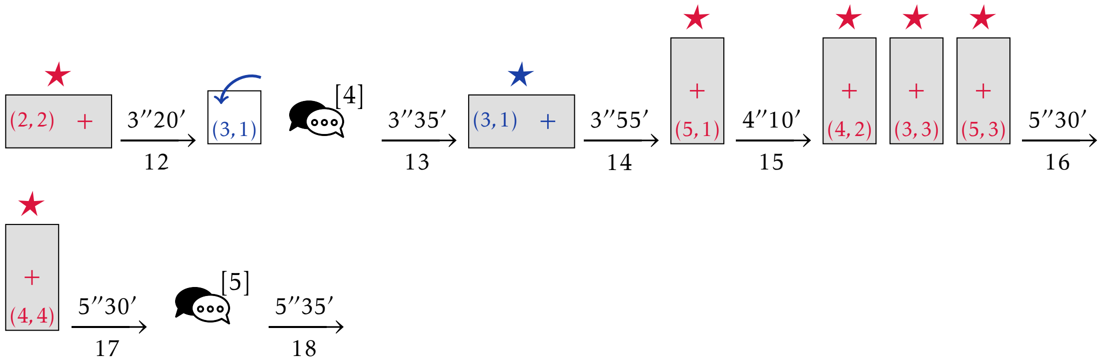
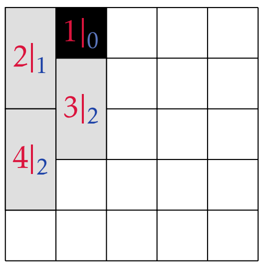
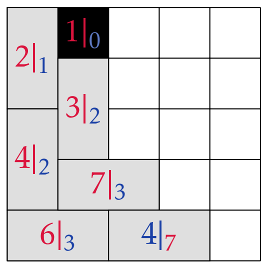


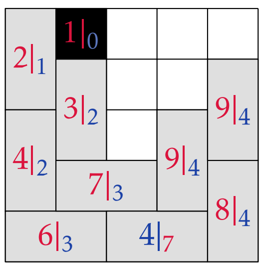
Figure V.6 – *Fragment de retranscription correspondant à l'intervalle* [0,18[*de l'exemple V.7 (p. 66) avec le symbole « ★ » permettant d'identifier les éléments qui apparaissent dans les résumés.*



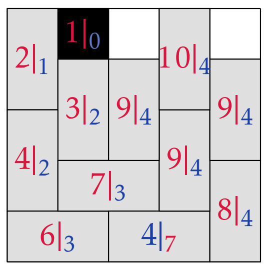
(a) Résumé correspondant à intervalle [0,7[dans la retranscription.



(b) Résumé correspondant à intervalle [0,14[dans la retranscription.



(c) Résumé correspondant à intervalle [0,16[dans la retranscription.



(d) Résumé correspondant à intervalle [0,18[dans la retranscription.

Figure V.7 – *Résumés de la retranscription de l'exemple V.7 (p. 66) décrivant une « photographie enrichie » de la situation à instant t qui précise, pour chaque joueur, le nombre d'occurences de ses $\mathcal{T}$-actions sachant le nombre d'occurences des $\mathcal{T}$-actions de l'autre joueur.*

En outre, nous pouvons également faire des choix paramétriques sur le résumé. Par exemple, au lieu de dénombrer l'occurrence de toutes les $\mathcal{T}$-actions sur la $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$, nous pouvons faire le choix de cibler une $\mathcal{T}$-action particulière et d'observer sa distribution tout au long de la partie.

Exemple V.10

Exemple de résumé de l'exemple V.7 (p. 66).— Ici seul l'occurrence de l'ajout « + » est pris en compte. Cela permet de suivre plus facilement le cheminement des sujets dans les ajouts successifs de dominos, mais aussi de déterminer explicitement le nombre de fois où des dominos ajoutés ont été retirés. Par exemple, les dominos ajoutés par le joueur s_1 n'ont pas été retirés puisque les occurrences d'ajouts se suivent de un en un. En revanche, ce n'est pas le cas pour le joueur s_2 puisqu'à sa troisième occurrence d'ajout, il a posé un domino qui apparaît dans le résumé et qu'aucun autre domino du joueur s_2 n'est présent dans ce dernier. Cela sous-tend donc qu'avant cette occurrence, il a ajouté deux dominos qu'il (ou l'autre joueur) a supprimés ensuite.

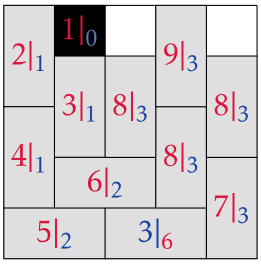


Figure V.8 – *Résumé prenant en compte uniquement l'occurence de l'ajout « + ».*

Outre ces faits, on pourrait naturellement se demander pourquoi ne pas utiliser uniquement des résumés en guise de retranscription. En fait ces derniers, bien qu'ils décrivent la réalité des sujets à un moment donné, nous font perdre des informations importantes concernant les autres micro-activités réalisées sur d'autres zones, les « bruits » lors d'essais-erreurs et le temps t d'exécution de toutes ces micro-activités. Pour ces raisons, il nous semble important que ces résumés viennent en complément de la retranscription.

4 Description du modèle au niveau de l'analyse des retranscriptions

La retranscription représente un mot de la forme $a_i o_j$ qui permet en plus de savoir, pour une action retranscrite, celui qui l'a effectuée. On cherche ici à repérer des sous-mots de la séquence de retranscription de la forme $a_i o_j$ relatifs aux stratégies identifiées dans le choix des observables.

On vérifie alors qu'ils sont identiques ou « proches » de ces stratégies pour inférer qu'un sujet (ou groupe de sujets) a mis en œuvre telle ou telle stratégie qui a nécessité la mobilisation de connaissances d'ordre II (CN, CS, raisonnements...), rendant alors plausible l'entrée dans la pratique mathématique. Bien entendu, dans les faits, un individu qui encode les micro-activités afin de retranscrire fidèlement le corpus de données réalise au même moment cette étape d'analyse.

En outre, comme nous avons fait le choix de définir, pour des raisons pratiques, les stratégies non pas en extension mais en compréhension, il s'agit lors de cette étape de repérer, dans la retranscription, si une stratégie effective est une instanciation d'une des stratégies décrites en compréhension dans l'analyse épistémologique. Nous analysons dans l'exemple V.11 ci-après la retranscription de l'exemple V.7, p. 66.

Exemple V.11

Analyse de la retranscription de l'exemple V.7, p. 66.— On souhaite analyser l'activité du joueur rouge s_1 et du joueur bleu s_2. On va donc observer leurs micro-activités et plus précisément leur séquence $a_i o_j$.

Pour ce faire, nous allons dans un premier temps supprimer les « bruits » pour représenter le sous-mot décrit dans la retranscription. Ces bruits peuvent être relatifs au symbole de dialogue, aux dominos qui ont été ajoutés puis enlevés, aux actions monstratives... Nous obtenons ainsi le sous-mot suivant.

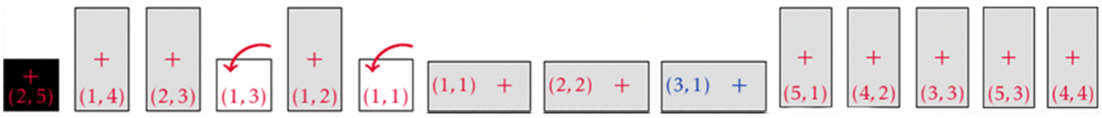


Figure V.9 – *Sous-mot extrait de la retranscription de l'exemple V.7, p. 66.*

En observant cette séquence, on s'aperçoit qu'elle est identique à la stratégie de forçage exhibée dans l'analyse mathématique (voir Gravier, Payan et Colliard, 2008, p. 63).

Ce sous-mot correspond donc à une stratégie de résolution. Il nous faut maintenant identifier « qui fait quoi » dans la construction de cette stratégie.

On observe effectivement que deux sujets s_1 et s_2 ont participé à la construction de ce sous-mot. Toutefois, il est important de déterminer l'activité pour chacun d'eux afin de ne pas attribuer de stratégies mobilisant des connaissances d'ordre II à des sujets qui auraient été, uniquement, de simples « spectateurs ».

Dans notre cas, le joueur s_2 a réalisé seulement une action dans ce sous-mot correspondant à l'ajout du domino horizontal en position $(3,1)$. Or, cette action a été en quelque sorte conditionnée par s_1 puisque le dialogue montre que les propos de s_1 semblent influencer l'action de s_2 (voir [4], p. 66). Ainsi, on peut attribuer raisonnablement cette stratégie au joueur s_1. Le discours de s_1 permet de renforcer le fait que le joueur raisonne par CN « On est obligé de positionner ce domino [...] » ou encore « [...] on a été obligé de positionner les dominos car à chaque fois il y avait une case coincée à recouvrir » (voir [2], [4], [5], annexe B, p. 325) .

En revanche, le raisonnement pour démontrer l'impossibilité à paver n'est pas complet car les joueurs n'ont pas étudié le deuxième sous-cas (*ibid.*, p. 63). D'ailleurs la fin de la retranscription entre le 17e marqueur et le marqueur de FIN montre que le joueur s_1 ôte tous les objets de la grille pour étudier une autre instance pour laquelle le positionnement du trou est modifié.

En conclusion, seul le joueur s_1 semble être entré dans une activité mathématique puisqu'il a mis en œuvre une stratégie de forçage identique à celle relevée dans l'analyse mathématique qui a nécessité la mobilisation de connaissances d'ordre II.

En effet le joueur s_1 pave, il suppose donc implicitement au départ que le pavage existe. Il raisonne ensuite par implication directe et plus exactement par condition nécessaire où il force l'ajout de chaque domino jusqu'à obtenir une absurdité, qui prouve partiellement (voir explication ci-avant) la non-existence du pavage dans cette configuration.

On remarque également que le joueur semble vouloir étudier différents cas particuliers qui dépendent du positionnement du trou sur la grille. L'étude de cas est aussi, comme nous l'avons vu préalablement, une connaissance d'ordre II liée au processus d'expérimentation dans l'activité mathématique de résolution de problème.

Nous proposons, à la figure V.10, une synthèse des étapes de notre modèle ORA (Observables-Retranscription-Analyse) concernant le traitement et l'analyse de données audiovisuelles. Comme nous l'avons vu à travers ce chapitre, ce modèle permet donc de donner un outil pour décrire, repérer et objectiver les traces d'activité mathématique d'individus lorsqu'ils sont placés en résolution de problème (figure V.10).

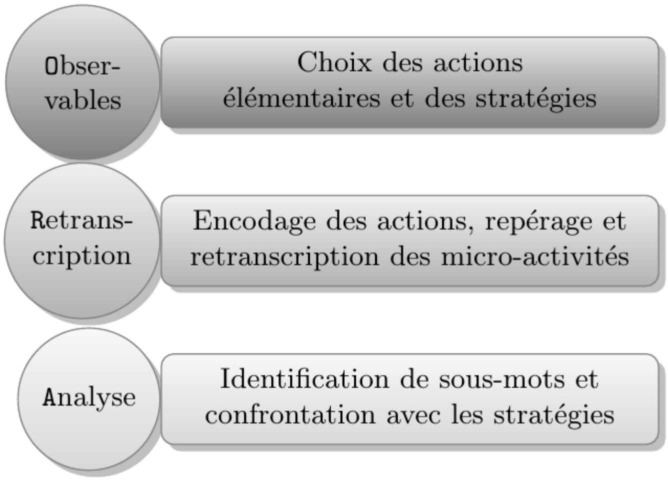


Figure V.10 – *Modèle ORA de traitement et d'analyse de données audiovisuelles.*

5 Forces et faiblesses du modèle

Nous avons présenté un modèle qui permet de décrire, repérer et objectiver les traces de l'activité de sujets en résolution de problèmes en pointant précisément la phase de repérage et d'interprétation. Nous savons effectivement où se situe la part d'interprétation dans notre modèle. Cette dernière se situe précisément au niveau des choix des observables : choix des actions et des stratégies qui semblent pertinentes, le reste est complètement déterministe sauf parfois au niveau de l'analyse des retranscriptions puisque les stratégies repérées peuvent être plus ou moins « proches » de celles identifiées dans l'analyse épistémologique du problème. Cela dépend donc de la valeur que nous attribuons au vocable « proche ».

Ce modèle montre aussi sa pertinence lorsqu'il s'agit de résoudre des problèmes utilisant des objets tangibles, dont les actions sur ces derniers sont similaires à celles conduites sous la forme « papier-crayon ». Les mathématiques discrètes par exemple semblent un domaine propice puisqu'un bon nombre d'objets mathématiques, — graphes, tuiles, polyminos...—, liés à des problèmes de combinatoire, d'optimisation discrète, etc., peuvent facilement être représentés sous la forme d'artefacts tangibles.

En outre, il semble probable que de tels problèmes, représentés sous la forme d'artefacts numériques, facilitent cette retranscription mais ouvrent alors naturellement un questionnement sur une autre transposition, celle de la transposition informatique. D'ailleurs, il serait pertinent, selon les possibilités, d'envisager le traitement et l'analyse de ces données sur une machine déterministe en se questionnant sur ce qu'il est envisageable de faire dans le domaine de l'intelligence artificielle. En effet, cela permettrait d'effectuer des fouilles de données importantes, pour une variété conséquente d'utilisateurs et sur une durée potentiellement élevée.

Par ailleurs, ce modèle permet aussi de réaliser des analyses quantitatives grâce à des fouilles de données recueillies sur une action spécifique, sur la distribution de certaines actions mais aussi sur le traitement des bruits.

Il possède aussi des limites notamment lorsque le temps d'exécution des actions est différent, ce qui complexifie la lecture et l'écriture de la retranscription. Ce modèle pose aussi question sur son opérationnalité dans le cas d'objets — mathématiques — abstraits complexes qui ne peuvent prendre un format tangible et qui rendent de fait l'encodage plus complexe.

Analyse écologique

Chapitre VI

Fait-on des mathématiques dans les institutions de culture scientifique ? Une étude de cas en France

Avant d'évaluer le potentiel mathématique des ressources proposées dans les institutions de culture scientifique, il nous faut tout d'abord déterminer leurs lieux de vie dans ce domaine. De manière générale, nous allons rechercher tout d'abord les différents habitats où nous pouvons rencontrer des mathématiques. Ceci va nous permettre, ensuite, de focaliser nos recherches dans des institutions particulières de ce champ et ainsi nous conduire à repérer *le potentiel mathématique* des ressources existantes dans les institutions françaises. Pour mener ce travail, nous nous appuyons sur des travaux existants et en particulier ceux de Godot (2005) et de Pelay (2011), dont une partie est centrée sur la diffusion des sciences et plus spécialement des mathématiques dans la société française. Nous utiliserons ensuite l'échelle des niveaux de co-détermination didactique (Chevallard, 2010) afin de structurer notre analyse écologique au niveau de certaines institutions de culture scientifique. Enfin, le modèle du problème transposé sera mis en œuvre pour identifier la potentialité mathématique des ressources existantes.

1 Les acteurs de la culture scientifique

En France, la culture scientifique dans son acception générale fait partie d'un domaine de connaissances très vaste qui regroupe une multitude d'acteurs et de moyens de diffusion (figure VI.1, p. 80). Depuis le début du XXI^e^ siècle, les politiques en ont fait l'une des priorités nationales en ayant comme ligne directive de favoriser et de renforcer sa diffusion grâce aux acteurs de terrain déjà impliqués dans ce domaine (Blandin et Renar, 2003 ; Hamelin, 2003).

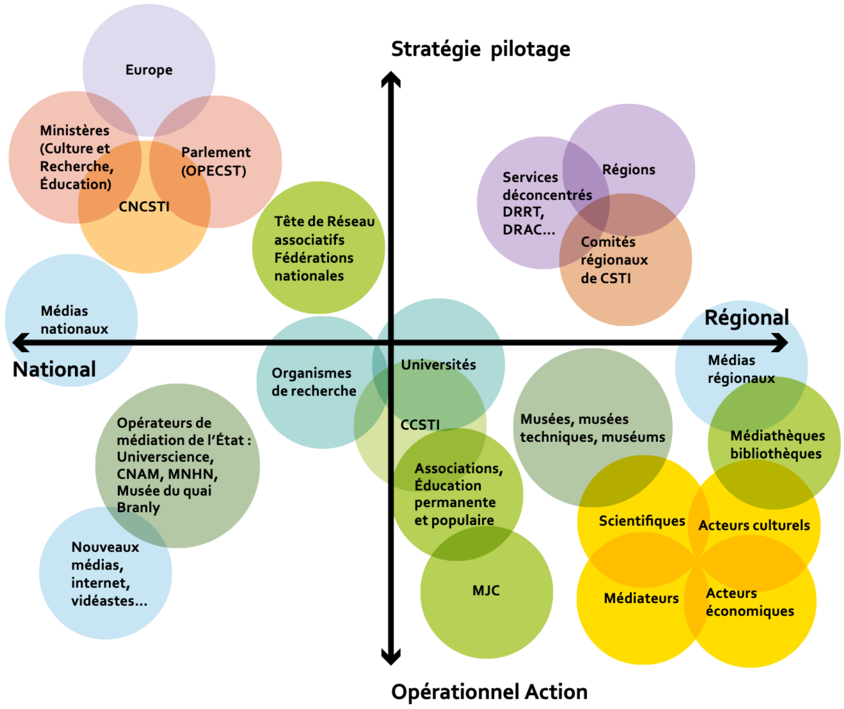


***Figure VI.1** – Cartographie des acteurs du paysage de la CST de l'Office de Coopération et d'Information Muséales (OCIM) (ibid., p. 37).*

Par ailleurs, le travail de thèse de Godot (2005) montre également la diversité des acteurs et des institutions impliqués et réalise, entre autres, un état des lieux centré sur la diffusion des mathématiques au début du XXI[e] siècle. Cet état des lieux a été ensuite complété par Pelay (2011) dans son travail de thèse. De manière générale, et c'est d'ailleurs ce qui a été souligné dans la thèse de Godot (2005), il existe deux classes d'acteurs dans la diffusion scientifique. La première recensée par l'auteure est celle des *acteurs indirects* en référence aux médias de masse : émissions de télévision, de radiophonie, canaux de diffusion numérique (Internet), presse et éditions à destination du grand public par exemple. La deuxième concerne plus particulièrement les lieux « physique » de cette diffusion scientifique, c'est-à-dire les lieux qui possèdent des structures ouvertes aux publics (scolaire, familial) comme les musées, les centres de culture scientifique, technique et industrielle (CCSTI) qui accueillent par exemple des expositions et des ateliers temporaires ou permanents, ainsi que des initiatives de diffusion pilotées par les acteurs de la recherche, de l'enseignement ou de l'animation socioculturelle. Godot (*ibid.*) les appelle les *acteurs directs* de la diffusion scientifique puisqu'ils mettent en œuvre des moyens pour favoriser les rencontres physiques entre science et société.

Figure VI.2 – Schéma montrant les différentes formes d'actions menées sur le territoire national (ibid., p. 38).

Dans notre travail, nous allons nous centrer spécifiquement au niveau des acteurs directs de la diffusion des mathématiques puisque notre recherche porte sur les actions de diffusion proposées par ces derniers. Par ailleurs, le lecteur ou la lectrice trouvera, en complément de ce travail, un état des lieux actualisé sur la diffusion des mathématiques au niveau des acteurs indirects (voir annexe A, p. 317).

Dans le prochain paragraphe nous dressons ainsi une cartographie — non exhaustive et succincte — des acteurs directs de la diffusion des mathématiques. L'idée est de donner un panorama assez général de ce qui existe actuellement au regard des travaux antérieurs auxquels nous invitons les lecteurs et lectrices à se référer au besoin (Godot, 2005 ; Pelay, 2011 ; Poisard, 2005).

2 État des lieux rétrospectif et réactualisé autour des acteurs directs de la diffusion mathématique

À l'instar des médias de masse et de la presse spécialisée auprès du grand public, les *acteurs directs* de la diffusion des mathématiques sont très diversifiés (Godot, 2005 ; Pelay, 2011). La plupart des actions de diffusion sont initiées par les acteurs de la recherche, de l'enseignement et de la médiation des sciences et peuvent être attenantes à différents organismes de recherche, d'enseignement ou de culture scientifique (association, CCSTI, etc.). Dans les prochaines lignes, on essaiera donc de donner une vision globale de ce qui se fait actuellement en identifiant les « principaux » acteurs ayant un rayonnement national, voire international, ainsi que les moyens d'actions existants. Ceci dans le but d'appréhender au mieux cette diversité.

2.1 Diffusion des mathématiques grâce aux acteurs de la recherche et de l'enseignement

En général, en France, on retrouve différents organismes ou structures œuvrant pour la diffusion des mathématiques en lien étroit avec le monde de la recherche et de l'éducation. La Structure Fédérative de Recherche *Maths à Modeler* en est un exemple. En effet, elle est composée d'une équipe pluridisciplinaire de chercheurs en mathématiques et en didactique des mathématiques. Cette structure, qui rappelons-le possède plusieurs antennes nationales et internationales, a pour objectif de démocratiser et de disséminer les mathématiques au plus grand nombre. En particulier, elle vise à diffuser et à appréhender les pratiques des mathématiciens (expérimenter, questionner, raisonner, communiquer, conjecturer et prouver), grâce à la conception de situations de recherche construites à partir de problèmes contemporains dans le champ discret. Les actions de cette structure sont nombreuses et touchent des publics variés que ce soit dans le cadre scolaire et universitaire, mais aussi lors de manifestations grand public, et cela, à travers des actions plutôt locales : ateliers *Maths à Modeler*, des ateliers *Maths.en.Jeans*, l'UE transversale ouverte à toutes les licences (L1 et L2) sur les jeux combinatoires et le raisonnement mathématique, voire des actions de plus grande ampleur comme la Fête de la Science, le Salon Culture et Jeux Mathématiques, etc.

On retrouve également le réseau des IREM qui est constitué d'une trentaine d'instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques en France et à l'étranger. Ce sont des lieux qui sont à la fois voués à la recherche, à la formation des enseignants mais aussi à la diffusion de la culture mathématique. Chacun de ces lieux est constitué de plusieurs groupes de recherche-action aux thématiques variées, constitués à la fois de chercheurs — mathématiciens, didacticiens — d'enseignants de mathématiques de tout niveau — du secondaire à l'université — mais aussi de professeurs des écoles s'intéressant à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques et à la diffusion des mathématiques pour tous. Actuellement à l'IREM de Grenoble deux groupes de travail se sont constitués autour de la diffusion des mathématiques. L'un, en lien étroit avec le projet de la *Grange des Maths*, qui vise à concevoir des activités d'animation lors d'expositions mathématiques pour le public scolaire (*Grange Vadrouille*), mais aussi non scolaire en participant à des manifestations grand public lors d'événements nationaux en lien avec la Semaine des mathématiques ou la Fête de la Science entre autres. L'autre a permis de fédérer un « club de mathématiques » animé par les membres du groupe. Ce club se réunit deux dimanches par mois au laboratoire de mathématiques de Grenoble (Institut Fourier) et accueille des jeunes (du primaire au lycée) pour leur faire découvrir les pratiques de l'activité mathématique par le jeu dans « une ambiance ludique et détendue ». Ces deux groupes travaillent en étroite relation avec la SFR Maths à Modeler et le groupe de recherche-action sur le raisonnement, la logique et les situations de recherche pour la classe.

L'association *Maths.en.Jeans* [1] participe, elle aussi, à la diffusion des mathématiques. En effet, cette association qui est née à la fin des années 80, à l'initiative de Pierre Duchet, de Pierre Audin et de René Veillet, vise à développer des actions conjointes entre les établissements scolaires et les mathématiciens. L'objectif premier est de mettre les élèves en situation de recherche et ainsi lutter contre l'image des mathématiques véhiculée dans notre société comme étant une discipline purement scolaire et élitiste. De nombreux temps d'échanges scientifiques, entre classes et chercheurs, sont organisés à travers des séminaires où les élèves présentent leurs travaux, mais aussi lors du congrès annuel qui rassemble toutes les classes ayant participé au projet.

On retrouve également de nouveaux espaces de médiations dédiés à la diffusion des mathématiques en lien très étroit avec le monde académique. Par exemple, la *Maison des Mathématiques et de l'Informatique* [2] (MMI) à Lyon qui est un centre de médiation des savoirs dédié spécifiquement aux sciences mathématiques et informatiques. Cet organisme a été créé en 2012 à l'initiative du Laboratoire d'excellence en Mathématiques et Informatique fondamentale de Lyon et est actuellement piloté par « des enseignants-chercheurs passionnés ». Cette maison propose diverses activités — expositions, ateliers, contes, jeux, conférences, etc. — « pour une expérience nouvelle des mathématiques et de l'informatique » mais aussi pour « permettre à tous et toutes de découvrir et

1. https://www.mathenjeans.fr/
2. https://mmi-lyon.fr/

comprendre le monde qui nous entoure ». Prochainement une autre maison des mathématiques devrait être inaugurée à Paris : la *Maison Poincaré* » [3]. Celle-ci devrait proposer un espace d'expositions et d'échanges ouvert au grand public et entièrement dédié aux mathématiques et à leurs interactions avec notre quotidien. L'un des atouts majeurs de la *Maison Poincaré* sera sa proximité entre les acteurs de la recherche et le public. En effet, outre le fait d'accueillir du public dans ces espaces de médiation, la *Maison Poincaré* accueillera également un laboratoire de mathématiques, qui de surcroit, favorisera davantage les moments d'échange entre le public et le monde académique.

On retrouve également au sein même des laboratoires de mathématiques des initiatives sporadiques menées par quelques chercheurs disciplinaires. Par exemple, dans le laboratoire de mathématiques de Grenoble (Institut Fourier), certains chercheurs proposent des exposées auprès du grand public et en particulier du public scolaire autour de thématiques variées. Ceci dans le but de faire découvrir les mathématiques sous toutes leurs formes et de manière accessible. Ce même laboratoire participe également à l'organisation de conférences grand public comme *MathEnVille* où des chercheurs de renommée internationale sont invités. Un autre exemple, celui de l'Institut Henry Poincaré (IHP) à Paris, propose, un samedi par mois, un séminaire — *Mathematik Park* [4] — à destination d'enseignants, d'étudiants voire de bons élèves de terminale. L'objectif, comme le rappelle leur site, est de « présenter des mini-cours sur des sujets variés en mathématiques ».

En outre, on constate depuis le rapport Villani-Torossian que des initiatives ont été mises en place au sein des académies afin de recenser et encourager les actions de diffusion dans le cadre scolaire (Villani, Torossian et Thierry Dias, 2018). On retrouve en effet au sein de nombreux établissements, des clubs mais aussi des laboratoires de mathématiques qui sont, par exemple, répertoriés sur le site *éduscol* [5]. Ces clubs sont en général pilotés par des enseignants de mathématiques et sont ouverts aux élèves en dehors du temps de classe. Plus récemment, des laboratoires ont vu leur apparition dans les lycées afin d'encourager les échanges entre enseignants de mathématiques et chercheurs, tout en contribuant au développement professionnel des enseignants. Outre ces dispositifs, d'autres événements animent l'année scolaire des élèves, par exemple, la participation pour certains à des concours académiques ou nationaux (rallye des sciences, rallye proposé par des IREM, olympiades, concours général des lycées, etc.), mais aussi à des stages comme ceux proposés par *Maths C2+* destinés à des élèves volontaires et motivés.

3. https://maison-des-maths.paris/
4. http://www.ihp.fr/seminaire/mathematic-park
5. https://eduscol.education.fr/1469/laboratoires-de-mathematiques

A travers ces quelques lignes, on a essayé de donner une vision assez générale des acteurs de la recherche et de l'enseignement impliqués dans la diffusion des mathématiques, ainsi que les différents moyens d'actions déployés. Dans le prochain paragraphe, on va s'intéresser aux associations et centres de culture scientifique français.

2.2 Les associations et centres de culture scientifique dans la diffusion des mathématiques

Dans sa thèse, Pelay (2011, p. 30) a recensé une quinzaine d'associations en lien avec les mathématiques. Certaines relèvent davantage du monde de la recherche et de l'enseignement, qui, de fait sont plus centrées autour de leur communauté d'intérêt [6]. D'autres, quant à elles, sont plus proches du grand public mais les actions autour des mathématiques y sont, semble-il, moins nombreuses et se situent à un niveau plus ou moins local ce qui réduit leur visibilité (voir p. ex., Godot, 2005 ; Pelay, 2011).

> Ces associations [CIRASTI] mettent en avant l'activité de l'enfant et sont toutes actives dans la diffusion de la culture scientifique, que ce soit en physique, chimie, mécanique, astronomie, biologie... mais aucune d'elles ne proposent d'activités destinées à la diffusion de la culture mathématique (Godot, 2005, pp. 284-285).

> De façon générale, les mathématiques sont peu représentées dans l'ensemble du champ de l'animation scientifique intervenant dans le cadre de loisirs [...] (Pelay, 2011, p. 42).

En se centrant davantage sur ces dernières, on recense actuellement au moins trois organismes associatifs d'envergure régionale voire nationale : *Animath*, *Plaisir Maths* et *la Grange des Maths*.

Animath [7] est une association qui a été créée en 1998 pour favoriser « le goût et la pratique des mathématiques chez les jeunes ». Cet organisme propose différentes actions allant du simple plaisir de réfléchir à des problèmes mathématiques jusqu'aux compétitions internationales les plus sélectives. Ainsi, *Animath* fait partie des associations pilotes dans l'organisation de différents événements nationaux comme, par exemple, le concours *Alkindi* sur la cryptographie, la *Préparation Olympique Française de Mathématiques* (POFM) pour les olympiades internationales de mathématiques(IMO), le *Salon Culture et Jeux Mathématiques*

6. *Société Mathématiques de France (SMF), Société de Mathématiques Appliquées et industrielles (SMAI), l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM), La Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques (CFEM), l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP), Femmes & mathématiques, Sésamath*, etc.

7. https://animath.fr/

et aussi lors de rencontres entre mathématiciens et public scolaire, en référence notamment aux conférences « un texte, un mathématicien » organisées par la *Société Mathématique de France* et la *Bibliothèque nationale de France*.

Plaisir Maths [8], quant à elle, est lancée depuis 2011 et a pour objectif premier de diffuser les mathématiques grâce à des ressources ludiques qui utilisent le jeu comme source de plaisir et d'apprentissage. Les actions de cette association sont variées et touchent différentes communautés éducatives : scolaire, parascolaire, grand public, formation, etc.

la Grange des Maths [9] a été initiée en 2015, son objectif est de promouvoir et démocratiser la culture mathématique à tous en mettant en avant la manipulation d'objets inhérente à chacune des ressources mathématiques qu'elle propose. Elle s'inscrit donc parfaitement, au même titre que l'association Plaisir Maths, dans les volontés noosphériennes récentes, à savoir favoriser la manipulation et le jeu dans l'apprentissage des mathématiques (Villani, Torossian et Thierry Dias, 2018). Actuellement la *Grange des Maths* conçoit et diffuse des valises itinérantes — la *Grange Vadrouille* et la *Grande École* — à destination des écoles mais aussi des collèges de la région Auvergne-Rhône-Alpes voire du territoire national (prêt-achat) où sont proposés une multitude de casse-têtes mathématiques. Cette initiative a d'ailleurs été primée par la Société Mathématique de France en étant lauréat du prix Jacqueline Ferrand [10] en 2020. Prochainement, la *Grange des Maths* devrait accueillir un nouvel espace permanent dédié entièrement à la diffusion des mathématiques auprès du grand public (expositions, ateliers, etc.).

Dans le domaine de la culture scientifique, on retrouve évidemment de « grandes » institutions de type musée scientifique ou centre de culture scientifique ouvertes à un très large public. Ces structures ont des dénominations, des régimes et des gouvernances très diverses. Sans entrer dans ces spécificités, on remarque que très peu d'entre elles sont dédiées entièrement aux mathématiques. En effet, l'Association des musées et centres pour le développement de la culture scientifique, technique et industrielle (Amcsti) a recensé plus de deux-cents structures ouvertes au public (musées scientifiques, CCSTI, Association de la CST...) [11] mais on constate tout de même que très peu sont dédiées exclusivement ou en partie aux mathématiques. Seules quelques-unes proposent des expositions permanentes tandis que d'autres accueillent de temps à autre des expositions temporaires. Dans les « grands » centres de culture scientifique français qui proposent des espaces permanents sur les mathématiques, on retrouve le *Palais de la Découverte* (Paris), *la Cité des Sciences* (Paris) mais aussi *le Vaisseau* (Strasbourg) ou encore *la Maison Fermat* (Beaumont de Lomagne) par exemple.

8. https://www.plaisir-maths.fr/
9. https://www.la-grange-des-maths.fr/
10. Ce prix récompense une initiative pédagogique innovante au niveau des mathématiques.
11. https://www.amcsti.fr/fr/carte-des-membres/

D'autres centres de cultures scientifiques pluridisciplinaires accueillent ou ont accueilli des expositions temporaires [12], c'est le cas par exemple de *Cap Sciences* (Bordeaux) , de l'*Espace Mendès France* (Poitiers) ou du musée des *Arts et Métiers* (Paris). [13]

Mentionnons également que la plupart des *acteurs directs* de la diffusion des mathématiques participent activement aux grands événements nationaux annuels, comme la Fête de la Science ou encore le Salon Culture et Jeux Mathématiques. [14]

Premier bilan : existence et émergence des mathématiques dans les centres de culture scientifique

Dans cette partie, nous avons tenté de montrer la diversité des acteurs et des institutions impliqués dans la diffusion des mathématiques et les moyens d'action mis en œuvre.

On constate, même si nous n'avons pas réalisé une étude comparative entre les disciplines, qu'une place non négligeable est accordée aux mathématiques dans le domaine de la culture scientifique au niveau de ses *acteurs directs*. En effet, les mathématiques existent bel et bien et vivent grâce à différents acteurs et institutions liés à la recherche, à l'enseignement ou à la médiation. Néanmoins, ce panorama nous montre aussi que les actions engagées autour de la diffusion des mathématiques sont très souvent orientées et cloisonnées dans le contexte scolaire comme cela avait déjà été souligné dans le travail de Pelay (2011). L'école semble donc être le destinataire privilégié des offres proposées par les acteurs de la diffusion mathématique. Ce travail montre aussi que les propositions pour le grand public sont très limitées dans certains secteurs du domaine, en particulier dans les associations et les centres de culture scientifique. Cependant, ce chapitre montre quand même une volonté d'allouer davantage de visibilité aux mathématiques dans ces secteurs. En particulier, grâce à la mise en œuvre de projets ambitieux à destination du grand public comme la création de centres tels que la *Maison Poincaré* ou la *Grange des Maths* par exemple. De plus, contrairement à l'école, le public de ces institutions est un public, a priori, volontaire. Ce qui n'est pas négligeable lorsque l'on souhaite faire faire des mathématiques au public.

Pour ces raisons, il nous semble intéressant d'orienter notre recherche autour

12. Mathissim (Cap Sciences), Sous la surface, les maths (musée des Arts et Métiers), Maths & mesure (Espace Mendès France).
13. Voir aussi Godot (2005) et Poisard (2005) pour des détails sur ces centres.
14. Voir Pelay (2011, p. 32) pour plus de détails sur ces deux évènements.

de ces institutions spécifiques. Actuellement, l'hypothèse que nous formulons à partir de nos premiers travaux de master (Da Ronch, 2018b), *nous laissent présager que très peu de ressources de ces institutions offrent la possibilité d'entrer dans une réelle activité mathématique au sens où nous l'avons définie*. A cette occasion, nous allons « interroger » l'existant par une analyse écologique, en identifiant, à différents degrés de granularité (du global au local), les conditions et les contraintes de viabilité de la pratique mathématique dans ces institutions. Évidemment, les frontières entre ces différents niveaux ne sont pas hermétiques, elles proposent toutes des conditions qui peuvent s'avérer être aussi des contraintes à des degrés de granularité différentes. Nous tâcherons d'en donner les grandes lignes en essayant de cibler celles qui peuvent avoir un impact sur la pratique de l'activité mathématique dans ces institutions particulières [15]. Enfin, cette analyse sera illustrée par des exemples de ressources issues d'institutions de culture scientifique existantes afin d'analyser le potentiel mathématique de ces dernières.

3 Courants de communication scientifique dans notre civilisation et nouvelles institutions

3.1 Évolution de la communication scientifique

Chavot et Masseran (2010) ont tenté, malgré les difficultés, de retracer l'évolution de la culture scientifique en France et plus largement en Europe afin d'atténuer le biais d'interprétation français. Pour ces auteurs, les deux tendances actuelles au niveau de la communication scientifique à l'échelle de l'Europe relèvent de la Culture Scientifique et Technique (CST) et du *Public Understanding of Science* (PUS).

Pour Chavot et Masseran (*ibid.*), le souhait de communiquer les sciences et les techniques remonte au XVIIIe siècle pour légitimer l'approche scientifique auprès d'un public éclairé. C'est à partir de la fin du XIXe et du début du XXe siècle que commence l'histoire de la communication scientifique et technique avec plusieurs mouvements. Tout d'abord, l'éducation populaire fait son apparition. Ensuite, la popularisation se professionnalise et s'inscrit par la suite au niveau des tendances politiques (*ibid.*). Par exemple en France, le gouvernement incite les chercheurs à vulgariser leurs travaux et cela devient même une mission pour ces derniers mais aussi pour l'université « par le biais des lois de 1982 sur la recherche et de 1984 sur l'enseignement » (*ibid.*, p. 52).

Selon ces auteurs, c'est à partir des années soixante et soixante-dix que le

15. Des premiers éléments de synthèse ont été donnés dans un papier de Da Ronch (2021).

mouvement développant la CST prolifère en France par le biais de scientifiques militants comme le physicien Jean-Marc Levy-Leblond qui a œuvré pour « la mise en culture de la science »(*ibid.*). Ce développement est né, sans doute mais pas seulement, à cause des évolutions scientifiques et techniques qui ont marqué cette période. Période dans laquelle l'écart entre science et société n'a fait que croître et a fait naître une prise de conscience de la société, parfois à l'encontre des politiques comme, par exemple, le nucléaire.

3.2 Naissance d'un nouveau type d'institutions

La diffusion des sciences auprès du public a évidemment commencé par l'instruction à l'école mais s'est aussi étendue à un plus large public grâce à l'initiative d'amateurs de sciences et de vulgarisateurs comme Fontanel considéré comme l'un des « pères fondateurs » de la vulgarisation scientifique au siècle des lumières (Bensaude-Vincent, 2010).

Dès le XVIe siècle, on observe l'apparition de nouvelles structures de diffusion : les cabinets de curiosité (*gambitto*). L'objectif de ces derniers était de faire découvrir le monde et de soutenir certaines croyances de l'époque. Après la révolution française, ces structures se sont peu à peu estompées dans le paysage européen, laissant place à la genèse des musées scientifiques. *A contrario* des cabinets de curiosité, ces nouvelles structures ont abandonné l'effet de spectacle pour laisser place à une certaine forme de thésaurisation (Eidelman et Schiele, 1992). Dans les musées scientifiques de l'époque, la science est présentée comme un dogme, où seuls les résultats y sont donnés au détriment de leur processus de construction. La *science-en-train-de-se-faire*, pour reprendre la terminologie de Eidelman et Schiele (*ibid.*), est complètement occultée. L'effet de monstration est omniprésente, renforçant les aspects de vérité et d'autorité.

Selon ces auteurs (*ibid.*), ce n'est qu'au début du XXe siècle, durant l'entre deux guerre, qu'un nouveau genre de structures muséales est apparu : *Le Palais de la Découverte* à Paris, à l'initiative de J. Perrin, sous l'inspiration de certaines institutions internationales. Ce dernier prend « le parti pris épistémologique qui conçoit l'expérience comme clef de voute du progrès de la connaissance, il signe définitivement la fin du musée de monstration » (*ibid.*, p. 191). C'est ainsi que les musées de démonstration sont nés d'une volonté de rendre le public acteur de sa visite. Ce paradigme est une condition fondamentale si nous voulons que le public fasse des mathématiques, puisque le caractère monstratif ne suffit pas pour entrer dans la pratique mathématique.

4 Une stratégie unificatrice à l'échelle de notre société

4.1 La démarche scientifique au cœur des préoccupations

En France, une stratégie nationale concernant le domaine de la culture scientifique a été mise en place en 2017 et a fait l'objet d'un rapport (SNCSTI, 2017). Cette stratégie élaborée par des experts du domaine vise présentement à

> éclairer concitoyennes et concitoyens grâce aux acquis de la science et au partage de la démarche scientifique, à leur donner les moyens de développer et/ou renforcer leur curiosité, leur ouverture d'esprit, leur esprit critique, et à lutter contre le prêt-à-penser.

A cette occasion, le rapport met en avant cinq axes stratégiques majeurs dont l'un est précisément le développement de la démarche scientifique qu'il qualifie de :

> démarche ou méthode scientifique [qui] renvoie à un processus de réflexion universel basé sur l'observation, la problématisation, l'énoncé d'hypothèses, l'expérimentation, la révision des hypothèses en fonction des résultats obtenus, et leur discussion (*ibid.*, p. 74).

Cet axe est important puisqu'il a pour volonté de favoriser la démarche scientifique auprès du public et donc *a priori* la pratique mathématique. En revanche, cela pose la question quant à l'adéquation dans les moyens de mise œuvre entre la démarche scientifique et la pratique mathématique... Ce point ne sera pas traité dans cette thèse mais il est intéressant de le mentionner.

4.2 Une condition mais aussi des contraintes à différents niveaux

La condition pour pratiquer la démarche scientifique, et en particulier l'activité mathématique, est qu'il est nécessaire d'avoir des institutions qui permettent de rendre le public acteur et responsable. Cette condition semble être relevée puisque, comme nous l'avons mentionné ci-avant, les institutions à caractère démonstratif existent.

En revanche, la pratique d'une démarche scientifique peut devenir une contrainte à un niveau inférieur notamment lorsqu'il s'agit de penser, de concevoir et de proposer au public des espaces de médiation permettant une telle démarche. Par exemple, quelle forme de médiation proposer pour entrer dans une démarche scientifique et en particulier au niveau de l'activité mathématique ?

5 Formes de médiation dans les institutions de culture scientifique

Selon Contenot (2011), il existe dans les institutions de culture scientifique et technique deux formes de médiations : la médiation directe et la médiation indirecte.

5.1 Médiation directe

La médiation directe propose au public des contenus avec un médiateur physiquement présent. Ce dernier peut prendre, selon Belaën et Blet (2007), différentes postures de type frontal, médian et en retrait (figure VI.3).

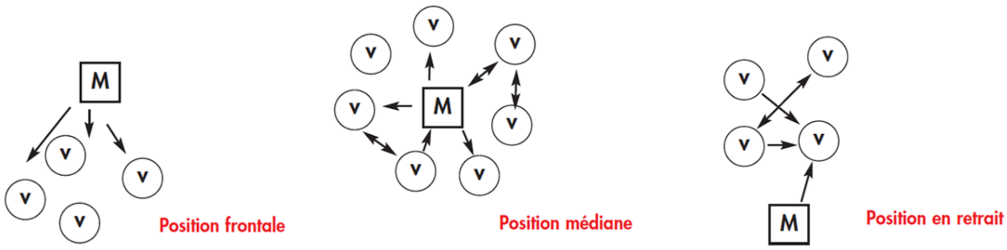


FIGURE VI.3 – *Différentes postures du médiateur (ibid., p. 36).*

La position frontale du médiateur M avec les visiteurs v est une posture monumentaliste dirigée unilatéralement vers les visiteurs comme pourrait le faire un médiateur lors d'un exposé ou d'une conférence.

La position médiane du médiateur M avec les visiteurs v est une posture favorisant les interactions sociales entre eux. Cette posture d'échanges est utilisée surtout dans des ateliers participatifs.

La position en retrait du médiateur M avec les visiteurs v est une posture favorisant l'activité des visiteurs et leurs interactions sociales. Le médiateur est alors en retrait de la situation mais peut toutefois réguler au besoin. Cette posture de retrait est aussi utilisée dans des ateliers participatifs.

5.2 Médiation indirecte

Selon Contenot (2011) la médiation indirecte consiste :

> à mettre à disposition différents supports que les publics utiliseront à leur guise et à leur rythme, en toute autonomie, *in situ* ou à distance. Ces supports doivent anticiper au mieux les attentes des visiteurs, tant en terme de contenu que dans leur démarche, afin d'informer et d'accompagner les

usagers de manière pertinente dans leurs cheminements individuels ou collectifs Contenot (2011, p. 14).

Les ressources proposées pour cette forme de médiation sont le plus souvent des documents d'accompagnement, des expositions avec des panneaux ou, plus récemment, des supports numériques (*ibid.*).

5.3 Prise de position soutenue pour des raisons épistémologiques et didactiques

Pour notre recherche nous allons nous centrer sur les espaces de médiation indirecte pour des raisons épistémologiques et didactiques.

En effet, la première raison, de nature épistémologique, est que pour faire des mathématiques et donc se saisir de la responsabilité scientifique par rapport à la recherche de solutions d'un problème, il est nécessaire que l'institution alloue un temps suffisant. Or, dans les espaces de médiation directe le temps est souvent limité, notamment dans les ateliers participatifs. De plus, les groupes sont invités à changer d'activité régulièrement afin que chaque individu puisse faire le tour des ressources proposées. Par exemple, lors d'un entretien réalisé avec un médiateur scientifique de *Cap Sciences* (Bordeaux) au sujet de l'exposition *Mathissime*, il ressort que le temps d'activité du public est de l'ordre de « cinq à huit minutes » par module...

Ce type de médiation induit, selon nous, une certaine forme de « consommation » des ressources destinées au public au détriment de la démarche scientifique et en particulier de l'activité mathématique qui demande du temps.

Par ailleurs, notre choix concernant les espaces de médiation indirecte se justifie aussi par le fait que le public, bien que déjà volontaire dans ces institutions, choisit lui-même sa ressource ce qui nous laisse penser qu'il lui accordera, *de facto*, un temps de réflexion suffisant.

La deuxième raison, de nature didactique cette fois, relève de phénomènes contingents notamment lors des échanges entre médiateur et public. Dans les espaces de médiation directe, il se peut que des effets didactiques (effet Topaze, effet Jourdain...) se produisent et rendent caduque l'activité mathématique.

En revanche, les espaces de médiation indirecte possèdent aussi des contraintes, peut-être plus importantes qu'en médiation directe, notamment au niveau du contenu de la ressource et de ses objets tangibles associés. En effet, la principale difficulté lorsque l'on souhaite proposer au public d'entrer dans une pratique mathématique est que la ressource doit être facilement compréhensible et abordable pour le public. Elle doit également susciter l'attractivité grâce au matériel proposé, puisqu'aucun médiateur n'est physiquement présent pour inciter et guider le public.

Nous avons conscience que notre choix, porté sur la médiation indirecte, est par ailleurs discutable, mais nos prises de positions épistémologiques et didactiques le justifient.

5.4 Conditions macro-didactiques favorables à une pratique mathématique

Ainsi, les institutions de culture scientifique et en particulier les musées ou centres de culture scientifique possèdent des conditions favorables à l'activité mathématique. En effet, ces institutions ont des espaces de médiation où la responsabilité scientifique peut être laissée à la charge du public (médiation indirecte), le temps alloué dans ces espaces est en plus suffisant pour entrer dans la pratique mathématique (de l'ouverture à la fermeture du centre) et de plus, le public est un public *a priori* volontaire donc enclin à participer.

Cependant ces conditions d'ordre macro-didactique ne sont pas, pour autant, suffisantes puisque la pratique de l'activité mathématique est aussi conditionnée par les ressources proposées. Ceci fait l'objet de la prochaine section.

6 Exemples de ressources mathématiques proposées dans les institutions de culture scientifique

6.1 Institutions visitées

Afin de mettre à l'épreuve notre hypothèse, nous avons visité quelques institutions majeures proposant *a priori* des contenus mathématiques : *Le Palais de la Découverte* à Paris, *la Maison de Fermat* à Beaumont-De-Lomagne ainsi que *Cap Sciences* à Bordeaux [16]. Ces visites se sont déroulées en mai 2019 à Paris et en août 2020 à Beaumont-De-Lomagne et Bordeaux.

Chacune de ces institutions proposent les deux formes de médiation. Pour notre recherche, nous avons analysé les ressources dans les espaces de médiation indirecte tout en observant ce qui se faisait en médiation directe. Notons que la frontière entre ces deux types de médiation n'est pas hermétique comme on pourrait le croire d'un point de vue théorique. En effet, bien souvent dans les espaces accueillant des expositions temporaires ou permanentes, il se peut que les deux formes de médiation coexistent à des temps différents.

16. Nous aurions dû nous rendre également au Vaisseau à Strasbourg mais malheureusement la crise sanitaire liée à la Covid19 n'a pas permis cette visite.

6.2 Quelques exemples

La plupart des ressources proposées dans les espaces de médiation indirecte sont présentées sous la forme de panneaux expliquant une notion mathématique et d'activités de découverte de ces concepts sous forme d'artefacts tangibles ou numériques. Par ailleurs, on constate au niveau de ces activités, qu'elles sont pour la plupart du temps très guidées afin de faire comprendre, au public, les notions mathématiques visées. Nous présentons ci-après quelques exemples issus des institutions que nous avons visitées.

Exemple VI.1

Le Palais de la Découverte présentait un espace de découverte sur le concept de symétries et de pavages. Par exemple, le public était invité à manipuler des objets dans le but de déterminer des axes de symétrie à l'aide de miroirs. Nous présentons à la suite l'énoncé ainsi que la figure VI.4 représentative de la situation.

« Glissez la pièce choisie sous le miroir. Y a-t-il une (ou plusieurs) position permettant, à l'aide du reflet, de reconstituer la pièce entière à partir d'une moitié ? Si oui, la limite entre le reflet et la partie visible de l'objet est un axe de symétrie. »

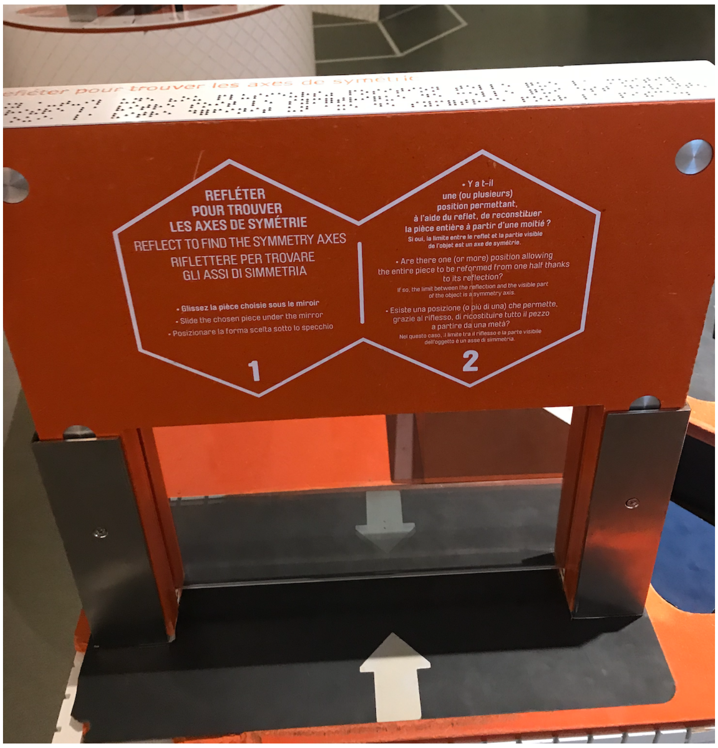


FIGURE VI.4 – Exemple d'activité proposée au Palais de la Découverte sur la symétrie.

Cet exemple guidé se voulait faire comprendre au public la notion d'axe de symétrie.

Exemple VI.2

La Maison de Fermat, quant à elle, proposait lors de notre visite deux expositions, l'une sur le hasard en mathématiques et l'autre était censée faire voyager le public dans l'univers de mathématiciens de différentes époques[a]. On y retrouvait des panneaux associés à du matériel manipulable. L'exposition sur le hasard mettait à disposition du public certaines questions afin d'éveiller sa curiosité, mais des éléments d'explications voire de réponses étaient mentionnés explicitement à côté des questions (voir « Explications », figure VI.5), ce qui, selon nous, rend caduque toute démarche réflexive.

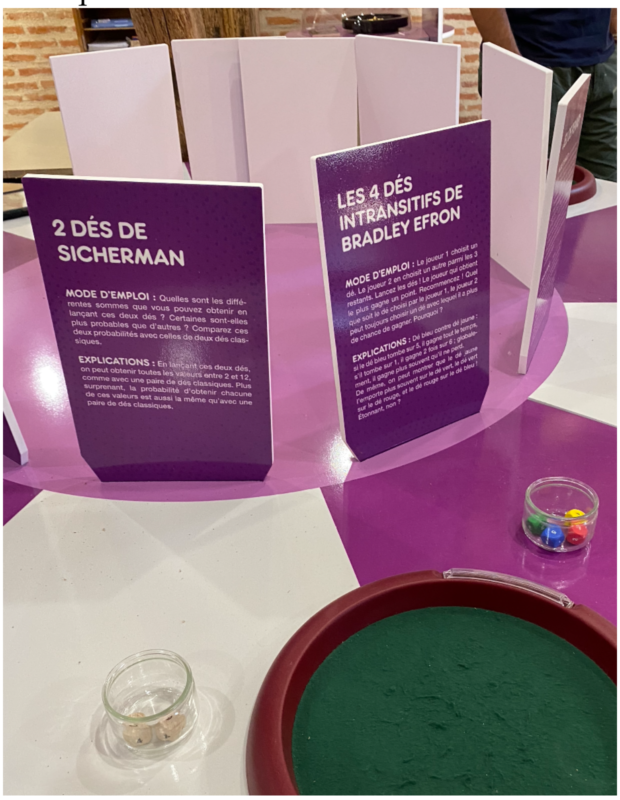


FIGURE VI.5 – *Exemple d'activité proposée la Maison de Fermat sur le hasard.*

a. L'exposition se nomme *Voyage en Mathématique*.

Dans ces espaces on retrouve également des artefacts numériques qui illustrent des notions mathématiques. Des questions sont posées sur des objets mathématiques mais il suffit de les toucher pour avoir une réponse instantanée...

Exemple VI.3

Au *Palais de la Découverte*, on demandait, par exemple, au public de déterminer les axes de symétrie sur certains objets géométriques (carré ou triangle équilatéral par exemple) en incitant à appuyer sur une des formes. Il s'ensuivait des explications concernant la réponse à cette question.

Figure VI.6 – *Exemple d'activité numérique proposée au Palais de la Découverte sur la symétrie.*

On voit à travers ces exemples que les espaces de médiation indirecte proposent la plupart du temps de simples activités illustrant un concept mathématique précis pour lequel des éléments de solutions sont mentionnés, avant même de laisser un temps de réflexion au public. Ces exemples, bien que non exhaustifs, résument parfaitement les ressources mises à disposition dans les espaces de médiation indirecte.

De plus, cela montre également que ces acteurs de diffusion ne se saisissent pas de ces espaces pour proposer au public des ressources qui permettraient d'entrer dans une pratique mathématique. En effet, la plupart de ces activités ne mentionnent pas de problème mathématique au sens où nous l'attendons. Les questions, telles qu'elles sont formulées, sont très souvent liées à une notion mathématique précise et ne relèvent donc pas d'un problème. Ainsi, on relève un conflit d'ordre épistémologique entre la pratique mathématique nécessitant de résoudre des problèmes et les ressources proposées qui ne sont pas en adéquation avec celle-ci.

Il existe en revanche, dans ces espaces de médiation, certaines situations qui sont jugées épistémologiquement pertinentes puisqu'un problème mathématique est explicitement formulé (question, instances) et est sémantiquement intéressant puisqu'il renvoie à d'autres problèmes de recherche connexe. En revanche lors de notre brève analyse, on constate des conflits d'ordre didactique relevant, soit d'éléments de réponse mentionnés à côté de la question (exemple VI.4), soit de règles de jeux confuses, ou encore, d'un contenu notionnel, semble-t-il, hors de portée d'un large public. Ces conflits peuvent donc, *a priori*, impacter l'activité mathématique du public. Nous illustrons nos propos par deux exemples.

Exemple VI.4

Dans l'exemple ci-contre, tiré de l'exposition *Voyage en Mathématique* de la Maison de Fermat, le problème historique des sept ponts de Kœnigsberg est présenté sur un panneau. La formulation du problème est respectée, elle est sous la forme d'une question et d'instances. D'un point de vue sémantique, ce problème a également du sens, puisqu'il fait écho, de manière générale, à des problèmes d'existence et de recherche de chemins et de cycles dans un graphe. L'étape épistémologique de notre modèle est donc validée. En revanche au niveau de l'étape de la transposition didactique, on observe des écueils. En effet, des éléments de réponse sont mentionnés, là encore, à la suite de la question posée, excluant *a priori* toute responsabilité scientifique par rapport au problème proposé et rendant, ainsi, potentiellement caduque la pratique de l'activité mathématique.

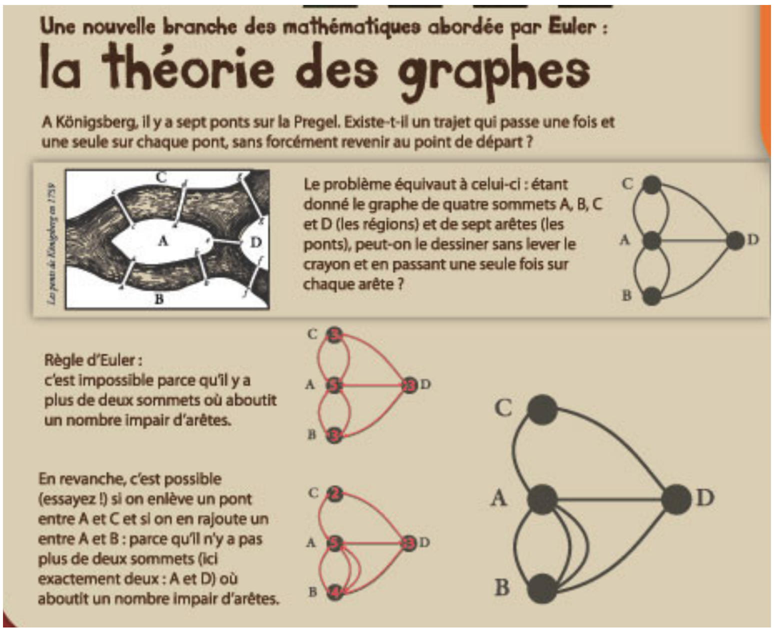


Figure VI.7 – Extrait du panneau d'Euler de l'expostion « Voyage en Mathématique » de la Maison de Fermat.

Exemple VI.5

Un autre exemple significatif qui illustre là aussi un écueil au niveau de la transposition didactique est un exemple tiré du *Palais de la Découverte* (figure VI.8). Dans un premier temps, on demande au public de « tenter » de réaliser un pavage du plan avec un seul type de polygones suivi de la question :« est-ce toujours possible ? » Dans un deuxième temps, on lui demande de choisir au moins deux types de polygones différents et d'essayer de paver en respectant « la règle des sommets ». C'est-à-dire que « les sommets des polygones se rencontrent partout de la même façon ». Ce deuxième point est encore suivi de la même question : « est-ce toujours possible ? »

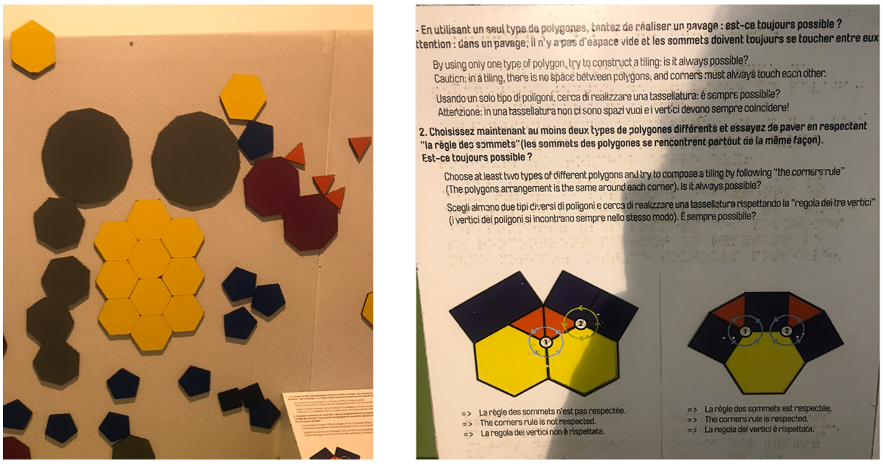


FIGURE VI.8 – Problème de pavages du plan avec un seul type de polygones proposé au Palais de la Découverte.

Cette situations propose deux problèmes ayant du sens d'un point épistémologique puisqu'ils sont inhérents à des problématiques de pavage du plan par des pavés d'une collection donnée. En revanche, d'un point de vue didactique le public, n'a, a priori, pas les moyens de valider l'impossibilité de paver le plan avec certains types de polygones. En effet, il faut, *a priori*, déterminer le fait que pour qu'un pavage du plan, par des polygones réguliers, soit valide, il est nécessaire que la somme des angles internes des polygones qui se rencontrent au niveau d'un sommet commun soit égale à trois-cents-soixante degrés. Or sans étayage, nous faisons l'hypothèse que l'impossibilité ne puisse être expliquée par le public que par le fait qu'il existe des trous entre les polygones réguliers qui serviront d'unique justification. De plus, l'existence d'un pavage du plan, pour un seul type de polygones réguliers, est trivial avec des carrés, des triangles équilatéraux et des hexagones. La construction de ces pavages ne nécessite pas de stratégie particulière au-delà de l'agencement côté-à-côté des pavés. Enfin, il semble que la règle du jeu, concernant la situation avec au moins deux types de polygones différents, soit assez confuse pour un public non averti.

On observe ainsi que les espaces de médiation indirecte, bien que possédant des conditions favorables à la pratique de l'activité mathématique, public volontaire, temps alloué suffisant, autonomie et responsabilité du public, ne semblent pas proposer des contenus adéquats à une telle pratique.

Il semblerait que cette pratique soit davantage orientée dans les espaces de médiation directe de type ateliers participatifs. Pourtant les conditions, citées précédemment, ne sont pas toujours respectées dans leur intégralité ce qui indépendamment du contenu proposé peut rendre obsolète la pratique mathématique. De plus, on remarque à la suite de nos visites que la plupart des ressources proposées sont plutôt relatives à des casse-têtes au sens de notre définition (Da Ronch, 2019a). Le cube de Conway ou les tours de Hanoï tels qu'ils sont présentés dans les ateliers récréatifs du *Palais de la Découverte* en sont des exemples. En effet, le public arrive parfois, après plusieurs tentatives d'essais-erreurs, à une solution sans comprendre le sens mathématique qu'il y a derrière... Ces ressources peuvent être toutefois intéressantes d'un point de vue épistémologique mais c'est bien souvent au niveau des choix didactiques ou ergonomiques qu'il y a des conflits. L'exemple VI.6 montre, au niveau de la transposition didactique, que les valeurs fixées des variables de la question, qui ferment le problème, influencent les stratégies d'essais-erreurs et impactent de fait la mise en œuvre d'autres stratégies de résolution.

Exemple VI.6

Cette situation était présentée dans l'espace des « récréations mathématiques » du *Palais de la découverte*. On y retrouvait des triangles colorés manipulables (bleu, jaune, vert et rouge).

La premier défi consiste à construire, à l'aide de ces triangles colorés, un pavage de carré 4×4 avec certaines contraintes : le pavage carré doit avoir des bords monochromes et distincts, chaque carré du pavage doit être constitué des quatre triangles de couleurs différentes, et entre deux cases voisines, les triangles qui se font face doivent être de la même couleur.

Le deuxième défi propose, sous les mêmes contraintes, de construire un rectangle 3×4 (figure VI.9 à gauche).

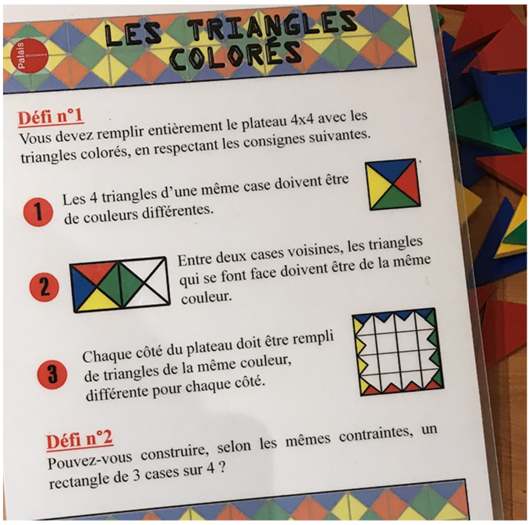


Figure VI.9 – *Exemple de défis proposés dans l'espace « ateliers recréatifs » du Palais de la Découverte et une solution d'existence d'un pavage valide dans le cas d'un carré* 4×4.

A cette occasion, on remarque qu'il s'agit d'étudier deux cas particuliers. Le premier cas est assez évident, puisque le simple jeu essais-erreurs permet d'exhiber un pavage 4×4 valide (figure VI.9 à droite). Le deuxième, quant à lui, s'avère être plus difficile car les tentatives d'essais-erreurs ne permettent pas d'aboutir à une solution d'existence. Ceci laisse présager que le pavage est impossible... Les stratégies qui permettraient de démontrer cette impossibilité seraient, par exemple, la stratégie de forçage couplée à l'étude de sous-cas ou alors la stratégie de dénombrement. Pour cette dernière, cela consisterait à dénombrer de deux manières différentes, pour une couleur donnée, le nombre nécessaire de triangles pour construire le pavage afin d'aboutir à une contradiction...

Toutefois, nous constatons que ces exemples ne semblent pas, de prime abord, permettre de développer des stratégies autres que l'essai-erreur. En effet, les stratégies évoquées, par exemple dans le deuxième défi, ne sont *a priori* pas très accessibles au public voire assez complexes dans leur mise en œuvre (étude de nombreux sous-cas dans la stratégie utilisant le forçage par exemple).

Par contre, si nous laissons le public s'approprier la taille du rectangle, cela permettrait d'étudier différentes tailles amenant, par exemple, à des stratégies de périodicité (pour l'existence) et de forçage (pour l'impossibilité, exemple du 2×3, 2×5, 2×7...). Ainsi, cela pourrait favoriser l'émission de conjectures globales et, peut-être, la mise en œuvre de preuves notamment pour les CS d'existence de pavage à l'aide d'exemples génériques (Balacheff, 1987).

De plus, au niveau didactique le fait de proposer des triangles favorise l'émergence d'erreurs locales dans la structuration des pavés carrés (deux triangles de la même couleur peuvent être posés involontairement dans un carré par exemple) et peut contribuer, au niveau ergonomique, à des phénomènes de détournement du matériel de son usage premier...

Second bilan : un manque constaté au niveau des ressources et des perspectives envisageables

Dans cette partie, nous avons montré que les institutions accueillant du public ont évolué au cours de notre civilisation. Entre le XVIe et le XXe siècle, les infrastructures de type monstratif où la Science est présentée comme un dogme ont évolué sur des infrastructures de type démonstratif où la Science « en train de se faire » est proposée au public (Eidelman et Schiele, 1992). Celui-ci devient donc acteur de la visite et *a priori* volontaire. Récemment au niveau de la société, la Stratégie Nationale de Culture Scientifique Technique et Industrielle (SNCSTI) a montré, dans son rapport (SNCSTI, 2017), que l'un des axes prioritaires est alloué à la démarche scientifique, donc *a priori* aussi à l'activité mathématique. Ensuite, pour faire des mathématiques, il est évident que les institutions de culture scientifique doivent proposer un contenu mathématique. Or, nous avons vu qu'il existe de telles institutions même si ces dernières semblent encore peu nombreuses dans le paysage de la culture scientifique française. De plus, le temps accordé par ces institutions est suffisant si l'on privilégie les espaces de médiation indirecte (Contenot, 2011). Enfin, ces espaces permettent une organisation adidactique donnant au public la possibilité de se saisir de la responsabilité scientifique par rapport à l'activité proposée.

En revanche, bien que ces conditions soient propices à la pratique mathématique, elles ne sont toutefois pas suffisantes puisqu'il a fallu également analyser le contenu des ressources proposées. D'ailleurs cette analyse, issue de différentes institutions (*Palais de la Découverte* et *la Maison de Fermat*), a montré qu'elles n'ont pas le potentiel mathématique à engager le public dans la pratique de l'activité mathématique. Effectivement, soit ces ressources ne proposent pas de problème, car elles ont juste pour ambition de présenter, et au mieux, de faire comprendre un concept mathématique au public. Soit elles tentent d'en proposer, mais on remarque des conflits d'ordre épistémologique ou relevant de choix didactiques (resp. ergonomiques) inappropriés.

Ce travail, bien que non exhaustif, a permis de montrer un manque entre la volonté de mettre en avant la démarche scientifique et l'adéquation du contenu des ressources proposées, de leurs modes de médiation inhérents au temps alloué dans une telle démarche. Ceci vient donc confirmer notre hypothèse sur le fait qu'aucune (ou peu) des ressources proposées dans ces espaces ne permet d'entrer dans la pratique mathématique. Ainsi, l'objet de la prochaine partie est de combler cette carence dans les espaces de médiation indirecte. Pour cela, nous concevrons une ingénierie didactique de la pratique de l'activité mathématique sans médiateur, à partir d'un problème de recherche contemporain, le problème de pavage de Wang (Wang, 1961). D'ailleurs, notre réflexion sur ce problème est née d'un casse-tête proposé au *Palais de la Découverte* qui ne permet pas *a priori*, tel qu'il est proposé, d'entrer vraiment dans la pratique de l'activité mathématique (voir exemple VI.6, p. 99).

La conception de cette ingénierie s'appuiera selon les axes de notre modèle du problème transposé. Cette ingénierie sera donc décrite et analysée au niveau épistémologique, au niveau de la transposition didactique et en lien avec des concepts d'ergonomie.

Analyse épistémologique, mathématique et didactique du problème de Wang

Chapitre VII

Analyse épistémologique et historique du problème de Wang

Ce présent chapitre a pour objectif d'une part, de présenter le problème de pavage de Wang et d'autre part, de donner des éléments épistémologiques et historiques de sa genèse dans les années soixante jusqu'à nos jours. Ceci dans le but *in fine* d'identifier ses potentialités quant à l'élaboration de nouvelles situations de recherche. Nous montrons que ce problème de décision a d'abord concerné des questions de décidabilité au sens de la théorie de la calculabilité, puis s'est étendu à la recherche d'ensembles apériodiques de cardinalité optimale, utilisant différents cadres de résolution. Bien qu'initialement ce problème concerne le recouvrement du plan discret, il a également été étudié, d'un point de vue de la théorie de la complexité algorithmique, sur des régions semi-bornées telles que des bandes bi-infinies mais aussi sur des régions finies comme les rectangles. Nous présenterons donc, à travers ce chapitre, différents résultats de recherche sur ce problème dont certains, de nature algorithmique, seront nouveaux.

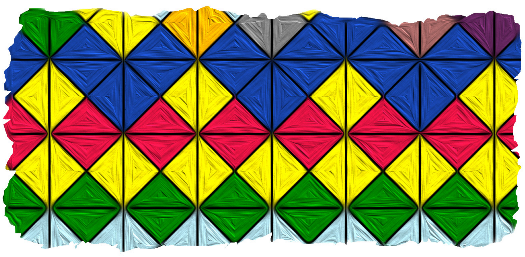


***Figure VII.1** – Illustration d'un fragment d'un pavage du plan discret par des tuiles de Wang.*

1 Introduction au problème de Wang

Avant de présenter le problème dans le prochain paragraphe, il est intéressant de mentionner que ce problème, de nature décisionnelle, est inhérent à des problématiques de pavages du plan (PAVAGE). En toute généralité PAVAGE consiste à déterminer, si étant donné une collection finie [1] de pavés, il est possible de paver le plan ou une région (semi)-bornée du plan avec des pavés de cette collection modulo certaines isométries autorisées. Cet ensemble de problèmes renvoie à des problèmes de décidabilité algorithmique (DEC-ALG) où l'on cherche s'il existe un algorithme, qui en un nombre fini d'étapes, permet de décider si OUI ou NON le problème est résoluble. De plus, lorsqu'on se restreint à des régions finies et que l'on cherche à résoudre ces problèmes, on s'intéresse à la quantité de ressources nécessaires, en temps ou en espace, des algorithmes de résolution. Cela relève donc, de ce point de vue, des problèmes de complexité algorithmique (COM-ALG) qui permettent de hiérarchiser les problèmes de pavages selon leur degré de difficulté. Cette hiérarchie est établie grâce aux classes de complexité algorithmique comme $\mathcal{P}$, $\mathcal{NP}$, PSPACE, EXPTIME, EXPSPACE... Pour certains de ces problèmes, on étudie aussi leur complétude dans certaines classes de complexité. Par exemple, les problèmes qui sont complets dans $\mathcal{NP}$ ou PSPACE sont les problèmes les plus difficiles de ces classes.

1.1 Présentation du problème dans $\mathbb{Z}^2$

Le problème de Wang dans le plan discret que nous nommerons WANG-PLAN s'énonce ainsi.

- *Instance.* Une collection finie $\mathcal{T}$ de tuiles de Wang
- *Question.* Est-il possible de paver la plan entier $\mathbb{Z}^2$ avec des tuiles de $\mathcal{T}$?

Ce problème, initialement appelé *The Domino Problem*, a été introduit par Hao Wang (figure VII.2) au début des années soixante (Wang, 1961). Il consiste donc à décider si, étant donné une collection finie de pavés carrés colorés, il est possible de recouvrir le plan discret par des pavés de cette collection, modulo certaines règles. Un pavé de Wang, plus communément appelé tuile de Wang, est un carré unitaire partagé par ses diagonales en quatre secteurs triangulaires colorés, qui peuvent être de couleur distincte ou non (figure VII.3).

***Figure VII.2** – Hao Wang (1921-1995).*

1. La finitude de la collection est importante car si on considère un ensemble infini de pavés, le problème de pavage est trivial.

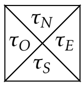


***Figure* VII.3** – *Tuile de Wang générique $\tau := (\tau_N, \tau_S, \tau_O, \tau_E)$ où τ_N, τ_S, τ_O et τ_E appartiennent à un ensemble fini $\mathcal{X}$ de couleurs.*

En observant la figure ci-avant (figure VII.1, p. 105), on constate qu'un fragment du plan est recouvert par des pavés carrés colorés. En outre, l'agencement de chacun de ces pavés est particulier, puisque chaque paire de pavés adjacents possède un côté commun de la même couleur. Ceci constitue l'une des règles du jeu dans la construction d'un pavage. Le lecteur ou la lectrice remarquera également qu'un même pavé peut être répété autant de fois que nécessaire dans cette construction. Enfin, chaque pavé d'une collection donnée est unique, il n'est donc pas autorisé d'effectuer des isométries pour construire de nouveaux pavés, à rotation ou symétrie près, sinon le problème n'a plus d'intérêt. En effet, prenons l'exemple de la tuile τ_1 dont on autorise les isométries et en particulier les rotations ou réflexions (figure VII.4).

Exemple VII.1

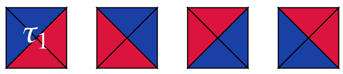


***Figure* VII.4** – *Tuiles de Wang obtenues à rotation près à partir de la tuile τ_1.*

Ainsi, avec ce jeu de tuiles (figure VII.4) on peut construire un motif carré de taille 2×2 valide, qui, modulo certaines translations permet de recouvrir le plan $\mathbb{Z}^2$ (figure VII.5).

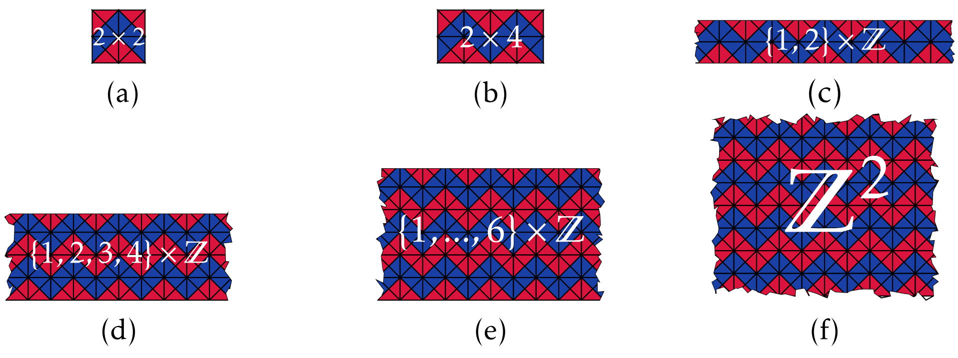


***Figure* VII.5** – *Différentes étapes dans la construction d'un pavage périodique de $\mathbb{Z}^2$.*

L'exemple VII.1 démontre bien le désintérêt du problème si les isométries — rotation, symétrie — sont permises. En effet, cela sous-tend que chaque tuile d'une collection donnée, permet à elle seule, par rotations ou symétries, de générer un pavage du plan par translations d'un premier motif carré, ayant la même coloration sur les bords EST-OUEST et NORD-SUD. Cela nous amène à définir la notion de motifs périodiques.

Définition VII.1 – Motif périodique

Un motif périodique est un motif de taille finie qui laisse le pavage du plan invariant par translations de ce dernier.

Un tel motif permet ainsi de générer, par translations, un pavage périodique du plan $\mathbb{Z}^2$. Par ailleurs, on dit qu'un pavage π est périodique, si et seulement si, il existe un couple $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $(i,j) \in \mathbb{Z}^2, \pi(i+p, j+q) = \pi(i,j)$. Lorsque (p,q) sont minimaux, on dira alors que le pavage est périodique de période (p,q). Instinctivement, on imagine pour chaque tuile de coordonnées (i,j) du pavage périodique de période (p,q), retrouver cette même tuile en coordonnées $(i+p, j+q)$. L'exemple VII.2 montre deux pavages périodiques du plan entier générés par deux motifs périodiques $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$.

Exemple VII.2

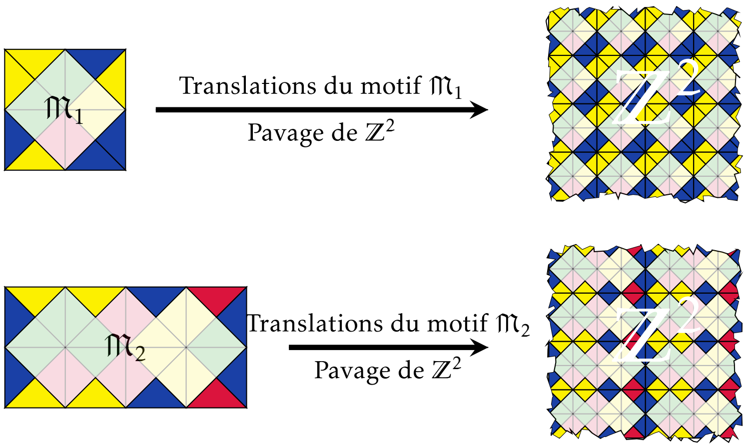


***Figure VII.6** – Exemples de motifs périodiques engendrant par translations un pavage du plan entier $\mathbb{Z}^2$.*

Une question qui vient assez naturellement est de savoir, dans le cadre de ce problème, si tous les motifs périodiques pouvant être générés pour paver $\mathbb{Z}^2$ peuvent également prendre la forme de motifs rectangulaires périodiques. La réponse est oui, plusieurs preuves existent dans la littérature, nous en donnons une ci-après (Trouvé, 2021).

Supposons tout d'abord que le motif rectangulaire soit périodique alors évidemment c'est également un motif périodique. Réciproquement, supposons

qu'il existe un motif qui pave périodiquement $\mathbb{Z}^2$. On a donc deux couples de coordonnées de vecteurs non colinéaires $\vec{p} = (x_p, y_p)$ et $\vec{q} = (x_q, y_q)$ qui déterminent la période et les directions de translation. A présent, il suffit de chercher deux nouveaux vecteurs qui soient orthogonaux et dont l'un soit vertical. Soient $\vec{a} = (x_a, y_a)$ et $\vec{b} = (x_b, y_b)$ ces deux vecteurs, avec le vecteur $\vec{b}$ qui est vertical et tel que $y_a = x_b = 0$ puisque les deux sont orthogonaux. Il existe alors deux entiers $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $ix_p + jx_q = 0$ ($ij \neq 0$, prendre $i = x_q$ et $j = -x_p$) et on pose $y_b = iy_p + jy_q$. En outre, il existe aussi deux entiers i' et j' tels que $i'y_p + j'y_q = 0$ (prendre au pire $i' = y_q$ et $j' = -y_p$) et on pose ensuite $x_a = i'x_p + j'x_q$. Ainsi, le rectangle délimité par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ se translate de manière périodique, horizontalement et verticalement, pour paver $\mathbb{Z}^2$.
On obtient ainsi le résultat suivant.

Théorème VII.1 – des motifs périodiques

Soit $\mathcal{T}$ une collection finie de tuiles de Wang. Il existe un motif de taille finie $\mathfrak{M}_1$ qui pave périodiquement $\mathbb{Z}^2$, si et seulement si, il existe un motif rectangulaire $\mathfrak{M}_2$ qui pave $\mathbb{Z}^2$ périodiquement.

Finalement, nous avons vu trois règles à respecter dans la construction d'un pavage de Wang à savoir.

Règle 1. Il est strictement interdit d'effectuer des rotations et des symétries sur les tuiles.

Règle 2. Un motif est valide si chaque paire de tuiles adjacentes a son côté commun de la même couleur (figure VII.7).

FIGURE VII.7 – Motif valide (à gauche) et non valide (à droite).

Règle 3. Chaque tuile peut être répétée autant de fois que nécessaire dans la construction d'un pavage.

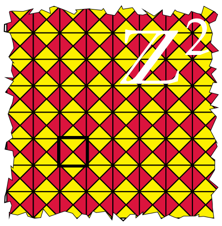
1.2 Exemples illustrant le problème et premiers constats

Dans ce paragraphe, nous allons présenter quelques exemples de collections de tuiles et déterminer si des tuiles de ces collections permettent de recouvrir le plan $\mathbb{Z}^2$.

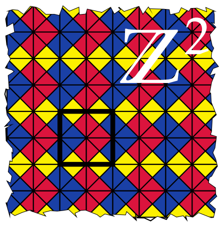
Exemple VII.3

FIGURE VII.8 – *Collection $\mathcal{T}$ de cinq tuiles de Wang à trois couleurs.*

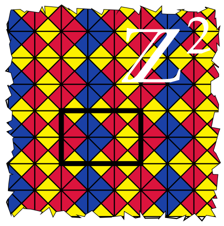
Rappelons qu'il suffit qu'une sous-collection $\mathcal{T}^{'} \subseteq \mathcal{T}$ permette de paver le plan pour répondre au problème. En général, il n'est donc pas nécessaire d'utiliser toutes les tuiles d'une même collection. Ainsi, dans cet exemple, il suffit de remarquer qu'une tuile convient pour paver le plan $\mathbb{Z}^2$. En effet, la tuile τ_5 suffit pour recouvrir le plan par translations d'elle-même (figure VII.8). On aurait aussi pu construire un motif périodique de taille 2×2 utilisant les tuiles τ_1, τ_2, τ_3 et τ_4 de $\mathcal{T}$ (figure VII.8), mais aussi utiliser l'intégralité de cette collection en formant également un motif périodique de taille 2×3.



Pavage de plan $\mathbb{Z}^2$ avec une tuile de $\mathcal{T}$.



Pavage de plan $\mathbb{Z}^2$ avec quatre tuiles de $\mathcal{T}$.



Pavage de plan $\mathbb{Z}^2$ avec les cinq tuiles de $\mathcal{T}$.

FIGURE VII.9 – *Différents pavages périodiques de plan $\mathbb{Z}^2$ avec des tuiles de $\mathcal{T}$.*

La collection de l'exemple VII.3 précédent permet donc de paver le plan entier périodiquement, et ce pavage n'est pas unique puisque comme nous l'avons vu, il en existe plusieurs. Notons qu'il est aussi tout à fait envisageable de construire un pavage du plan non périodique, c'est-à-dire qu'aucune translation de motifs de taille finie [2] ne laisse la structure du pavage invariante (figure VII.10).

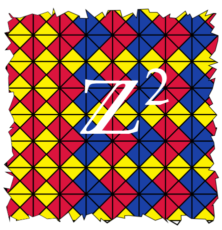


FIGURE VII.10 – *Extrait d'un pavage non périodique du plan discret.*

2. On remarque ici qu'une translation verticale laisse ce pavage invariant, mais il ne correspond pas à une translation d'un motif de taille finie. Ce pavage n'est donc pas considéré comme étant périodique.

Définition VII.2 – Ensemble périodique

Nous dirons qu'un ensemble, jeu ou collection de tuiles est périodique s'il permet de recouvrir périodiquement le plan discret. Autrement dit que cet ensemble de tuiles puisse former au moins un motif périodique permettant, par translations, de paver le plan périodiquement.

Intéressons-nous à présent à la collection de l'exemple VII.4 ci-après.

Exemple VII.4

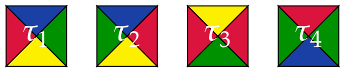


FIGURE VII.11 – Une collection $\mathcal{T}$ de quatre tuiles de Wang à quatre couleurs.

Le but est donc de décider, si cette collection permet ou non de paver le plan entier. Pour cela, nous allons commencer par construire des premiers motifs valides. Il est assez évident que chacune des quatre tuiles permet de paver un carré de taille 1×1, mais aucune de ces tuiles n'est auto-suffisante pour engendrer un pavage périodique du plan entier. Au mieux deux d'entre elles permettent de recouvrir une bande horizontale de hauteur $h = 1$ (la tuile τ_3 ou τ_4, figure VII.11). Pour recouvrir un carré de taille 2×2, il n'y a que quatre possibilités parmi les $4^4 = 246$ combinaisons possibles (figure VII.12). En effet, il n'est pas possible d'utiliser la tuile τ_4 sur le bord inférieur du carré, car cette tuile possède la couleur rouge au NORD et aucune autre tuile de $\mathcal{T}$ ne possède la couleur rouge au SUD.

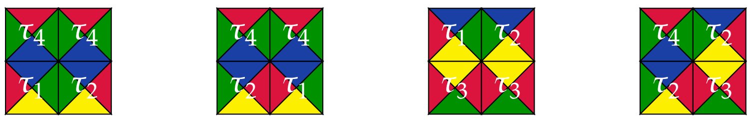


FIGURE VII.12 – Quatre motifs de taille 2×2 valides.

La première ligne des carrés 2×2 possède donc la couleur bleue (resp. jaune) au NORD. Il est alors nécessaire d'avoir des tuiles sur la deuxième ligne avec la couleur bleue (resp. jaune) au SUD. Les quatre possibilités sont ainsi représentées par la figure VII.12. Remarquons qu'aucun de ces quatre motifs ne permet de recouvrir le plan $\mathbb{Z}^2$ de manière périodique.

En continuant la procédure de construction, on s'aperçoit alors qu'il est possible de construire des motifs de taille 3×3 et cela à partir des trois premiers motifs 2×2 représentés sur la figure VII.12. Il est effectivement impossible de construire un motif 3×3 à partir du quatrième et dernier motif 2×2 car ce dernier possède la tuile τ_4 au NORD et la tuile τ_3 au SUD et τ_4 ne peut pas avoir de voisin au-dessus tout comme la tuile τ_3 en dessous. Nous donnons ci-après l'exemple d'un motif 3×3 construit à partir du troisième motif 2×2.

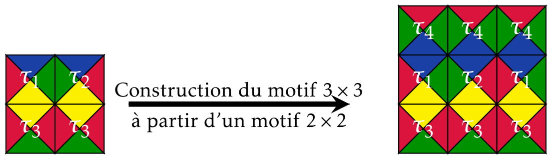


***Figure* VII.13 –** *Exemple de construction d'un motif* 3×3 *avec des tuiles de* $\mathcal{T}$ *à partir d'un des trois premiers motifs* 2×2.

Les configurations valides pour le motif 3×3 possèdent toutes des tuiles au NORD (resp. au SUD) qui ne pourront pas avoir de voisin au-dessus (resp. en dessous)[a]. On ne peut donc pas construire des motifs carrés de taille plus grande. Il n'est donc pas possible de recouvrir le plan avec la collection de tuiles de Wang de l'exemple VII.4.

a. Nous laissons le lectorat construire les autres motifs 3×3 pour s'en convaincre.

Les différents exemples présentés précédemment nous amènent aux constats ci-après pour le problème WANG-PLAN.

Fait 1. Soit il est possible de recouvrir le plan discret uniquement de manière périodique avec des tuiles de $\mathcal{T}$: par exemple, on peut considérer une collection avec une unique tuile monochrome.

Fait 2. Soit il est possible de le recouvrir de manière périodique mais aussi non périodique avec des tuiles de $\mathcal{T}$ (exemple VII.3, p. 110).

Fait 3. Soit il n'est pas possible de le recouvrir, car il existe au moins un motif carré qui n'est pas pavable par des tuiles de $\mathcal{T}$ (exemple VII.4, p. 111).

Le troisième fait est en réalité la conséquence directe d'un résultat bien connu en mathématiques discrètes lié au lemme de König.

Lemme VII.1 – König (1927)

Tout arbre infini à embranchement fini possède un chemin infini.

L'idée générale de la preuve est assez intuitive. Prenons un arbre infini à embranchement fini dont la racine est R_0 (figure VII.14). Comme on a supposé que l'arbre est infini à embranchement fini, cela sous-tend que R_0 a une infinité de descendants mais que ses descendants directs — autrement dit ses fils — sont en nombres finis. De ce fait, on en déduit qu'au moins un de ses fils admet une infinité de descendants. Notons R_1 le descendant direct de R_0. Puisque R_1 admet une infinité de descendants mais qu'il possède lui aussi une nombre fini de descendants directs, il existe là encore au moins un descendant direct de R_1, que l'on nomme R_2 qui possède une infinité de descendants mais un nombre fini de descendants directs. En procédant par itérations successives, on construit un chemin infini dont les nœuds sont donnés par la séquence infinie $R_0R_1R_2R_3\ldots$, et on démontre ainsi que tout arbre infini à embranchement fini possède au moins un chemin infini.

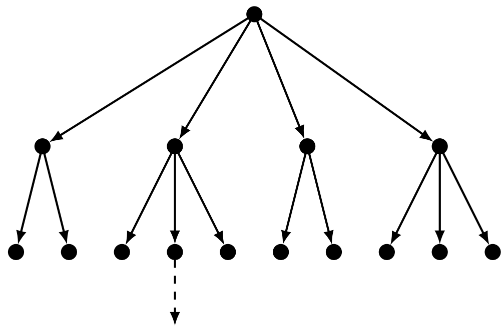


***Figure VII.14** – Illustration d'un arbre infini à embrachement fini du lemme de König.*

Ce résultat va nous permettre de démontrer un résultat classique en théorie des pavages, mais tout de même nécessaire pour affirmer l'inexistence d'un recouvrement du plan discret.

> **Théorème VII.2 – Extension du lemme de König aux pavages.**
>
> Considérons un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{T}$ une collection finie de tuiles de Wang. Le plan discret est pavable par des tuiles de $\mathcal{T}$, si et seulement si, tout carré de taille $n \times n$ peut être recouvert par ces tuiles.

L'implication directe est intuitive. Si on arrive à recouvrir le plan entier par des tuiles d'une collection $\mathcal{T}$, alors on peut extraire n'importe quelle région du plan et en particulier un carré pavé de taille $n \times n$.

L'implication réciproque, quant à elle, repose sur le lemme de König qui stipule que tout arbre infini à embranchement fini admet un chemin infini. Dans notre cas, on considère une collection finie de k tuiles de Wang. Comme on suppose que l'on peut construire tous les motifs carrés de taille finie avec ces tuiles, chaque nœud de l'arbre correspond à un motif carré de taille finie valide. Ainsi la racine est le carré de côté nul, ses descendants directs (fils) correspondent à un motif carré de taille 1×1, c'est à dire les k tuiles. Il y a donc un nombre fini de fils. En procédant par itérations successives, on construit ainsi un nœud représentant un motif de taille $n \times n$ valide admettant comme fils tout nœud représentant un motif valide de taille $(n+1) \times (n+1)$ à partir du carré de taille $n \times n$ (inclusion du carré de côté n dans le carré de côté $n+1$). Comme chaque nœud a un nombre fini de fils, puisque la collection de tuiles est finie (k tuiles), et que par hypothèse, on sait paver tous les carrés de taille $n \times n$, cet arbre admet donc un nombre infini de nœuds. Le lemme de König nous assure que cette arborescence admet un chemin infini, ce qui nous permet de construire un pavage du plan $\mathbb{Z}^2$ avec ces tuiles.

La conséquence directe, par contraposée, de ce résultat permet d'établir notre troisième constat (**Fait 3.**, p. 112).

Corollaire VII.1 – Inexistence d'un recouvrement du plan

Si le plan discret n'est pas pavable par des tuiles d'une collection $\mathcal{T}$, alors il existe au moins une taille de carré non pavable par ces tuiles.

La réciproque du résultat précédent est également vraie. Il est clair maintenant qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le recouvrement du plan soit impossible, est qu'il existe au moins une taille de carré non pavable.

A ce stade de l'analyse, chacun des ensembles que nous avons présenté dans les différents exemples nous a permis, soit de paver le plan de manière périodique (**Fait 1.**, **Fait 2.**, p. 112), soit de montrer qu'un pavage du plan n'était pas possible (**Fait 3.**, 112). La question naturelle qui vient à l'esprit est de savoir s'il existe des ensembles de tuiles qui recouvrent le plan, mais uniquement de manière non périodique.

Définition VII.3 – Collection apériodique

Nous dirons qu'une telle collection de tuiles est apériodique, si elle permet d'une part de recouvrir le plan, et d'autre part, de le recouvrir uniquement de manière non périodique.

2 De l'indécidabilité aux pavages apériodiques

2.1 Indécidabilité du problème de Wang

Le problème WANG-PLAN est étroitement lié à la théorie de la calculabilité ainsi qu'à celle des modèles en logique mathématique. En effet, Wang s'est dans un premier temps intéressé à la décidabilité des problèmes de satisfaisabilité de certaines formules liées au calcul des prédicats du premier ordre. En théorie de la calculabilité, un problème décidable est un problème de décision où la réponse OUI ou NON peut être décidée par un algorithme en un nombre fini d'étapes. Cet algorithme prend en entrée un certain nombre d'instances et renvoie en sortie la réponse OUI ou NON. *A contrario* si un tel algorithme n'existe pas, le problème est dit indécidable .

En amont de ce problème, Hilbert et Ackermann avaient posé en 1927 le problème de décidabilité concernant l'ensemble des énoncés universellement valides dans le calcul des prédicats du premier ordre connu sous le nom de ENTSCHEIDUNGSPROBLEM (problème de la décision). En 1936, Turing a démontré que ce problème était indécidable en réduisant le problème de l'ARRÊT d'une machine de Turing, dont il avait prouvé son indécidabilité au sens algorithmique, à ce dernier (Turing, 1936). Ces résultats connus, Wang s'est alors particulièrement intéressé à la décidabilité des problèmes de satisfaisabilité des formules du type $\forall\exists\forall$ dans le calcul des prédicats du premier ordre ($\forall\exists\forall$-SAT) . Ainsi pour faciliter la communication et susciter l'intérêt pour les problèmes de logique, Wang (1961) a montré comment passer [3] d'un problème de satisfaisabilité d'une formule ϕ du type $\forall\exists\forall$ à un problème de pavages mettant en avant un ensemble fini de tuiles colorées, appelées de nos jours, tuiles de Wang (Wang, 1990, p. 209).

> Around the beginning of 1960, while continuing my work on the mechanization of mathematical arguments, I was diverted into a study of the theoretical problem of deciding the class of sentences with the simple quantifier prefix AEA [4] in elementary logic. After a period of effort, I succeeded in transforming the decision problem into the easily understandable combinatorial or geometrical tiling problem (called the "domino problem" by a colleague). This greatly facilitated not only my communication with my colleagues at the industrial laboratory who were mostly ignorant of mathematical logic, but also the ability to focus attention on the mathematical core of the original decision problem.

Wang (1961) a ainsi mentionné le « problème de dominos [5] » pour la première fois avec sa représentation géométrico-symbolique (figure VII.15) et a conjecturé sa décidabilité dans ce même papier.

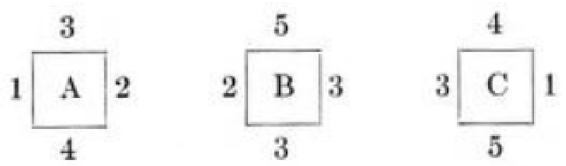


***Figure VII.15** – Représentation de tuiles de Wang : les lettres correspondent aux « noms » des tuiles et les nombres aux couleurs des bords (ibid., p. 23).*

3. Wang (1990, p. 208) précisa qu'à tout ensemble de tuiles on pouvait faire correspondre une formule ϕ du type $\forall\exists\forall$, c'est à dire $\forall x \exists y \forall z \phi(x, y, z)$ où ϕ est une combinaison de prédicats — sans quantificateur universel ou existentiel — liée par des connecteurs logiques, de telle sorte que l'ensemble de tuiles a une solution, si et seulement si, la formule ϕ est non contradictoire.

4. Cette notation est souvent utilisée dans des textes plus anciens qui est en fait l'équivalent de $\forall\exists\forall$ actuel.

5. Que l'on appelle de nos jours également « problème de Wang ».

Il a par ailleurs réussi à démontrer le résultat de l'indécidabilité du problème des dominos à origine contrainte (WANG-ORIGINE) — problème plus contraignant que l'original — par réduction du problème de l'ARRÊT d'une machine de Turing (Wang, 1962).

Quelques temps après Kahr, Moore et Wang (1962) se sont intéressés au problème de dominos à diagonale contrainte (WANG-DIAG) et ont démontré que si ce dernier était indécidable cela impliquerait également l'indécidabilité du problème ∀∃∀-SAT de la théorie des modèles. Ils ont alors prouvé que le problème WANG-DIAG était aussi indécidable par réduction du problème de l'ARRÊT, ce qui leur a permis d'en déduire l'indécidabilité du problème ∀∃∀-SAT.

En revanche, la question de décidabilité du problème général WANG-PLAN était encore ouverte. A ce sujet, comme nous l'évoquions précédemment, Wang (1961) a proposé une première conjecture laissant entrevoir que le problème WANG-PLAN, sans restriction, serait décidable...

> The fundamental conjecture : a finite set of plates is solvable (as at least one solution) if and only if there exists a cyclic rectangle of the plates ; or, in other words, a finite set of plates is solvable if and only if it has a least periodic solution (*ibid.*, p. 177).

Autrement dit, tout pavage du plan avec un ensemble fini de tuiles est périodique.

Par conséquent, si cette conjecture s'avère être vraie alors cela impliquerait le résultat suivant.

> **Corollaire VII.2 – Décidabilité de WANG-PLAN (conjecture)**
>
> Si tous les ensembles de tuiles de Wang qui pavent le plan, le pavent périodiquement, alors le problème WANG-PLAN serait décidable.

En effet, cela sous-tend qu'il existe, en théorie, un algorithme qui permettrait de répondre par OUI ou par NON au problème WANG-PLAN (figure VII.16 extraite de Grünbaum et Shephard, 1986, p. 603). Cet algorithme évaluerait en fait toutes les dispositions des tuiles possibles de $\mathcal{T}$ pour construire des motifs carrés de 1 à n, jusqu'à ce qu'il trouve un motif carré non pavable ou un motif carré périodique. Ainsi l'algorithme pourrait répondre par OUI ou par NON à ce problème de décision. A noter que cet algorithme est exponentiel puisqu'il effectue, dans le pire des cas $\#\mathcal{T}^{n^2}$ opérations.

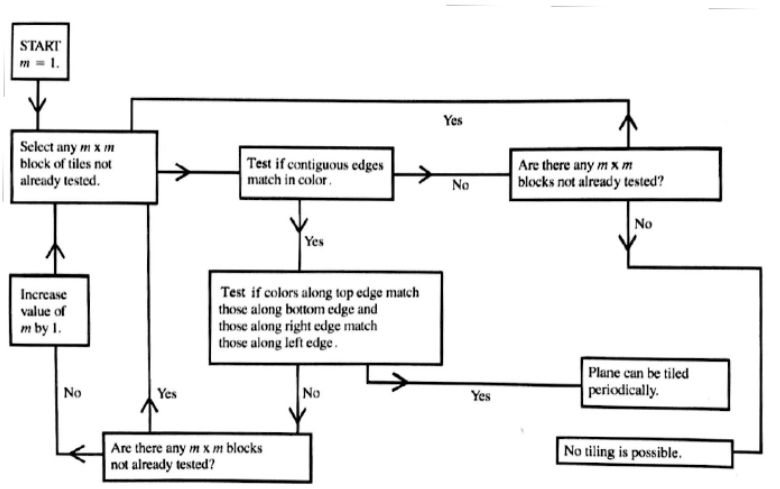


Figure VII.16 – *Schéma de l'algorithme (ibid., p. 603).*

La démarche proposée dans l'exemple VII.4 (p. 111), invoque implicitement cet algorithme mais le raisonnement utilisé sur l'ensemble des tuiles permet de limiter l'étude de cas.

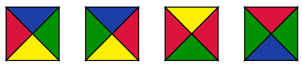


Figure VII.17 – *Collection de tuiles de l'exemple VII.4.*

On commence par tester toutes les tuiles qui forment un motif 1×1 et on vérifie si le motif permet de recouvrir le plan entier par translations. Dans cet exemple aucune des tuiles ne permet à elle seule de recouvrir le plan par translations. Pour cela, il aurait fallu au moins une tuile monochrome ou bicolorée (figure VII.18).

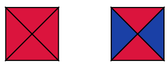


Figure VII.18 – *Exemples de tuiles qui permettent de recouvrir le plan entier par translations d'elles-mêmes.*

Une fois les quatre tuiles testées pour le motif 1×1, on incrémente de un la taille du motif, on passe ainsi au motif de taille deux, puis trois. Notre analyse s'est arrêtée aux motifs de taille 3×3, puisque ces derniers sont non périodiques et qu'ils ne permettent pas de positionner d'autres tuiles au NORD et au SUD. Néanmoins pour répondre négativement au problème de décision, l'algorithme naïf aurait dû tester toutes les possibilités pour construire des motifs de taille

4×4, soit au total $4^{4^2} = 4294967296 \approx 4.10^9$ combinaisons possibles.

Malgré la complexité exponentielle de cet algorithme, en théorie, la machine finirait par répondre OUI ou NON au problème de décision. Cependant, il faut noter que cet algorithme est basé sur la conjecture de Wang (1961) que nous avons considérée comme vraie. Si celle-ci s'avérait être fausse, alors il existerait des ensembles de tuiles qui permettraient de recouvrir le plan mais de manière non périodique. Autrement dit, on pourrait construire des motifs carrés de taille aussi grande que l'on voudrait sans jamais réussir à exhiber de motifs périodiques. En théorie, l'algorithme naïf présenté ci-avant continuerait donc ses procédures sans jamais s'arrêter [6]...

En 1964, Berger, un étudiant de Wang, a ainsi mis fin à cette « indécision » en réfutant dans son travail de thèse la conjecture de Wang (Berger, 1964, 1966) et a ainsi démontré le résultat suivant.

Théorème VII.3 – Indécidabilité de WANG-PLAN (Berger, 1964, 1966)

WANG-PLAN est un problème indécidable au sens de la théorie de la calculabilité.

On pourrait naturellement se dire que ce résultat tient du bon sens puisque les variantes WANG-DIAG ou WANG-ORIGINE, plus restrictives, ont été démontrées comme étant indécidables. Néanmoins, il existe de nombreux contre-exemples qui montrent que ce n'est pas parce que l'on restreint certaines instances d'un problème général que la complexité du problème diminue, au contraire. Par exemple, le problème SNAKE qui consiste à savoir, étant donné un ensemble de tuiles $\mathcal{T}$ et deux points entiers p et q, s'il est possible de connecter ces deux points par un $\mathcal{T}$-snake (« chemin » de tuiles), est un problème décidable dans $\mathbb{Z}^2$ (i.e., $p, q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) et de complexité PSPACE-complet. En revanche, SNAKE est indécidable lorsqu'on se place dans le quart ou le demi-plan, c'est-à-dire lorsque $p, q \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ou $p, q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ (voir p. ex., Ebbinghaus, 1982 ; Etzion-Petruschka, Harel et Dale Myers, 1994 ; Myers, 1979).

Par ailleurs, une conséquence de l'indécidabilité de WANG-PLAN (théorème VII.3) est l'indécidabilité de WANG-PLAN-PERIODIQUE, qui vise à décider si étant donné une collection finie de tuiles, il est possible de paver le plan périodiquement. Ce résultat est dû à Gurevich, Koryakov *et al.* (1972).

Corollaire VII.3 – WANG-PLAN-PERIODIQUE

WANG-PLAN-PERIODIQUE est indécidable.

Outre le travail remarquable réalisé par Berger pour prouver l'indécidabilité

6. En pratique il finirait par s'arrêter par manque de mémoire.

de WANG-PLAN en réduisant le problème de l'ARRÊT des machines de Turing au problème WANG-PLAN, Berger (1964), dans sa thèse, a exhibé une collection de 20426 tuiles permettant de recouvrir le plan $\mathbb{Z}^2$ sans qu'aucun motif fini ne laisse le pavage invariant par translations.

Définition VII.4 – Pavage apériodique

Nous dirons qu'un tel pavage est apériodique s'il recouvre le plan et qu'aucun motif ne laisse le pavage du plan invariant par translations.

Au cours de ce travail Berger a réussi à réduire nettement cette collection au nombre de cent-quatre tuiles [7]. Cette dernière collection n'a cependant pas été rapportée dans son article de 1966. Dès la fin des années soixante jusqu'en 2015, il s'est alors engagé une course dans la recherche du problème d'ensembles apériodiques de cardinalité de plus en plus faible jusqu'à exhiber un ensemble apériodique optimal (WANG-JEU-OPTIMAL). Ces constructions croisent différentes approches que nous aborderons succinctement dans le prochain paragraphe. Le fruit de ce travail se base en particulier sur les écrits de Grünbaum et Shephard (1986) que nous avons mis à jour grâce aux travaux postérieurs et récents sur ce problème.

Le lecteur ou la lectrice trouvera davantage de détails dans un rapport interne que nous avons rédigé au sujet de ces collections apériodiques et notamment leur correspondance avec les collections de tuiles de Wang (Da Ronch, 2020c). Un bref condensé de ce travail épistémologique et historique est aussi proposé dans Da Ronch, Gandit et Gravier (2020).

2.2 L'histoire d'une course à la recherche d'un ensemble apériodique optimal

Comme nous pouvons le constater à travers la frise chronologique (figure VII.19), le problème de Wang a suscité la curiosité d'un bon nombre de mathématiciens devenant ainsi, à partir de la deuxième moitié du XXᵉ siècle, un des problèmes de référence sur les pavages du plan euclidien. Ces différents travaux que nous allons mentionner succinctement ici utilisent des approches différentes notamment au regard des cadres mathématiques utilisés : géométrie discrète, géométrie plane, approche arithmético-algébrique et recherche exhaustive par ordinateur par exemple.

7. Selon Jeandel et Rao (2015), ce dernier a fait quelques erreurs, il y avait en réalité cent-trois tuiles nécessaires pour recouvrir le plan apériodiquement avec son jeu.

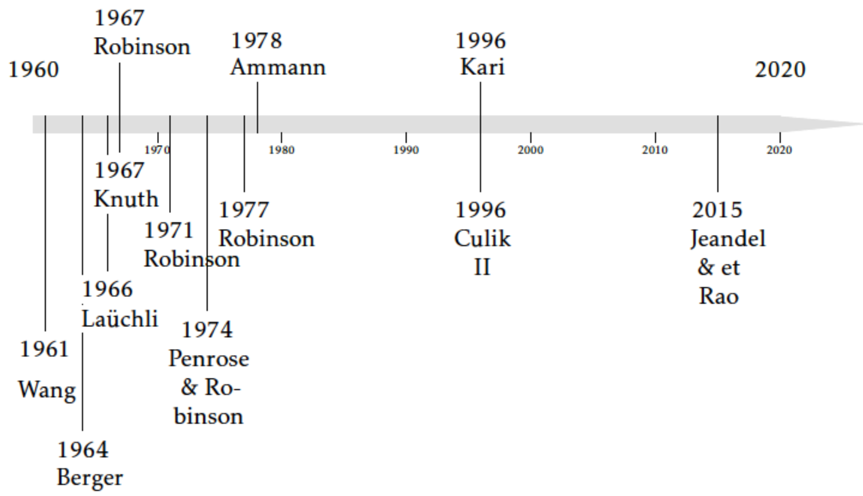


Figure VII.19 – *Frise chronologique — non exhaustive — de l'avancée dans la recherche de jeux apériodiques de cardinalité de plus en plus faible (WANG-JEU-OPTIMAL).*

La fin des années soixante jusqu'à la fin des années soixante-dix a été une période propice à la découverte de nouveaux ensembles apériodiques. Néanmoins, la plupart des jeux qui ont été décrits à cette période n'étaient pas au départ des jeux de tuiles de Wang mais pouvaient s'y ramener modulo quelques transformations. Les tuiles de ces nouveaux jeux étaient complètement différentes des tuiles originales de Wang, elles se présentaient sous la forme de tuiles polygonales comme sur la figure VII.20 par exemple.

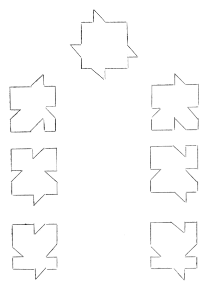


Figure VII.20 – *Exemple de jeu apériodique de Robinson à 7 tuiles polygonales permettant à rotation et réfléxion près de construire un jeu apériodique de 52 tuiles de Wang où seule la translation est autorisée. Extrait de Poizat (1980).*

La réduction du nombre de tuiles a semble-il été initiée par Laüchli en 1966. Ce dernier a envoyé une lettre à Wang présentant un jeu apériodique de quarante tuiles. Néanmoins ce jeu est resté longtemps méconnu et a été décrit seulement en 1975 dans un article de (Wang, 1975)[8], puis dans l'ouvrage

8. En réalité la première représentation de ce jeu dans Wang (1975) présentait des erreurs.

de Grünbaum et Shephard (1986). Cependant, ces références ne montrent pas explicitement le lien entre le jeu de Laüchli et les tuiles de Wang et la façon de procéder pour effectuer la transformation entre ces deux jeux. Le lectorat trouvera explicitement dans Da Ronch (2020c) cette transformation : recodage des bords par numérotation, isomorphisme entre les nombres et les couleurs et enfin pour finir cette transformation, une bijection entre les ensembles de couleurs NORD-SUD et EST-OUEST. Ce nouveau jeu apériodique de Wang transformé à partir du jeu de Laüchli est donné par la figure VII.21.

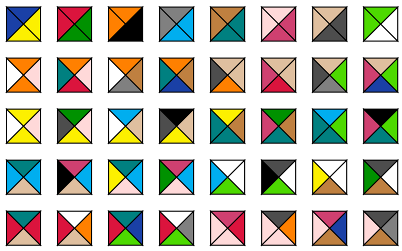


***Figure* VII.21 –** *Ensemble apériodique de Laüchli transformé en 40 tuiles de Wang de 16 couleurs (ibid.).*

Par la suite Robinson (1967) a découvert un autre jeu de sept tuiles (figure VII.20). La description complète de ce jeu et la preuve de son apériodicité sont mentionnées dans Poizat (1980). Dans ce type de pavage les isométries, — rotation, réflexion, translation —, sont autorisées. Ainsi à partir du jeu de sept tuiles de Robinson, on peut, à isométrie près, reconstituer un jeu de cinquante-deux tuiles. En effet, par réflexions de ces sept tuiles, on obtient un jeu de treize tuiles toutes distinctes, puis par rotations de celles-ci, on obtient alors $13 \times 4 = 52$ tuiles différentes les unes des autres et qui, en outre produisent par forçage des pavages apériodiques seulement dans le cas où les translations sont autorisées. On peut donc alors faire correspondre chacune des cinquante-deux tuiles de Robinson à un jeu de cinquante-deux tuiles de Wang dont les couleurs dépendront des formes des bords des tuiles de Robinson. A la fin des années soixante, Robinson a encore réussi à réduire son nombre de tuiles qui était de sept au départ à six. Néanmoins la particularité d'une de ces six tuiles n'a pas permis de réduire davantage le nombre de tuiles de Wang puisque ce jeu produisait un jeu apériodique de cinquante-six tuiles de Wang Robinson (1971). Dans ce même article, Robinson a évoqué le fait qu'il a réussi à réduire encore ce nombre à trente-cinq mais on ne retrouve aucune trace de la description explicite de ce jeu dans la littérature. Entre temps, Knuth (1968) a réduit à son tour le nombre de tuiles initial de Berger à quatre-vingt-douze tuiles. Ces différentes réductions utilisaient toutes le domaine de la géométrie discrète. En particulier, chacun des pavages apériodiques est basé sur une hiérarchisation de grilles carrées forçant l'apériodicité.

Il a fallu attendre le milieu des années soixante-dix et une approche par la géométrie plane pour voir apparaître d'autres réductions [9]. Selon Grünbaum et Shephard (1986), c'est lors d'une correspondance avec Robinson que Penrose a montré comment son ensemble P_2 de deux tuiles de type « cerf-volant » et « fléchette » permettait de passer à un jeu apériodique de trente-quatre tuiles de Wang. Robinson a alors remarqué qu'il était possible, modulo un découpage spécifique sur son pavage, de réduire encore ce nombre à trente-deux tuiles. Durant la même période, Ammann a découvert six autres ensembles qui sont décrits pour la première fois dans l'ouvrage de Grünbaum et Shephard (*ibid.*) et dont leur apériodicité a été démontrée dans un article de 1992 (Ammann, Grünbaum et Shephard, 1992). L'un d'eux a permis à Robinson de réduire ce nombre à vingt-quatre. Selon ce dernier, Ammann a réduit encore ce nombre à seize en 1978, clôturant ainsi ces différentes réductions utilisant une approche par la géométrie plane (Robinson, 1978). Ce dernier résultat était en effet le plus petit ensemble apériodique connu à la fin des années soixante-dix et a marqué un arrêt dans la recherche d'ensembles apériodiques de cardinalités plus faibles. Grünbaum et Shephard ont même souligné que, s'il existait des ensembles encore plus petits, il serait sans doute nécessaire d'utiliser d'autres approches que celles évoquées à travers ces différentes constructions (Grünbaum et Shephard, 1986, p. 596).

> The reduction on the number of Wang tiles in an aperiodic set from over 20,000 to 16 has been a notable achievement. Perhaps the minimum possible number has now been reached. If, however, further reductions are possible then it seems certain that new ideas and methods will be required. The discovery of such remains one the out-standing challenges in this field of mathematics.

Ces auteurs avaient parfaitement raison puisqu'il a fallu attendre près de vingt ans et la fin des années quatre-vingt-dix, pour que Kari (1996) découvre, par une approche arithmético-algébrique complètement différente de ses prédécesseurs, un autre ensemble de quatorze tuiles de Wang à six couleurs, réduisant ainsi le précédent record. En particulier, cet auteur a utilisé les suites de Beatty et les automates de Mealy pour construire son jeu apériodique. Au même moment Culik II (1996) a réussi à réduire ce nombre à treize tuiles de cinq couleurs par une approche similaire. [10]

9. Le lecteur ou la lectrice trouvera ces différents jeux dans Grünbaum et Shephard (1986, chap. 10 et 11).

10. On trouvera des notes de lecture en complément des articles de Kari et Culik II notamment dans Kari (2019) et Eigen, Navarro et Prasad (2007).

Cet ensemble de Wang est resté durant une vingtaine d'années le plus petit ensemble apériodique jamais exhibé. La question essentielle était de savoir s'il existait un ensemble $\mathcal{T}$ de tuiles de Wang tel que sa cardinalité $\#\mathcal{T} < 13$. Selon Grünbaum et Shephard (1986), il semblerait que Robinson ait prouvé, sans le publier, que tout ensemble de Wang de cardinalité $\#\mathcal{T} \leqslant 4$ soit décidable. En d'autres termes, tout ensemble d'au plus quatre tuiles permet soit de paver la plan périodiquement, soit ne le pave pas car il existe au moins une taille de carré non pavable. Il existe de ce fait un algorithme qui permet de répondre par OUI ou par NON à ce problème de décision. Il semblerait que le problème d'existence de jeux apériodiques se soit alors restreint à la recherche d'un ensemble de Wang tel que $4 < \#\mathcal{T} < 13$.

Indépendamment de ces réductions, d'autres mathématiciens se sont intéressés à la conjecture de Wang, et en particulier à la décidabilité de celle-ci lorsque le nombre de couleurs d'un ensemble de tuiles est tel que $\#\mathcal{X} \leqslant 3$. Récemment Hu et Lin (2011), puis Chen, Hu, Lai et Lin (2014) ont démontré que la conjecture de Wang était vraie pour des ensembles de tuiles de deux ou trois couleurs (WANG-PLAN-2,3-COULEURS). [11]

Théorème VII.4 – WANG-PLAN-1,2,3-COULEURS

WANG-PLAN-1,2,3-COULEURS est décidable pour $\#\mathcal{X} = 1$, 2 ou 3.

Un prolongement naturel à ce problème serait de fixer, par exemple, au plus deux couleurs par tuile parmi un ensemble fini de couleurs $\mathcal{X}$ et d'établir ensuite des CNS quant à la pavabilité de $\mathbb{Z}^2$. Ici c'est donc le nombre de couleurs par tuile qui est fixé et non le nombre de couleurs dans l'ensemble fini $\mathcal{X}$. Nous évoquerons ce nouveau problème dans le prochain chapitre.

Reprenons, à partir des travaux de Chen, Hu, Lai et Lin (2014), Culik II (1996), Hu et Lin (2011) et Kari (1996), la recherche de jeux apériodiques s'est ainsi limitée à la recherche d'ensembles de tuiles telle que $4 < \#\mathcal{T} < 13$, et dont le nombre de couleurs est tel que $\#\mathcal{X} > 3$. Autrement dit, existe-il un jeu apériodique de moins de treize tuiles de Wang de quatre couleurs ? [12]

Jeandel et Rao (2015) ont répondu positivement à cette question en démontrant qu'il existait un ensemble apériodique de onze tuiles à quatre couleurs en utilisant une approche par les automates (figure VII.22). A l'aide d'une recherche

11. Le cas d'une couleur est évident, puisqu'une tuile monochrome pave, dans tous les cas, périodiquement $\mathbb{Z}^2$. WANG-PLAN-1-COULEUR est donc clairement décidable lorsque $\#\mathcal{X} = 1$.

12. Un jeu de cinq couleurs a été mis en avant par Culik II (1996) comme nous l'évoquions précédemment.

exhaustive par ordinateur, ils ont même réussi à prouver que tous les ensembles de moins de dix tuiles n'étaient pas des ensembles apériodiques et ont déduit de ces faits l'optimalité de leur jeu. Ces auteurs ont ainsi déterminé le plus petit ensemble apériodique de Wang (WANG-JEU-OPTIMAL) et ont donc démontré le résultat suivant.

Théorème VII.5 – WANG-JEU-OPTIMAL (Jeandel et Rao, 2015)

Le jeu de Jeandel et Rao est optimal, c'est-à-dire qu'il faut et qu'il suffit de onze tuiles et d'un ensemble $\mathcal{X}$ de 4 couleurs pour exhiber un pavage apériodique du plan entier car tout jeu de moins de 11 tuiles ou moins de 4 couleurs, s'il pave le plan, le pave nécessairement de manière périodique.

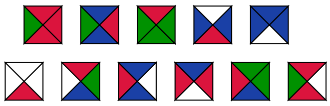


FIGURE VII.22 – Jeu apériodique optimal de onze tuiles à quatre couleurs construit par Jeandel et Rao (ibid.).

Nous résumons les principales réductions dans le tableau ci-après (tableau VII.3).

Auteur(s)	Date [13]	Référence(s)	$\#\mathcal{T}$	$\#\mathcal{X}$	Jeu dérivé
Berger	1964	Berger (1964, 1966)	20426 puis 104	—	
Laüchli	1966	Grünbaum et Shephard (1986) et Wang (1975)	40	16	Jeu de Laüchli
Knuth	1967	Grünbaum et Shephard (1986) et Knuth (1968)	92	26	
Robinson	1969	Robinson (1971)	56	12	Jeu de Robinson
Robinson et Penrose	1974	Grünbaum et Shephard (1986)	32	16	Jeu P2 de Penrose
Robinson	1977	Grünbaum et Shephard (*ibid.*)	24	24	Jeu A2 de Amman

13. Certaines dates de découvertes sont approximatives et peuvent différer d'une voire deux années selon les auteurs, surtout pour des ensembles non explicitement décrits.

Ammann	1978	Grünbaum et Shephard (1986) et Robinson (1978)	16	6	Jeu A2 de Ammann et barres de Ammann
Kari	1996	Kari (1996)	14	6	
Culik II	1996	Culik II (1996)	13	5	
Jeandel et Rao	2015	Jeandel et Rao (2015)	11	4	

TABLEAU VII.3 – *Résumé des principales découvertes dans les jeux apériodiques de Wang dérivés parfois d'autres ensembles apériodiques.*

Il est naturel de prolonger ce questionnement autour de la décidabilité et de l'existence de jeux apériodiques à d'autres dimensions lorsque $d \geqslant 3$. Culik et Kari (1996) ont par exemple démontré l'existence d'un jeu apériodique de vingt-un cubes de Wang lorsque $d = 3$ en utilisant la même méthode que Kari (1996) dans $\mathbb{Z}^2$ à partir de la collection de Culik II (1996) (WANG-ESPACE). Les auteurs ont même affirmé que ce processus de construction de d-cubes de Wang apériodiques s'étendait dans des espaces de dimension supérieure ($d > 3$).

Nous avons vu par exemple que le jeu apériodique P_2 de Penrose, constitué de deux tuiles sous la forme de « cerf-volant » et « fléchette », permettait de construire une collection apériodique de trente-deux tuiles de Wang (voir tableau VII.3, p. 125). On peut se demander s'il existe un jeu avec une et une seule tuile permettant de recouvrir le plan apériodiquement. Ce problème est connu sous le nom de EIN STEIN [14] et il a été démontré qu'il existait une tuile non connexe nommée Socolar-Taylor qui répondait à cette question [15]. En revanche, pour une tuile connexe, la question est encore ouverte à ce jour.

Ces différents paragraphes ont permis de mettre en avant les recherches centrées autour de ce problème, notamment sur la question de décidabilité, mais aussi sur l'existence de jeux apériodiques et de leur réduction. Bien qu'initialement la question concerne le recouvrement du plan discret voire de demi ou quart de plan (WANG-ORIGINE par exemple), il est naturel de se poser la question sur des domaines plus contraignants, comme des régions (semi)-bornées du plan et en particulier les bandes bi-infinies horizontales d'une hauteur $h > 0$ et les rectangles de taille $p \times q$. Notre recherche nous a alors permis de constater que

14. Qui signifie une pierre en allemand.
15. Voir https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein_problem

ces problèmes ont été étudiés d'un point de vue de la théorie de la complexité. Nous abordons ce point dans le paragraphe ci-après.

3 Décidabilité du problème sur des régions (semi)-bornées de $\mathbb{Z}^2$ et complexité algorithmique

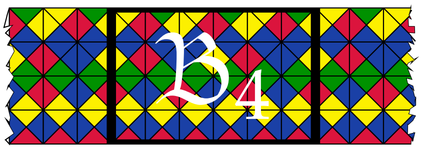


***Figure VII.23** – Pavage d'une bande bi-infinie $\mathfrak{B}_4$ lorsque $h = 4$ par translations horizontales d'un motif horizontalement périodique.*

3.1 Décidabilité et complexité dans le cas des bandes bi-infinies $\mathfrak{B}_h$ d'une hauteur $h > 0$

On se place à présent dans le cas du problème de Wang sur une bande bi-infinie horizontale $\mathfrak{B}_h$ de hauteur $h > 0$ fixée, que l'on notera par la suite WANG-h-BANDE.

Le problème WANG-h-BANDE s'énonce ainsi.

- *Instance*. Une collection $\mathcal{T}$ de tuiles de Wang.
- *Question*. Existe-il un pavage de $\mathfrak{B}_h$ où $h > 0$ fixée avec des tuiles de $\mathcal{T}$?

On définit une bande horizontale de la manière suivante.

Définition VII.5

Une bande bi-infinie de hauteur $h > 0$ notée $\mathfrak{B}_h$ est définie par :

$$\forall h \in \mathbb{N}^*, \quad \mathfrak{B}_h := \left\{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, 1 \leqslant j \leqslant h\right\} = \mathbb{Z} \times \{1, \ldots, h\}$$

WANG-h-BANDE est décidable et la réponse à cette question de décidabilité est intuitive. En effet, s'il l'on considère un ensemble $\mathcal{T}$ de tuiles de Wang de cardinal k (i.e. $\#\mathcal{T} = k$), pour paver la bande de hauteur h , on va construire toutes les dispositions possibles de colonnes de hauteur h qui sont en nombre de k^h possibilités. Comme il y a un nombre fini de tuiles et *a fortiori* de colonnes, si la bande bi-infinie est pavable, alors nécessairement une des colonnes construites va se répéter et former un motif rectangulaire ayant une période horizontale permettant de paver $\mathfrak{B}_h$ par le principe du pigeonnier ou des tiroirs de Dirichlet (voir p. 190). Sinon, il existe une taille de rectangle qui ne possède pas de pavage. Pour faciliter la preuve d'existence on pourrait, pour chaque colonne de hauteur h construite, associer pour chaque bord EST et OUEST ayant un motif de couleurs différentes, une et une seule couleur. En quelque sorte construire une super-tuile $1 \times h$ avec, non pas dans le pire des cas h couleurs différentes sur son bord, mais une seule. Ainsi, il suffirait de rechercher un circuit de tuiles pour paver la bande comme on pourrait le faire pour une bande horizontale de hauteur $h = 1$ (voir le chapitre suivant). Cela revient en fait à la recherche d'un circuit dans un graphe orienté (voir remarque ci-après).

Pour construire les colonnes, on pourrait changer de représentation en associant les couleurs SUD et NORD des tuiles à un graphe orienté dont les sommets représentent les couleurs NORD et SUD de $\mathcal{T}$. Ainsi, il suffit de chercher des chemins de longueur h dans le graphe orienté. Cela revient donc à un problème de recherche de chemins dans un graphe orienté (CHEMIN). Ensuite, on effectue la même procédure en renumérotant les couleurs sur les bords EST et OUEST des colonnes construites pour chercher ensuite un circuit dans le nouveau graphe orienté construit, cette fois-ci les sommets du graphe correspondent aux couleurs EST et OUEST. Plusieurs algorithmes polynomiaux comme les algorithmes de parcours en profondeur (DFS, Depth-First Search) ou en largeur (BFS, Breadth First Search), que nous préciserons dans le prochain chapitre, permettent de résoudre des problèmes d'existence/de recherche de CHEMIN ou de CIRCUIT dans un graphe orienté (Dasgupta, Papadimitriou et Vazirani, 2008).

> **Théorème VII.6 – WANG-h-BANDE**
>
> Le problème WANG-h-BANDE est décidable et polynomial lorsque la hauteur $h > 0$ fixée ne fait pas partie des instances du problème.

Nous proposons dans la suite du chapitre une méthode à coût constant en utilisant une nouvelle approche grâce à l'algèbre des chemins (voir p. 130).

Notons qu'ici la hauteur h ne fait pas partie de la donnée du problème, si cette dernière était dans les instances, alors il semblerait que ce problème soit plus difficile (PSPACE-complet) d'un point de vue de la complexité algorithmique (voir p. ex., Schwarzentruber, 2019).

3.2 Décidabilité dans le cas des rectangles de taille $p \times q$

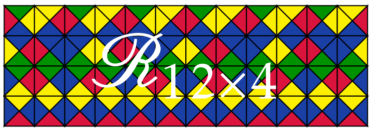


FIGURE VII.24 – *Exemple d'un pavage valide sur un rectangle de taille* 12×4.

Le problème général de Wang sur des rectangles noté WANG-REC-GEN s'énonce ainsi.

- *Instance*. Une collection $\mathcal{T}$ de tuiles de Wang et deux entiers p et q [16].
- *Question*. Existe-il un pavage du rectangle de taille $p \times q$ avec des tuiles de $\mathcal{T}$?

Ce problème est ici restreint au rectangle de taille $p \times q$. Cette restriction implique la décidabilité du problème. En fait l'algorithme naïf consiste à construire tous les motifs rectangulaires de taille $p \times q$ pour ne retenir que ceux qui sont valides. Cet algorithme construit en fait, à partir d'une des tuiles dans une position donnée, un motif rectangulaire et teste à la fin sa validité. Si celui-ci est valide alors il incrémente de un le nombre de solutions trouvées, puis teste une autre tuile et ainsi de suite. Cette méthode est en général nommée *backtracking* mais n'est pas efficace dans notre cas puisque il faut tester tous les motifs qui sont en nombre de $\#\mathcal{T}^{p\times q}$. Cet algorithme produit donc une explosion combinatoire même pour des petites valeurs. Par exemple pour $\#\mathcal{T} = 4$ et un rectangle de taille 5×4, il faut tester $4^{20} = 1099511627776$ motifs rectangulaires. Comme le souligne Lévy (2011), on peut améliorer l'efficacité de cet algorithme en utilisant un algorithme de type *branch and bound*. C'est-à-dire qu'au lieu d'attendre la fin du pavage pour tester la validité d'un motif, l'algorithme teste plutôt la validité des bords des tuiles à chaque étape du processus de construction d'un motif de taille $p \times q$. Cela permet d'éliminer les cas qui ne fonctionnent pas pour ne garder que les motifs valides. Néanmoins dans le pire des cas, cet algorithme a toujours une complexité exponentielle en $\mathcal{O}(\#\tau^{p\times q})$ pour les rectangles et en $\mathcal{O}(\#\tau^{p^2})$ pour les carrés. La question de savoir si on peut réduire la complexité exponentielle de cet algorithme par un autre algorithme de complexité polynomiale est encore ouverte, puisque comme nous le verrons ci-après, le problème de Wang sur des rectangles $p \times q$ est $\mathcal{NP}$-complet et nous n'avons pas encore la réponse si $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ ou $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, qui est un des problèmes du millénaire non encore résolus.

3.3 Complexité du problème de Wang sur les rectangles $p \times q$

Définition VII.6

Un problème de décision $\mathscr{P}$ appartient à la classe de complexité $\mathcal{NP}$-complet s'il vérifie les points suivants.

- $\mathscr{P} \in \mathcal{NP}$. C'est à dire qu'il est possible de vérifier en temps polynomial par rapport à la taille des instances, une solution donnée.
- $\mathscr{P} \in \mathcal{NP}$-dur. C'est-à-dire qu'il n'existe pas d'algorithme déterministe polynomial permettant de construire la solution.

La $\mathcal{NP}$-complétude de WANG-REC-GEN a été abordée assez tôt dans la

16. p et q codés en unaire.

littérature [17]. On trouve une première trace dans Lewis (1978) et plus récemment dans Savelsbergh et van Emde Boas (1984) ; Lewis et Papadimitriou (1997) ; Schwarzentruber (2019) ; Lévy (2011) par exemple. Historiquement la notion $\mathcal{NP}$-complétude a été introduite au début des années soixante-dix par Cook qui a démontré l'existence de cette classe de complexité grâce à un problème de satisfaisabilité booléenne nommé SAT (Cook, 1971). Ce problème est un problème de décision qui, étant donné une formule ϕ de la logique propositionnelle, détermine s'il existe des assignations des variables booléennes qui rendent la formule vraie.

Les différentes preuves de la $\mathcal{NP}$-complétude de WANG-REC-GEN utilisent les machines de Turing (Lewis, 1978 ; Savelsbergh et van Emde Boas, 1984 ; Schwarzentruber, 2019) ou une réduction à partir du problème 3-SAT, un sous-problème de SAT [18], qui étant donné une formule ϕ de forme normale conjonctive constituée d'un ensemble de n variables booléennes $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et de m clauses à exactement trois littéraux, ϕ est-elle satisfaisable ?

$$\phi := \bigwedge_{i=1}^{m} C_i$$

.

Exemple VII.5

Une clause à trois littéraux est une disjonction de littéraux de la forme $x_1 \vee x_2 \vee x_3$ où x_i est un littéral. Par exemple, considérons la formule ϕ définie par

$$\phi := (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

ϕ est-elle sastisfaisable ? Autrement dit, pouvons-nous trouver des assignations pour les variables booléennes (VRAI, FAUX) qui rendent la formule vraie ?

Cette formule est composée d'un ensemble de trois variables booléennes $\{x_1, x_2, x_3\}$ et de deux clauses à trois littéraux $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ et $(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$. Pour satisfaire ϕ, il suffit par exemple d'assigner $x_1 = x_2 = x_3 =$ VRAI pour que la valeur de la conjonction des clauses rende la formule ϕ vraie et donc satisfaisable.

La preuve de la $\mathcal{NP}$-difficulté utilisant une réduction polynomiale de 3-SAT à WANG-RECT-GEN est donnée dans Lévy (2011). Et, il est clair que WANG-

17. Le problème est également $\mathcal{NP}$-complet sur des carrés de taille $n \times n$ où n est codé en unaire (voir Lewis, 1978).

18. A noter que le problème 3-SAT a été démontré $\mathcal{NP}$-complet par réduction du problème SAT à celui-ci (Karp, 1972). Par ailleurs, k-SAT, un autre sous-problème de SAT est aussi complet pour la classe $\mathcal{NP}$ dès lors que $k \geqslant 3$: le cas 2-SAT $\in \mathcal{P}$.

RECT-GEN$\in \mathcal{NP}$ car il existe un vérificateur polynomial en la taille du rectangle qui permet de vérifier si ce rectangle est bien pavé. On a donc le résultat suivant.

Théorème VII.7 – WANG-REC-GEN

WANG-REC-GEN est $\mathcal{NP}$-complet.

WANG-REC-GEN est donc un problème difficile d'un point de vue de la complexité algorithmique puisqu'il n'existe à ce jour aucun algorithme déterministe polynomial permettant de décider si un rectangle de taille $p \times q$ est pavable par des tuiles d'une collection $\mathcal{T}$. Bien entendu sous l'hypothèse que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

En revanche, si la hauteur du rectangle ne fait pas partie de l'instance du problème alors ce problème est dans $\mathcal{P}$, puisqu'il existe un algorithme déterministe polynomial permettant de le résoudre (Etzion-Petruschka, Harel et Dale Myers, 1994). La preuve repose sur une argumentation similaire au problème des bandes bi-infinies de hauteur fixée (WANG-h-BANDE). En effet, on construit toutes les colonnes de hauteur p et de largeur un. Il y a donc $\#\mathcal{T}^p$ possibilités dans le pire cas. On ne garde que les colonnes ayant un pavage valide. Il suffit ensuite de construire le graphe orienté G associé aux colonnes valides. C'est-à-dire que pour chaque colonne valide, on associe à chacun de leur bord EST et OUEST de couleurs différentes un sommet de G et un arc allant d'un sommet à un autre si et seulement si cette colonne est valide. Ensuite, on utilise les algorithmes polynomiaux classiques résolvant les problèmes de recherche de circuits dans un graphe orienté (CIRCUIT) comme le parcours en profondeur (DFS) ou en largeur (BFS) (Dasgupta, Papadimitriou et Vazirani, 2008). En effet, on vérifie, par ces algorithmes, si le graphe G possède un circuit. Alors, si c'est le cas, il existe nécessairement un chemin de taille q, donc un pavage du rectangle de taille $p \times q$. Sinon, si le graphe orienté G est acyclique, c'est-à-dire qu'il ne possède pas de circuit, il suffit de vérifier qu'il existe un chemin de longueur q dans G. Si c'est le cas, alors le rectangle de taille $p \times q$ est pavable. On obtient ainsi le résultat suivant.

Théorème VII.8 – WANG-REC-GEN-FIX

Le problème de Wang sur des rectangles avec une hauteur fixée ne faisant pas partie de la donnée est résoluble en temps polynomial. Autrement dit WANG-REC-GEN-FIX $\in \mathcal{P}$.

Nous proposons ici une toute nouvelle approche qui consiste à utiliser l'algèbre des chemins (Gondran, 1975) . Cette approche est récemment utilisée dans le cadre des rotagraphes et fasciagraphes pour lesquels on peut fixer un paramètre qui assure l'existence d'un algorithme polynomial voire de coût constant pour des problèmes qui, en général, sont $\mathcal{NP}$-complets : par exemple lorsque le paramètre n'est pas fixé (voir p. ex., Bouznif, Moncel et Preissmann, 2016 ;

Klavžar et Žerovnik, 1996 ; Žerovnik, 1999). Dans notre cas, lorsque la hauteur, disons $h > 0$, est fixée, on peut utiliser cette approche pour améliorer l'efficacité de l'algorithme du théorème VII.8 (p. 130). On obtient ainsi un algorithme, non plus polynomial, mais à coût constant en $\mathcal{O}(h)$. Cela revient en fait à un problème de multiplication de matrices dans l'algèbre des chemins. Effectivement, on construit toutes les colonnes valides de hauteur h fixée qui sont d'au plus $\#\mathcal{T}^h$ colonnes. Ensuite, on prend le graphe orienté $G(V,A)$, où l'ensemble des sommets V de G correspond à toutes les façons de colorer les colonnes sur les bords EST et OUEST pour un h fixé. On construit un arc entre deux sommets, si et seulement si, les bords EST et OUEST des colonnes peuvent être connectés. Pour savoir, pour une hauteur $h > 0$ fixée, s'il existe un p-chemin, c'est-à-dire un chemin de longueur p, on construit la matrice d'adjacence $\mathscr{A} \in \mathbb{M}_n(\{0,1\})$ du graphe orienté $G(V,A)$ où $\mathbb{M}_n$ est l'ensemble des matrices binaires pour $n \in \mathbb{N}$ et on calcule sa puissance p-ième. Si un tel chemin (resp. circuit) de i à j (resp. de i à i) existe alors $\mathscr{A}^p_{ij} = 1$ (resp. $\mathscr{A}^p_{ii} = 1$) et zéro sinon pour $i,j \in \{1,\ldots,n\}$. Cela permet de prouver l'existence d'un pavage du rectangle de hauteur $h > 0$ fixée et de longueur p variable (resp. l'existence d'un pavage de la bande bi-infinie $\mathfrak{B}_h$ de hauteur $h > 0$ fixée). Le calcul de la puissance p-ième de $\mathscr{A}$ s'effectue à coût constant en $\mathcal{O}(h)$ par un argument de périodicité qui permet de montrer que p ne dépend que de h. Un algorithme à coût constant pour calculer la puissance p-ième de $\mathscr{A}$ est décrit dans Žerovnik (1999).

Théorème VII.9 – WANG-REC-GEN-FIX par l'algèbre des chemins

Le problème WANG-REC-GEN-FIX a une complexité en $\mathcal{O}(h)$ pour une hauteur h fixée, c'est-à-dire de coût constant en utilisant l'approche par l'algèbre des chemins.

Cette nouvelle approche par l'algèbre des chemins permet aussi, comme nous l'avons mentionné ci-avant, d'améliorer l'efficacité de l'algorithme du théorème VII.6 (p. 127) concernant la résolution du problème de la bande bi-infinie $\mathfrak{B}_h$ pour une hauteur h fixée (WANG-h-BANDE). On obtient également un algorithme à coût constant en $\mathcal{O}(h)$.

Enfin, il a été démontré récemment que lorsque la hauteur du rectangle est arbitrairement grande et faisant partie de la donnée, de l'ordre de 2^n, le problème WANG-REC-GEN est beaucoup plus complexe puisqu'il est PSPACE-complet (Schwarzentruber, 2019).

On va maintenant restreindre davantage le problème en s'intéressant à la complexité du problème de Wang sur des rectangles $p \times q$ à bords monochromes distincts ou non.

3.4 Complexité du problème de Wang sur les rectangles $p \times q$ à bords monochromes

On note par la suite WANG-REC-k-MONOCHROME avec $k = \{1, 2, 3, 4\}$ correspondant au problème de Wang sur des rectangles $p \times q$ avec un (resp. deux, trois, ou quatre) bord(s) monochrome(s) distinct(s) ou non.
WANG-REC-k-MONOCHROME s'énonce ainsi.

- *Instance*. Une collection $\mathcal{T}$ de tuiles de Wang, p et q deux entiers [19] et un (resp. deux, trois ou quatre) bord(s) monochrome(s).
- *Question*. Existe-il un pavage du rectangle de taille $p \times q$ avec un (resp. deux, trois ou quatre) bord(s) monochrome(s) par des tuiles de $\mathcal{T}$?

Le cas avec un bord monochrome

Tout d'abord le problème WANG-REC-1-MONOCHROME $\in \mathcal{NP}$ puisqu'il existe un vérificateur polynomial en la taille du rectangle qui permet de vérifier si une solution est valide. Nous allons à présent démontrer que ce problème est $\mathcal{NP}$-difficile en réduisant le problème WANG-REC-GEN, qui est $\mathcal{NP}$-complet, à ce dernier. Pour ce faire, on considère une collection $\mathcal{T}$ de $\#\mathcal{X} = k$ couleurs et un rectangle de p lignes et q colonnes. Pour avoir un bord monochrome, à gauche du rectangle par exemple, on ajoute une $(q+1)$-ieme colonne et une couleur $k+1$ dans la collection initiale telle que ces tuiles possèdent à l'OUEST la couleur $k+1$, la même couleur au NORD et au SUD pour pouvoir facilement empiler les tuiles verticalement sur cette colonne et enfin à l'EST, une couleur parmi les k couleurs afin de connecter notre colonne au bord OUEST du rectangle.
Ainsi, si on est capable de paver un rectangle $p \times q$, on est capable de paver un rectangle $p \times (q+1)$ en ajoutant une colonne avec des tuiles possédant la couleur $k+1$ à l'OUEST. En outre, si le pavage du rectangle $p \times (q+1)$ existe la seule façon de le paver est de construire la première colonne avec les tuiles ayant la couleur $k+1$ à l'OUEST car on veut la couleur $k+1$ sur le bord OUEST du rectangle et aucune autre tuile de la collection $\mathcal{T}$ ne possède cette couleur à l'OUEST. Par ailleurs, à partir de la deuxième colonne ces nouvelles tuiles ne peuvent pas apparaitre dans le pavage puisque il n'existe pas de tuile dans notre nouvelle collection qui possède la couleur $k+1$ à l'EST (figure VII.25). On vient ainsi de réduire, en temps polynomial, le problème WANG-REC-GEN au problème WANG-REC-1-MONOCHROME. Ce dernier est donc au moins aussi difficile que WANG-REC-GEN. La $\mathcal{NP}$-difficulté de WANG-REC-1-MONOCHROME vient donc d'être prouvée (figure VII.25). D'après ce qui précède, on a donc démontré le résultat ci-après.

19. codés en unaire.

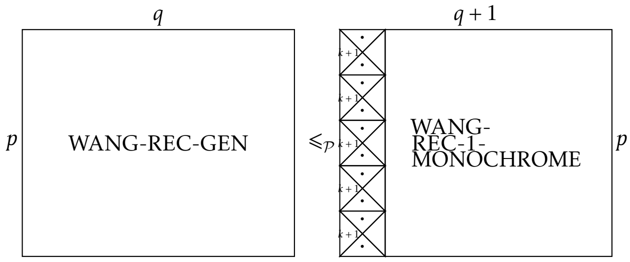


FIGURE VII.25 – *$\mathcal{NP}$-dureté, réduction polynomiale pour un bord monochrome à l'OUEST : WANG-REC-GEN $\leqslant_{\mathcal{P}}$ WANG-REC-1-MONOCHROME.*

Lemme VII.2 – WANG-REC-1-MONOCHROME

WANG-REC-1-MONOCHROME est $\mathcal{NP}$-complet.

Un raisonnement analogue sur le bord NORD ou SUD nous aurait également conduits à démontrer la $\mathcal{NP}$ complétude lorsque le bord NORD ou SUD est monochrome. Par exemple, pour avoir un bord NORD monochrome, il aurait fallu prendre une $(k+1)$-ième couleur pour construire un nouvel ensemble de tuiles avec des tuiles possédant la $(k+1)$-ième couleur au NORD, la même couleur à l'EST et à l'OUEST pour connecter les tuiles de la ligne construite et enfin des couleurs au SUD permettant de connecter la ligne avec le rectangle sur son bord NORD. Quoi qu'il en soit, pour n'importe quel bord monochrome, WANG-REC-1-MONOCHROME reste $\mathcal{NP}$-complet.

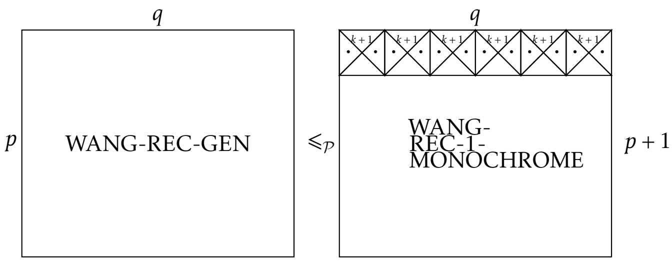


FIGURE VII.26 – *$\mathcal{NP}$-dureté, réduction polynomiale pour un bord monochrome au NORD : WANG-REC-GEN $\leqslant_{\mathcal{P}}$ WANG-REC-1-MONOCHROME.*

Le cas avec deux bords monochromes

Dans le cas de deux bords monochromes adjacents de la même couleur, nous réalisons en fait un raisonnement analogue au précédent et réduisons, cette fois-ci, WANG-REC-1-MONOCHROME au problème WANG-REC-2-MONOCHROME (figure VII.27 du haut). En outre, pour deux bords monochromes adjacents de la même couleur WANG-REC-2-MONOCHROME $\in \mathcal{NP}$ pour les mêmes raisons qu'évoquées précédemment. Finalement dans ce cas WANG-REC-2-MONOCHROME reste $\mathcal{NP}$-complet.

On aurait bien entendu pu choisir d'avoir un bord NORD monochrome mais de couleur différente du bord OUEST par exemple. Pour cela on aurait ajouté à notre collection initiale une nouvelle couleur $k+1$, disons rouge, à notre ensemble de k couleurs et on aurait raisonné de la même manière (figure VII.27 du bas). Dans tous les cas le problème de Wang sur des rectangles avec deux bords monochromes adjacents de couleur distincte ou non est donc $\mathcal{NP}$-complet.

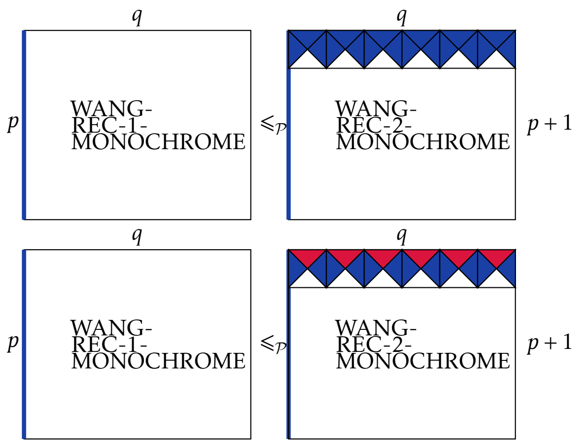


FIGURE VII.27 – $\mathcal{NP}$-dureté, réduction polynomiale pour deux bords monochromes adjacents distincts ou non : WANG-REC-1-MONOCHROME $\leqslant_{\mathcal{P}}$ WANG-REC-2-MONOCHROME.

A présent, nous allons regarder le problème dans le cas où les bords opposés sont monochromes de couleur distincte ou non. Dans le cas où les bords opposés sont monochromes et d'une couleur distincte le problème reste $\mathcal{NP}$-complet par une argumentation analogue à la précédente. En effet, il suffit d'ajouter une couleur $k+1$, disons rouge, à notre collection initiale de k couleurs de telle sorte que les nouvelles tuiles possèdent la couleur $k+1$ à l'EST et que cette couleur n'apparaisse dans aucune autre tuile à l'OUEST (figure VII.28).

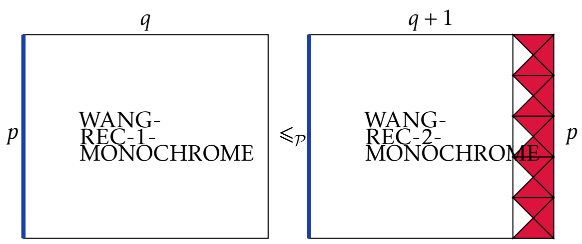


FIGURE VII.28 – $\mathcal{NP}$-dureté, réduction polynomiale pour deux bords monochromes opposés distincts : WANG-REC-1-MONOCHROME $\leqslant_{\mathcal{P}}$ WANG-REC-2-MONOCHROME.

Maintenant considérons un rectangle avec deux bords opposés d'une même couleur. D'après ce qui précède, on sait que le problème de Wang sur des rectangles avec deux bords opposés monochromes et de couleur distincte, reste $\mathcal{NP}$-complet. Ainsi, considérons à présent une collection initiale $\mathcal{T}$ telle que $\#\mathcal{X} = k$. À cette collection nous ajoutons des tuiles possédant la couleur $k+1$, disons rouge, de telle sorte que ces tuiles possèdent cette couleur à l'EST, au SUD et au NORD et une couleur bleue à l'OUEST afin de connecter la $(q+1)$-ième colonne construite, avec le rectangle $p \times q$ de couleur bleue à l'EST (figure VII.29). Si un pavage du rectangle $p \times q$ ayant deux bords monochromes EST-OUEST existe, alors on le prend et on ajoute une $(q+1)$-ième colonne construite avec la nouvelle tuile pour montrer l'existence d'un pavage du rectangle $p \times (q+1)$ ayant deux bords opposés d'une couleur différente.

De plus, si un pavage du rectangle $p \times (q+1)$ existe, alors la seule façon de le construire est d'ajouter la $(q+1)$-ième colonne avec la nouvelle tuile puisqu'on veut la couleur bleue à l'OUEST et la couleur $k+1$, qui est rouge, à l'EST. De plus, les q premières colonnes du rectangle $p \times q$ ne possèdent pas cette tuile et *a fortiori* de couleur $k+1$ (rouge), car aucune tuile de la collection ne possède des tuiles $\tau_{\mathcal{O}} = k+1$. Ainsi, s'il existe un pavage du rectangle $p \times (q+1)$, il existe forcément un pavage du rectangle $p \times q$ avec les bords EST-OUEST de couleur bleue.

Le problème de Wang sur des rectangles avec deux bords opposés de couleurs différentes étant $\mathcal{NP}$-complet, on vient de prouver ci-avant que le problème de Wang sur des rectangles avec deux bords opposés d'une même couleur reste également $\mathcal{NP}$-complet.

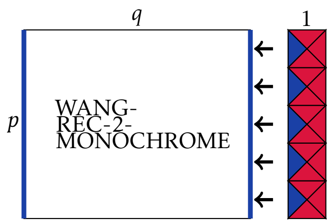


***Figure VII.29** – NP-complétude lorsque les bords opposés du rectangle sont d'une même couleur.*

Ainsi, on vient de prouver, dans tous les cas, le résultat suivant.

> **Lemme VII.3 – WANG-REC-2-MONOCHROME**
> WANG-REC-2-MONOCHROME est $\mathcal{NP}$-complet.

Le cas avec trois ou quatre bords monochromes

Nous ne détaillerons pas les preuves pour trois ou quatre bords monochromes de couleur distincte ou non. En effet, l'argumentation est analogue aux cas précédents. On démontre de la même manière que WANG-REC-3-MONOCHROME $\in \mathcal{NP}$ et WANG-REC-4-MONOCHROME $\in \mathcal{NP}$. Ensuite, pour prouver la $\mathcal{NP}$-dureté de ces deux problèmes, on effectue les réductions polynomiales suivantes :

- WANG-REC-2-MONOCHROME $\leqslant_{\mathcal{P}}$ WANG-REC-3-MONOCHROME
- WANG-REC-3-MONOCHROME $\leqslant_{\mathcal{P}}$ WANG-REC-4-MONOCHROME

Nous laissons le détail de ces preuves aux lecteurs et lectrices. On obtient ainsi le lemme suivant pour ces deux problèmes.

Lemme VII.4 – WANG-REC-3,4-MONOCHROME

WANG-REC-3-MONOCHROME et WANG-REC-4-MONOCHROME sont également $\mathcal{NP}$-complets.

Finalement les trois précédents lemmes (VII.2 ; VII.3 ; VII.4) nous permettent d'établir que le problème de Wang sur des rectangles avec un, deux, trois ou quatre bords monochromes de couleurs distinctes ou non est $\mathcal{NP}$-complet dans tous les cas.

Théorème VII.10 – WANG-REC-k-MONOCHROME

WANG-REC-k-MONOCHROME est $\mathcal{NP}$-complet pour $k = \{1, 2, 3, 4\}$.

Une autre piste de recherche, qui peut être vue comme un continuum, serait d'étudier la complexité du problème WANG-REC-k-MONOCHROME lorsque la collection de tuiles est limitée à un certain ensemble de couleurs $\mathcal{X}$ (par exemple $\#\mathcal{X} = 4$). Le problème est-il toujours aussi difficile ou existe-il un algorithme déterministe polynomial permettant de traiter ce problème ? Dans le prochain chapitre, nous étudierons ce problème avec $\#\mathcal{X} = 4$ voire lorsque $\#\mathcal{X} \geqslant 4$ mais tout en restreignant le problème pour une certaine famille de tuiles.

À noter que les tuiles de Wang sont utilisées notamment pour générer des textures et motifs en informatique graphique [20]. A cet effet, Derouet-Jourdan, Kaji et Mizoguchi (2019) ont exhibé un algorithmique linéaire, pour certaines familles de tuiles de Wang appelées *Brick Wang tiles*, qui permet de décider et résoudre, avec ces types de tuiles, le problème sur des régions arbitraires du plan avec des trous (WANG-BRICK).

.

20. Notons qu'il existe aussi d'autres variantes des pavages de Wang sur des régions finies comme le jeu des carrés de Mac Mahon ou encore la construction de l'*Eternity Puzzle*...

4 Univers des problèmes et espace-problème de Wang

Les problèmes que l'on a étudiés, à travers notre étude épistémologie, découlent de classes de problèmes plus généraux. En effet, cela concerne des problématiques de pavages du plan ou de régions (semi)-bornées du plan avec des collections de tuiles et dont les questions que l'on se pose sont de nature décisionnelle. C'est-à-dire, qu'en général, on se donne une collection finie de pavés et on se pose la question de savoir s'il existe un pavage du plan ou d'une région (semi)-bornée du plan par des isométries de ces pavés (PAVAGE). Les questions inhérentes à PAVAGE sont à l'interface entre des problèmes de décidabilité algorithmique (DEC-ALG) et des problèmes de complexité algorithmique (COM-ALG). [21] Nous décrivons ci-après, à un niveau global, l'univers $\Omega_{\mathbb{W}}$ contenu dans $\Omega_{\mathbb{P}}$ et centré sur des problèmes appartenant à PAVAGE où gravitent des problèmes connexes de COM-ALG et DEC-ALGO (figure VII.30). Bien entendu, nous n'avons pas la prétention de décrire de manière exhaustive $\Omega_{\mathbb{W}}$. Il est évident que d'autres ensembles de problèmes $\mathbb{P}$ gravitent autour de PAVAGE, DEC-ALG ou COM-ALG dans un voisinage plus ou moins proche. Par exemple, certains problèmes de PAVAGE sont étudiés d'un point de vue algébrique dans la théorie des groupes, d'autres utilisent un point de vue probabiliste à l'aide des marches aléatoires, enfin certains ont une approche ergodique en lien avec les systèmes dynamiques, notamment dans le cas des pavages apériodiques... De plus, l'étude des problématiques de pavages du plan ne se limite pas à la géométrie discrète ou euclidienne, elle s'étend également à d'autres types de géométrie comme la géométrie hyperbolique... Ainsi, la figure VII.30 présente l'espace-problème de Wang ($\Omega_{\mathbb{W}}$) dans l'univers des problèmes ($\Omega_{\mathbb{P}}$) centré sur trois classes de problèmes : PAVAGE, COM-ALG et DEC-ALGO, où gravitent d'autres classes dans un voisinage plus ou moins proche que nous n'expliciterons pas ici.

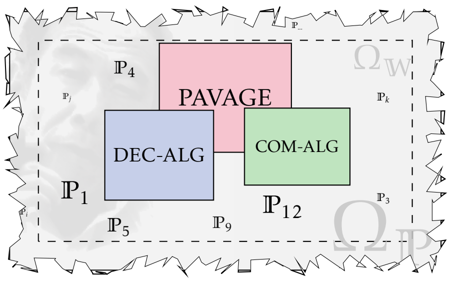


FIGURE VII.30 – *Fragment de l'espace des problèmes $\Omega_{\mathbb{P}}$ centré sur $\Omega_{\mathbb{W}}$ autour de PAVAGE, DEC-ALG et COM-ALG.*

21. Nous invitons le lecteur ou la lectrice à se référer, pour plus de détails, à la page 106 introduisant le problème de Wang.

5 Premier zoom sur l'espace-problème $\Omega_{\mathbb{W}}$

5.1 $\Omega_{\mathbb{W}}$ construit à partir de notre étude épistémologique et historique

Dans ce chapitre, nous avons réalisé une étude épistémologique et historique centrée sur et autour du problème Wang. Ce problème est, rappelons-le, un problème de pavages avec des pavés spécifiques que l'on appelle des tuiles et dont seules les translations sont autorisées. Au cours de notre étude, nous l'avons étudié sur différentes régions, en particulier le plan, les bandes bi-infinies et les rectangles conduisant à formuler WANG-PLAN, WANG-h-BANDE et WANG-REC-GEN.

WANG-PLAN est né d'un questionnement touchant la logique du premier ordre à travers des problèmes de satisfaisabilité de certaines classes de formules ($\forall\exists\forall$-SAT) qui se sont appuyés eux-mêmes sur des travaux majeurs dans le fondement de la théorie de la calculabilité (ENTSCHEIDUNGSPROBLEM et ARRÊT par exemple).

Dans le prolongement des questions de décidabilité, on s'est intéressé à la complexité algorithmique de WANG-h-BANDE pour $h > 0$ et WANG-REC-GEN ainsi qu'à leurs sous-problèmes. Nous avons vu que lorsque la hauteur faisait partie de la donnée ou que le rectangle avait une longueur arbitrairement grande dans les instances du problème, WANG-h-BANDE et WANG-REC-GEN étaient complets pour la classe PSPACE. Cette étude nous a permis aussi de montrer des liens avec d'autres problèmes comme CIRCUIT et CHEMIN. Cela nous a conduits à exhiber des algorithmes de coût polynomial, voire constant en utilisant une toute nouvelle approche, pour résoudre WANG-h-BANDE et WANG-REC-GEN à condition de fixer certains paramètres comme la hauteur de la bande bi-infinie ou du rectangle par exemple (voir WANG-REC-GEN-FIXE). Cette étude nous a aussi permis d'évoquer la réduction, par exemple, de WANG-REC-GEN à partir d'un autre problème $\mathcal{NP}$-complet connu comme 3-SAT pour montrer sa complétude pour la classe $\mathcal{NP}$.

Par la suite, nous avons voulu déterminer si ce problème était toujours au moins aussi difficile lorsque l'on se restreignait à des rectangles à bords monochromes (WANG-k-REC-MONOCHROME où $k \in \{1,2,3,4\}$). À cet effet, nous avons démontré que c'était bien le cas, puisque WANG-k-REC-MONOCHROME était aussi complet pour la classe $\mathcal{NP}$ pour chacune des valeurs de k.

Nous présentons le tableau[22] VII.5 résumant la complexité algorithmique en termes de classes de complexité de certains problèmes décidables évoqués dans le chapitre VII et au travers de la figure VII.31.

Problème	Classe de complexité algo.
WANG-REC-GEN	$\mathcal{NP}$-complet
WANG-REC-GEN (longueur arbitrairement grande)	PSPACE-complet
WANG-REC-GEN-FIXE	$\mathcal{P}$ voire cst en $\mathcal{O}(h)$
WANG-k-REC-MONOCHROME pour $k \in \{1,2,3,4\}$	$\mathcal{NP}$-complet
WANG-h-BANDE (pour $h > 0$ non fixé)	PSPACE-complet
WANG-h-BANDE (pour $h > 0$ fixé)	$\mathcal{P}$ voire cst en $\mathcal{O}(h)$
SAT	$\mathcal{NP}$-complet
k-SAT ($k \geqslant 3$)	$\mathcal{NP}$-complet
1-SAT et 2-SAT	$\mathcal{P}$
CIRCUIT	$\mathcal{P}$
CHEMIN	$\mathcal{P}$
WANG-BRICK	$\mathcal{P}$
SNAKE	PSPACE-complet

Tableau VII.5 – *Résumé de la classe de complexité algorithmique de certains problèmes décidables mentionnés dans notre étude épistémologique.*

22. Ce tableau ne se veut pas être exhaustif. Dans ce dernier, « cst » signifie « constant ». Enfin, la complexité algorithmique de SNAKE présentée dans ce tableau est donnée dans le cas où le problème est posé dans le plan entier et non dans le demi ou le quart de plan puisque dans ces deux derniers cas, le problème a été démontré indécidable (voir p. 118).

Les problèmes mentionnés ci-avant sont synthétisés dans l'espace-problème $\Omega_{\mathbb{W}}$ (figure VII.31) et le prochain paragraphe sera l'occasion de décrire les relations qu'entretiennent ces problèmes.

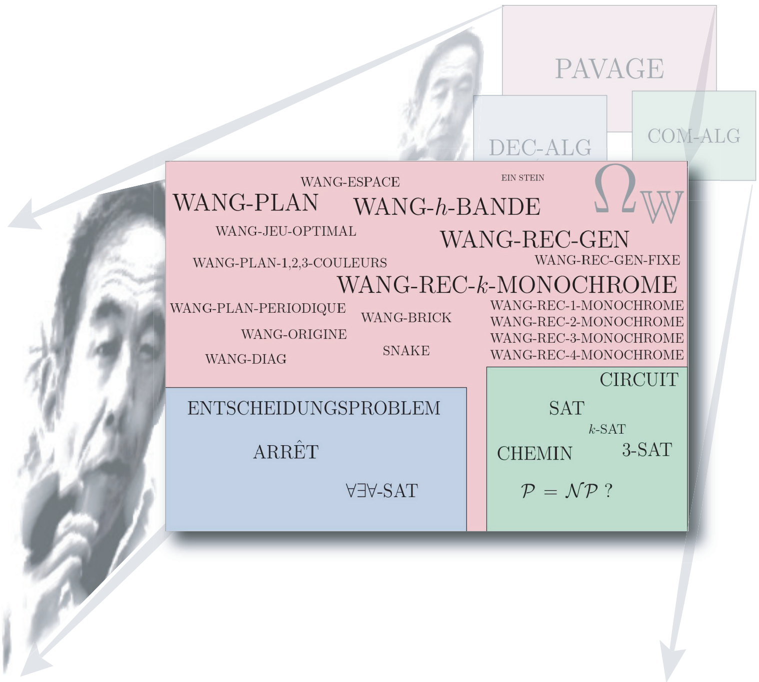


***Figure VII.31** – Premier zoom sur l'espace-problème $\Omega_{\mathbb{W}}$.*

5.2 Relations établies entre les problèmes grâce à notre étude épistémologique et historique

Il existe des relations de suffisances et de suffisances partielles entre les problèmes (figure VII.32) [23]. Par exemple, ARRÊT a permis de démontrer l'indécidabilité de l'ENTSCHEIDUNGSPROBLEM, de WANG-PLAN ou encore de WANG-ORIGINE et WANG-DIAG. Il a également permis d'établir l'indécidabilité de SNAKE dans le cadre du quart ou du demi-plan discret. L'indécidabilité de ces problèmes découle d'une réduction à partir d'ARRÊT. Par ailleurs, l'indécidabilité de WANG-PLAN a permis également de donner une autre preuve

23. Nous n'avons pas la prétention d'établir toutes les relations possibles entre ces problèmes mais uniquement ceux qui ont été décrits à travers notre étude épistémologique (chap. VII).

pour l'indécidabilité du problème ∀∃∀-SAT et a été une conséquence de l'indécidabilité de WANG-PLAN PERIODIQUE. Ainsi, on induit une proximité avec WANG-PLAN et ses variantes plus restrictives WANG-DIAG, WANG-ORIGINE et WANG-PLAN-PERIODIQUE.

De plus, la décidabilité de WANG-1,2,3-COULEURS a permis de restreindre la recherche de jeux apériodiques dans des collections de tuiles où $\#\mathcal{X} > 3$ ce qui a aidé dans la résolution de WANG-JEU-OPTIMAL. La relation entre WANG-1,2,3-COULEURS et WANG-JEU-OPTIMAL n'est que partiellement suffisante dans le sens qu'elle ne suffit pas pour résoudre intégralement WANG-JEU-OPTIMAL. Cette relation de suffisance partielle est également établie entre WANG-JEU-OPTIMAL et WANG-ESPACE.

CIRCUIT et CHEMIN sont deux problèmes proches et ont permis de résoudre WANG-h-BANDE dans le cas où la hauteur $h > 0$ est fixée et WANG-REC-GEN-FIXE. La $\mathcal{NP}$-complétude de WANG-REC-GEN a été démontrée, entre autres, grâce à une réduction polynomiale à partir de 3-SAT [24] comme nous l'avons signalé plus haut. On observe par conséquent une proximité dans entre WANG-REC-GEN-FIXE et WANG-h-BANDE pour une hauteur h fixée.

Enfin, nous avons réduit WANG-REC-GEN à WANG-REC-1-MONOCHROME pour démontrer la complétude de ce dernier dans la classe $\mathcal{NP}$. Nous avons ensuite déduit la $\mathcal{NP}$-complétude de WANG-REC-k-MONOCHROME pour chacune des valeurs de $k = 2, 3$ ou 4. Là aussi nous observons une proximité entre les problèmes WANG-REC-k-MONOCHROME, pour chaque valeur de k fixé.

Les différentes relations de suffisance et de suffisance partielle établies sont présentées ci-après (figure VII.32, p. 142).

À noter qu'on observe que WANG-BRICK et EIN STEIN n'ont pas de relation. En fait ces problèmes sont assez isolés puisque le premier concerne des types de tuiles de Wang très spécifiques et le deuxième, encore ouvert à ce jour, vise à déterminer l'existence ou non d'un unique pavé apériodique connexe. Attention, cela ne signifie pas pour autant que ces deux problèmes n'entretiennent pas de relations avec d'autres problèmes que nous n'avons pas décrits ici...

Le lecteur ou la lectrice remarquera également une relation de suffisance, décrite en rouge (figure VII.32), entre SAT et $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$?. Cette dernière se justifie par le fait que si on trouve un algorithme déterministe polynomial pour au moins un problème de la classe $\mathcal{NP}$, par exemple SAT, alors l'égalité entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{NP}$ s'avèrera être vraie. Cela signifie que si on sait vérifier efficacement (en temps polynomial) une solution donnée, on sait aussi la construire efficacement de manière déterministe. Ainsi tous les problèmes de $\mathcal{NP}$ et les problèmes complets dans $\mathcal{NP}$ seront « facilement » résolubles. En revanche, à ce jour bon

24. Pour $k > 2$, k-SAT et SAT sont aussi proches.

nombre de mathématiciens s'accordent sur le fait qu'il est peu probable qu'un tel algorithme existe avec les outils actuels et font l'hypothèse que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

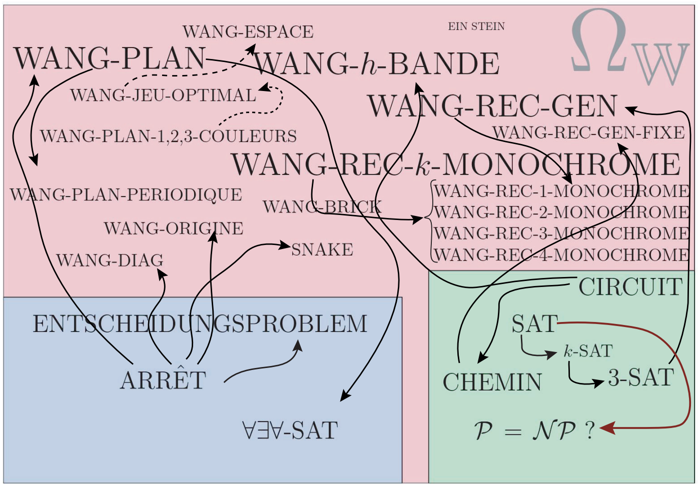


FIGURE VII.32 – Premier zoom sur l'espace-problème $\Omega_{\mathbb{W}}$ et relations de suffisance ou de suffisance partielle entre des problèmes $\mathscr{P}_i \in \Omega_{\mathbb{W}}$.

6 Conclusion et perspectives de recherche

À travers ce chapitre nous avons essayé de retracer succinctement les différentes avancées dans la recherche du problème de Wang (Wang, 1961). Initialement ce problème a été posé parce qu'il modélisait un problème de satisfaisabilité de la logique du premier ordre sous la forme d'un problème de pavage de $\mathbb{Z}^2$ (Wang, 1990). Wang (1961) a conjecturé, dans un premier temps, sa décidabilité qui a été, dans un second temps, réfutée par Berger (1964, 1966). En effet, Berger (1964) a démontré, par réduction du problème de l'arrêt des machines de Turing, que le problème de Wang était en fait un problème indécidable et cela a impliqué l'indécidabilité de certains problèmes de satisfaisabilité dans le calcul des prédicats. Par la suite, ce problème est devenu un problème de pavage en soi et les questions de recherche ont été orientées sur l'existence de jeux apériodiques. Effectivement, des années soixante jusqu'à nos jours, de nombreux mathématiciens se sont alors lancés dans une « course » à la recherche d'ensembles apériodiques de cardinalité de plus en plus faible (voir tableau VII.3, p. 125). Un premier jeu de tuiles de 20426 a été découvert par Berger (1964, 1966) dans sa preuve d'indécidabilité jusqu'à atteindre le nombre optimal de onze en 2015. Jeandel et

Rao (2015) ont en effet démontré que leur jeu de Wang à onze tuiles et quatre couleurs était le plus petit jeu de Wang apériodique possible (*ibid.*).

De manière analogue à la décidabilité du problème de Wang dans $\mathbb{Z}^2$, nous nous sommes intéressés à des questions de complexité algorithmique sur des régions (semi)-bornées de $\mathbb{Z}^2$ comme les bandes horizontales bi-infinies $(\mathfrak{B}_h)_{h>0}$ de hauteur h et les rectangles de taille $p \times q$. Nous avons montré que ces problèmes de décision restent dans les cas généraux — lorsque la hauteur et la longueur font parties des données — difficiles du point de vue de la théorie de la complexité algorithmique, puisqu'ils sont $\mathcal{NP}$-complet ou PSPACE-complet. Par exemple, le problème de Wang sur des rectangles $p \times q$ codés en unaire est $\mathcal{NP}$-complet (théorème VII.7, p. 130) et nous avons prouvé à cette occasion qu'il reste $\mathcal{NP}$-complet même en se restreignant à des bords monochromes de couleurs distinctes ou non (théorème VII.10, p. 136).

Cette étude épistémologique et historique va nous servir d'appui dans l'élaboration de nos ingénieries didactiques. En particulier, dans le cas du plan $\mathbb{Z}^2$, nous nous restreindrons à certaines familles de tuiles afin d'établir des CNS quant à la pavabilité de $\mathbb{Z}^2$ par ces tuiles, puisque le cas général est indécidable (Berger, 1966). Nous nous restreindrons, par exemple, à des familles de tuiles d'au plus deux couleurs par tuile dans un ensemble fini de couleurs $\mathcal{X}$, qui constitue un prolongement naturel du problème de Wang lorsque $\#\mathcal{X} = 2$ mais dont les preuves de la décidabilité restent trop techniques (Hu et Lin, 2011). Notre étude se prolongera également dans le cas des bandes bi-infinies $(\mathfrak{B}_h)_{h>0}$ de hauteur h fixée puisque nous avons démontré que ce problème est « facile » d'un point de vue de la complexité algorithmique car polynomial (théorème VII.6, p. 127), voire de coût constant en utilisant une nouvelle approche par l'algèbre des chemins (théorème VII.9, p. 131 et remarque). De plus, le processus général dans la construction de ces pavages s'applique aussi sur des bandes particulières de faible hauteur fixée comme $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$ par exemple. Enfin, on s'intéressera aux rectangles $p \times q$ avec des bords monochromes. Bien que dans le cas général, nous avons démontré que ce problème est $\mathcal{NP}$-complet (théorème VII.10, p. 136), on verra qu'en nous restreignant à un type particulier de tuiles modulo un nombre fixé de couleurs, nous pourrons établir des CNS accessibles. Une analyse plus fine de ces problèmes, en vue de l'élaboration de nos situations, sera proposée dans le prochain chapitre (chap. VIII, p. 145).

Ce chapitre constitue donc les fondements épistémologiques des problèmes mathématiques qui seront à l'origine des ingénieries développées dans la suite de ce travail.

Chapitre VIII

Analyse mathématique du problème de Wang

Ce chapitre est la suite de notre étude épistémologique et historique menée dans le précédent chapitre. Il se situe donc toujours à un niveau épistémologique mais dans un spectre plus proche des situations de recherche développées à la suite de cette analyse. Dans ce chapitre, nous allons nous centrer spécifiquement autour de trois problèmes mathématiques liés au problème de Wang.

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser au problème de Wang sur des régions discrètes et bornées de $\mathbb{Z}^2$ telles que des rectangles avec certaines contraintes monochromes sur les bords et une collection particulière de tuiles (WANG-REC-MONO-PART). À cette occasion, nous rappelons que nous avons démontré, lors de notre étude épistémologique, que le problème de pavages de rectangles ayant des contraintes monochromes (WANG-REC-k-MONOCHROME) sur les bords était $\mathcal{NP}$-Complet. Nous proposons une version plus restrictive en utilisant une collection de tuiles d'exactement quatre couleurs (i.e. $\#\mathcal{X} = 4$) pour un certain type de tuiles et nous nous intéresserons à des questions d'existence de pavages de rectangles de taille quelconque avec des contraintes de coloration monochrome aux bords (WANG-REC-MONO-PART). Ces résultats nous permettront d'établir une CNS pour paver tous les types de rectangle identifiés (WANG-∀-REC-MONO-PART). Cette partie sera aussi l'occasion de prolonger ce problème et de donner un résultat plus général pour un ensemble de couleurs de cardinalité $\#\mathcal{X} \geqslant 4$ (WANG-∀-REC-MONO-PART *).

Dans un second temps, nous allons nous intéresser au problème de Wang tel qu'il est le plus communément rencontré dans la littérature, c'est-à-dire autour de problématiques de pavages du plan discret $\mathbb{Z}^2$ (WANG-PLAN) ou de régions semi-bornées (WANG-h-BANDE) . Notre étude épistémologique nous amène à conduire une réflexion liée à la problématique de pavages de bandes bi-infinies pour une hauteur $h > 0$ fixée. En particulier, on s'intéressera à la problématique de pavages de bandes de hauteur $h = 1$ (WANG-1-BANDE) ou 2 (WANG-2-BANDE) et verrons qu'en fait la stratégie adoptée, dans le cas de ces bandes, est théoriquement généralisable lorsque $h > 2$. Ceci nous permettra également, au regard du *concept-problème* et en particulier de l'*espace-problème*, de mettre en relation certains problèmes connexes, liés à l'existence et à la recherche de circuits dans des graphes orientés, ayant une certaine proximité avec les différentes versions du problème de Wang. Enfin, ce questionnement se poursuivra dans le plan, à cette occasion, nous avons vu que le problème de Wang dans $\mathbb{Z}^2$ était indécidable (WANG-PLAN). Dans un souci d'accessibilité, nous traiterons cette problématique du plan en nous restreignant à certaines familles $\mathscr{F}_i$ de tuiles d'au plus deux couleurs par tuile parmi un ensemble $\mathcal{X}$ fini de couleurs afin d'obtenir des propriétés et des théorèmes (CNS) accessibles sur ces dernières (WANG-PLAN-$\mathscr{F}_i$, où $i = 1, 2$ ou 3).

1 Le problème de Wang sur des rectangles à bords monochromes pour un certain type de tuiles

Le problème de Wang sur des rectangles de tailles $p \times q$ [1] (WANG-REC-GEN) a été démontré comme étant $\mathcal{NP}$-Complet. Lors de notre analyse épistémologique, nous avons également démontré que le problème de Wang sur des rectangles à bords monochromes (WANG-REC-k-MONOCHROME où $k = \{1, 2, 3, 4\}$) reste également $\mathcal{NP}$-Complet grâce à différentes réductions polynomiales à partir de WANG-REC-GEN et WANG-REC-k-MONOCHROME pour un certain k. Ainsi, de manière générale, le problème WANG-REC-k-MONOCHROME est difficile d'un point de vue de la complexité algorithmique. Nous allons de fait restreindre le problème à une certaine collection de tuiles que nous proposons de présenter ci-après afin d'établir des CNS sur ce problème.

> **Définition VIII.1 – Collection $\mathcal{T}$ et $\#\mathcal{X} = 4$**
> On considère une collection complète $\mathcal{T}$ de tuiles de Wang d'exactement quatre couleurs distinctes pour chaque tuile dans un ensemble de couleurs $\mathcal{X}$ de cardinalité quatre.

Le terme « complète » signifie que l'on dispose de toutes les tuiles de quatre couleurs distinctes que l'on peut construire dans un ensemble $\mathcal{X}$ de quatre couleurs. Autrement dit, c'est le nombre de 4-arrangements dans un ensemble de quatre éléments, ce qui revient en fait à dénombrer le nombre de permutations possibles. Ainsi, avec un ensemble de quatre couleurs et en disposant de quatre

1. p et q codés en unaire.

couleurs distinctes par tuile, on peut donc construire un ensemble de $4! = 24$ tuiles (figure VIII.1), qui à rotation près, peut être regroupé en un ensemble de six tuiles.

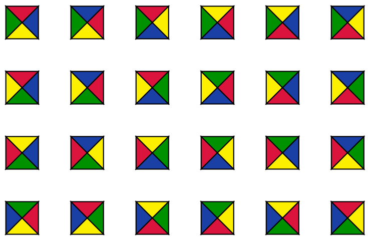


Figure VIII.1 – *La collection $\mathcal{T}$ de vingt-quatre tuiles de Wang pouvant être générée, à rotation près, à partir des six tuiles disposées sur l'une des lignes de la figure.*

On propose donc de regarder, avec cette collection $\mathcal{T}$ particulière, le problème de Wang sur des rectangles avec des conditions aux bords monochromes noté WANG-REC-MONO-PART.

- *Instance*. Des entiers $p \times q$ non nuls et notre collection $\mathcal{T}$ de tuiles de Wang.
- *Question*. Est-il possible de paver un rectangle de taille $p \times q$ dont les bords sont monochromes avec des tuiles de $\mathcal{T}$?

De prime abord, on peut commencer par constater que le rectangle, s'il est pavable et respecte la condition de couleur monochrome sur les bords, a nécessairement des bords colorés d'une des couleurs de la collection de tuiles, à savoir jaune, vert, rouge ou bleu dans notre cas.
Ensuite, il suffit de remarquer que chaque tuile de la collection possède exactement quatre couleurs distinctes qui sont celles mentionnées précédemment. Ainsi, on peut déjà exclure certains rectangles qui ne pourront jamais être pavés par des tuiles de cette collection, et cela, quelle que soit la taille du rectangle. En effet, les rectangles qui possèdent au moins deux bords adjacents de la même couleur ne seront pas pavables puisqu'il n'existe aucune tuile de $\mathcal{T}$ possédant deux fois la même couleur sur une tuile. Ainsi, aucune des tuiles de la collection ne pourra paver les coins d'un rectangle dont les bords adjacents sont d'une même couleur (figure VIII.2).

Figure VIII.2 – *Exemples de rectangles non pavables par des tuiles de $\mathcal{T}$.*

En éliminant les cas des rectangles ayant des bords adjacents d'une même couleur, on restreint le problème WANG-REC-MONO-PART à trois types de rectangles à bords monochromes [2] (figure VIII.3) :

2. Le choix des couleurs sur les bords est arbitraire.

- des rectangles dont les bords opposés sont deux à deux d'une même couleur ;
- des rectangles dont deux bords opposés sont d'une même couleur et les deux autres d'une couleur différente ;
- des rectangles dont les quatre bords sont d'une couleur distincte des autres.

On peut bien entendu affiner certaines conditions initiales portées sur les entiers p et q. Effectivement, pour les rectangles qui possèdent la même couleur sur les bords opposés, il est nécessaire d'avoir une longueur supérieure ou égale à deux unités entre chacun des deux bords. Cela se justifie par le fait qu'aucune des tuiles de $\mathcal{T}$ ne possède deux fois la même couleur sur une tuile.

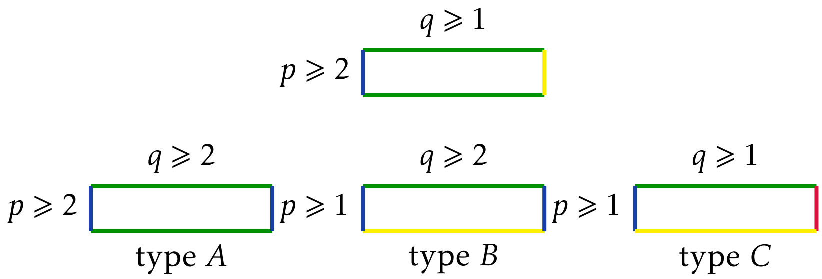


***Figure* VIII.3 –** *Les trois types de rectangle du problème WANG-RECTANGLE.*

Ainsi le problème WANG-REC-MONO-PART peut se décomposer en trois sous-problèmes de pavage : WANG-RECTANGLE-A pour les rectangles de type A, WANG-RECTANGLE-B pour les rectangles de type B et enfin WANG-RECTANGLE-C pour les rectangles de type C. On adoptera pour la suite les conventions suivantes.

Définition VIII.2 – Convention pour les types de rectangle

On note :
- $\mathscr{R}^{A}_{p\times q}$ le rectangle de taille $p\times q$ de type A (bords opposés 2 à 2 d'une même couleur) ;
- $\mathscr{R}^{|B|}_{p\times q}$ le rectangle de taille $p\times q$ de type B (bords EST-OUEST de la même couleur) ;
- $\mathscr{R}^{\overline{B}}_{p\times q}$ le rectangle de taille $p\times q$ de type B (bords NORD-SUD de la même couleur).
- $\mathscr{R}^{C}_{p\times q}$ le rectangle de taille $p\times q$ de type C (bords de couleurs distinctes).

Avant de regarder ces problèmes dans leur généralité, nous proposons de regarder ce qui se passe sur quelques cas particuliers.

1.1 Quelques cas particuliers d'existence et d'impossibilité

De manière générale on constate, quel que soit le type de rectangle choisi, qu'il est soit possible d'exhiber des pavages valides pour certaines tailles de rectangles fixées, soit qu'il semble impossible d'un réaliser un. Par exemple, sur des rectangles de type C, on démontre sur des cas particuliers qu'il existe au moins un motif valide $\mathfrak{M}$ respectant les conditions aux bords du rectangle (figure VIII.4).

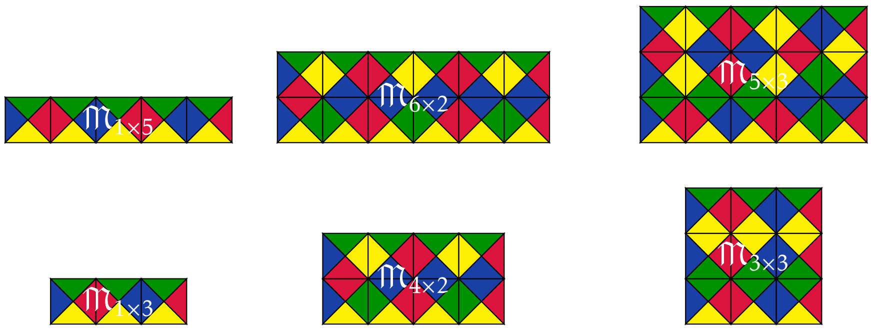


***Figure* VIII.4 –** *Exemples de pavages valides pour des rectangles de type C.*

Par contre, certaines tailles de rectangle de ce type ne semblent pas pavables. C'est le cas pour les tailles des rectangles 1×4 et 2×3 par exemple. Pour démontrer cette impossibilité, un raisonnement par forçage permet de s'en convaincre. En effet, supposons que le rectangle de type C de taille 2×3 admette un pavage valide respectant la condition aux bords du rectangle. En raisonnant par conditions nécessaires sur les couleurs des tuiles, on s'aperçoit alors que l'on a nécessairement la configuration de gauche de la figure VIII.5, puisque les couleurs des bords étant fixées, il ne reste qu'un seul choix possible pour paver la colonne de gauche du rectangle. En poursuivant le raisonnement par conditions nécessaires, on aboutit à une contradiction puisque la dernière tuile à poser doit nécessairement avoir deux couleurs jaune au NORD et au SUD (figure VIII.5 à droite). Ceci est impossible puisque cette tuile n'appartient pas à la collection $\mathcal{T}$. Ainsi il est impossible de paver un rectangle 2×3 de type C. Nous laissons la possibilité au lecteur ou à la lectrice de se convaincre de l'impossibilité à paver un rectangle de type C de taille 1×4.

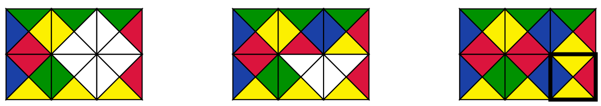


***Figure* VIII.5 –** *Preuve d'impossibilité pour le rectangle 2×3 de type C.*

Ainsi l'étude de « petits » cas particuliers permet de formuler une première conjecture pour les rectangles de type C, qui donne une CNS sur les entiers p et q pour obtenir un pavage valide de type C.

Conjecture VIII.1 – WANG-RECTANGLE-C

Soient $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$, $\mathscr{R}^{C}_{p\times q}$ est pavable $\Leftrightarrow$ $p \equiv q\,[2]$.

Dans un souci de ne pas surcharger la lecture de ce paragraphe, nous faisons le choix de ne pas développer d'autres cas particuliers sur des rectangles d'autres types (A et B). Cela aurait conduit, modulo des conditions différentes sur les entiers p et q, à formuler également d'autres conjectures sur ces rectangles que nous établirons dans la suite de notre étude.

En outre, avant de mettre à l'épreuve la validité de notre conjecture, nous faisons le choix de restreindre le problème WANG-REC-MONO-PART à des bandes de taille $1 \times q$ et $2 \times q$ voire $3 \times q$ de différents types. Ce choix nous semble intéressant à étudier et nous verrons à cette occasion que le raisonnement par forçage reste pertinent même pour des bandes rectangulaires de longueur quelconque.

1.2 Le cas des bandes de taille $1 \times q$

Dans un premier temps en nous positionnant dans le cadre des rectangles de type A et de taille $1 \times q$, on montre qu'il est impossible d'exhiber un pavage valide et ce quelle que soit la longueur de la bande. En effet, nous avons établi au début de ce chapitre une première condition initiale sur la largeur nécessaire de ce type de rectangle pour qu'il soit susceptible d'être pavable. Il faut que $p > 1$ ce qui n'est pas le cas pour cette bande puisque $p = 1$. Il est donc impossible de paver une bande rectangulaire de type A et de taille $1 \times q$. Ainsi nous venons d'établir de résultat suivant.

Propriété VIII.1 – Rectangle de type A de taille $1 \times q$

Pour tout entier $q \geqslant 2$, le pavage de $\mathscr{R}^{A}_{1\times q}$ est impossible.

Ensuite dans le cas des bandes de type B, on s'aperçoit que seule la bande possédant des bords EST-OUEST de la même couleur est susceptible d'être pavable. L'autre ayant les bords NORD-SUD de la même couleur et une largeur de 1, il est donc impossible d'exhiber un pavage valide, pour les même raisons qui ont été évoquées précédemment. De plus, on observe par construction des premiers motifs qu'il n'y a qu'un seul et unique choix pour paver cette bande. En effet, pour paver une bande de taille $1 \times q$, on a pas d'autre choix que d'utiliser le motif de taille 1×2 de la figure VIII.6 et de le translater autant de fois que nécessaire pour construire un pavage valide. Sa longueur est alors nécessairement paire puisque si elle était impaire le pavage ne pourrait pas se terminer par la couleur bleue à l'EST. Ainsi, il faut et il suffit que q soit pair pour exhiber un pavage valide de la bande $1 \times q$ de type B.

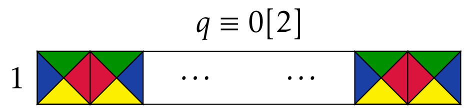


***FIGURE* VIII.6 –** *CNS pour les rectangles $1 \times q$ de type B.*

Propriété VIII.2 – Rectangle de type B et de taille $1 \times q$

Soit $q \geqslant 2$ un entier. $\mathscr{R}^{|B|}_{1\times q}$ est pavable $\Leftrightarrow$ $q \equiv 0\,[2]$.

Cette CNS établie, on en déduit donc qu'il est impossible de paver un rectangle $1 \times q$ de type C avec q pair puisque ce pavage finirait nécessairement par une couleur bleue à l'EST de la bande et c'est clairement impossible dans le cas de ces rectangles. En outre, si q est impair, il suffit de translater $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ le motif de base 1×2 pour compléter les $q-1$ premières cases et enfin compléter la dernière case par l'unique tuile possédant la couleur rouge à l'EST, bleue à l'OUEST, jaune au SUD et verte au NORD (figure VIII.7). Notons que l'on aurait tout aussi bien pu répéter le motif de base $\lceil \frac{q}{2} \rceil$ fois pour remplir les $q+1$ cases et ôter la dernière case, ce qui nous aurait donné également le même pavage valide.

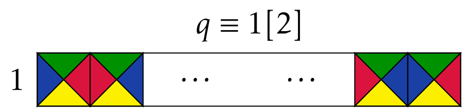


***FIGURE* VIII.7 –** *CNS pour les rectangles $1 \times q$ de type C.*

Propriété VIII.3 – Rectangle de type C et de taille $1 \times q$

Soit $q \geqslant 2$ un entier. $\mathscr{R}^{C}_{1\times q}$ est pavable $\Leftrightarrow$ $q \equiv 1\,[2]$.

Ainsi, nous venons d'établir des CNS sur l'entier q pour pouvoir paver des bandes $1 \times q$ de types $|B|$ et C tout en démontrant l'impossibilité de construire un pavage pour les rectangles de type A et $\overline{B}$. Dans le prochain paragraphe nous allons nous intéresser aux cas des bandes de taille $2 \times q$.

1.3 Le cas des bandes de taille $2 \times q$

Nous avons vu au début de ce chapitre que des conditions initiales portées sur les entiers p et q étaient nécessaires pour que les pavages des rectangles soient susceptibles d'exister. Ainsi, pour les rectangles de type A, on peut commencer la construction d'un premier motif à partir d'un carré de taille 2×2 ayant d'une part, la même couleur à l'EST et à l'OUEST et d'autre part, une autre même couleur au NORD et au SUD. Ainsi, si q est pair, il suffit de le translater $\frac{q}{2}$ fois pour paver une bande de largeur deux et de longueur p (figure VIII.8).

$q \equiv 0[2]$

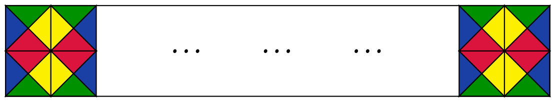
2 

***Figure VIII.8** – Existence d'un pavage pour le rectangle $2 \times q$ de type A avec q pair.*

On aurait pu tout aussi bien se servir du résultat du rectangle $1 \times q$ de type B lorsque q est pair. En effet, grâce à une symétrie horizontale dont l'axe est l'un des bords NORD ou SUD du rectangle $1 \times q$, on aurait pu démontrer l'existence d'un pavage valide pour le rectangle $2 \times q$ de type A et prouver ainsi la CS pour q pair.

$q \equiv 0[2]$

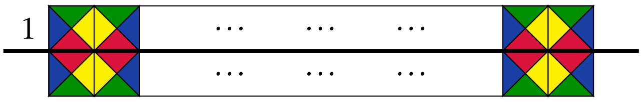
1 

***Figure VIII.9** – Existence d'un pavage pour le rectangle $2 \times q$ de type A avec q pair à partir de la réflexion d'un rectangle $1 \times q$ de type $|B|$.*

Cette condition suffisante portée par l'entier q est-elle une condition nécessaire pour paver un rectangle de taille $2 \times q$ de type A ? En fait non puisqu'il est également possible de construire un pavage valide lorsque q est impair. En effet, il suffit pour cela de se servir du motif de base de taille 2×2 et de le translater horizontalement $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1$ fois. On construit ainsi un pavage des $q - 3$ premières colonnes. Il reste ensuite à paver les 3 dernières colonnes avec un motif de taille 2×3 respectant les conditions aux bords des rectangles de type A. Un tel motif existe bel et bien (figure VIII.10).

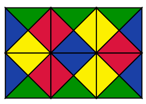


***Figure VIII.10** – Existence d'un pavage pour le rectangle 2×3 de type A.*

L'existence du motif 2×3 étant démontrée, par réunion du motif de taille $2\times(q-3)$, construit à partir du motif de base 2×2, et du motif de taille 2×3 ci-dessus, on démontre ainsi l'existence d'un pavage valide de type A lorsque q est impair.

$q \equiv 1[2]$

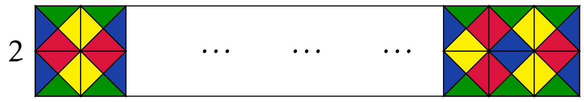


Figure VIII.11 – *Existence d'un pavage pour le rectangle $2\times q$ de type A avec q pair.*

Nous venons ainsi de démontrer le résultat suivant.

Propriété VIII.4 – Rectangle de type A de taille $2\times q$

Quel que soit $q \geqslant 2$, il est toujours possible de paver $\mathscr{R}^{A}_{2\times q}$.

Pour construire un rectangle $2\times q$ de type B ayant des bords EST-OUEST de la même couleur, on peut utiliser une stratégie analogue à la précédente. Il suffit en effet de construire un motif de base 2×2 respectant les conditions aux bords de ce type rectangle. Ensuite, si p est pair, on le translate $\frac{p}{2}$ fois. On obtient ainsi un pavage valide du rectangle $2\times q$ de type B ayant des bords EST-OUEST de la même couleur. Ainsi, on vient de démontrer que la condition q pair est une CS pour paver des rectangles $2\times q$ de type B dont les bords EST-OUEST sont d'une même couleur (figure VIII.12).

$q \equiv 0[2]$

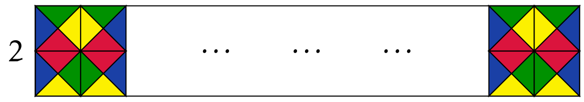


Figure VIII.12 – *Existence d'un pavage pour le rectangle $2\times q$ de type B ayant des bords EST-OUEST d'une même couleur avec q pair.*

Cette CS est en réalité également une CN pour paver ce type de rectangle $2\times q$. Supposons qu'un tel pavage existe pour ces rectangles avec q impair. On observe que la couleur jaune est alors nécessairement sur le bord SUD du rectangle. De fait, il ne peut pas y avoir de couleur jaune au NORD des tuiles de la première bande puisque il y a nécessairement quatre couleurs distinctes par tuile et que la couleur jaune est déjà utilisée. Pour ces raisons, il ne peut pas y avoir non plus de couleur jaune au SUD des tuiles de la bande située au-dessus. De plus, la couleur verte est nécessairement sur le côté NORD des tuiles de la deuxième bande. Ainsi, si le pavage existe, on a nécessairement une alternance de couleurs bleue et jaune au niveau des bords EST-OUEST des tuiles de la deuxième bande.

La couleur bleue étant obligatoirement située à l'OUEST de la première tuile de la deuxième bande, on aura nécessairement, par alternance de ces couleurs, une couleur jaune à l'OUEST des tuiles situées sur une case d'abscisse impaire. Ceci permet de conclure sur le fait qu'un rectangle de taille $2 \times q$ avec q impair se terminera forcément par une tuile ayant une couleur jaune à l'EST, ce qui est impossible pour ce type de rectangle. Il est donc impossible de construire un pavage valide pour ce rectangle ayant une longueur q impaire.

Propriété VIII.5 – Rectangle de type $|B|$ de taille $2 \times q$

Soit $q \geqslant 2$ un entier. $\mathscr{R}_{2\times q}^{|B|}$ est pavable $\Leftrightarrow$ $q \equiv 0\,[2]$.

Pour les rectangles de même type mais cette fois-ci avec des couleurs identiques au NORD et au SUD, on démontre qu'il existe toujours un pavage valide, et ce, quelle que soit la parité de l'entier q. Pour ce fait il suffit de reprendre une stratégie analogue au rectangle $2 \times q$ de type A en partant d'un motif de base 2×2 de type A. En répétant ce motif autant de fois que nécessaire, on exhibe un pavage de type A de longueur paire. Il reste ensuite à ôter la dernière colonne de ce pavage pour démontrer l'existence d'un pavage valide lorsque q est impair (figure VIII.13.a).

Là encore on aurait pu se servir du résultat de l'existence d'un pavage du rectangle $1 \times q$ de type C, qui, par symétrie axiale sur le bord SUD du rectangle nous aurait permis de montrer l'existence d'un pavage d'un rectangle $2 \times q$ type $\underline{\overline{B}}$ lorsque q est impair.

Lorsque q est pair, on peut en partant de ce même motif de base 2×2 construire, par translation, un pavage des $q - 2$ colonnes et compléter les 2 dernières colonnes par un carré 2×2 de type B ayant des bords NORD-SUD d'une même couleur. Ainsi, on vient de démontrer qu'il existe également un pavage valide lorsque le rectangle a une longueur paire (figure VIII.13.b).

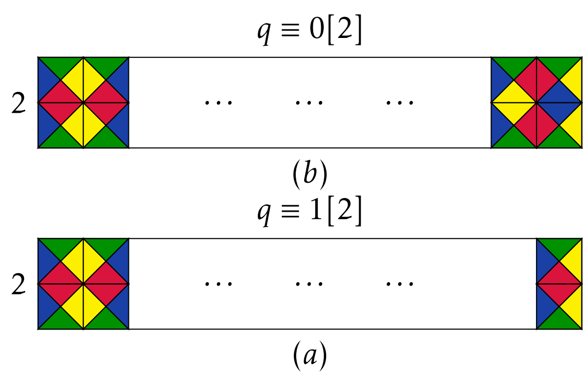


FIGURE VIII.13 – Existence d'un pavage du $2 \times q$ de type $\underline{\overline{B}}$.

Propriété VIII.6 – Rectangle de type $\overline{B}$ de taille $2 \times q$

Quel que soit $q \geqslant 2$, il est toujours possible de paver $\mathscr{R}^{\overline{B}}_{2\times q}$.

L'étude du cas des rectangles $2 \times q$ de type C, nous conduit à adopter des stratégies analogues aux précédentes. Pour montrer l'existence d'un pavage lorsque q est pair, on peut partir là encore d'un motif $2{\times}2$ de type B avec les bords EST-OUEST d'une même couleur qu'il suffit ensuite de translater horizontalement $\left(\frac{q}{2} - 1\right)$ fois pour paver les $q-2$ première colonnes. Il reste alors à construire un motif de taille 2×2 de telle sorte que ce dernier motif puisse être concaténé avec la bande $2 \times (q-2)$, tout en respectant les autres conditions de colorations aux bords. Ce motif 2×2 existe bien et c'est en fait un carré de type C (figure VIII.14).

$q \equiv 0[2]$

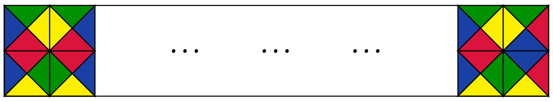
2 

***Figure* VIII.14 –** *Existence d'un pavage du $2 \times q$ de type C pour q pair.*

On aurait pu également permuter les couleurs rouge et bleu sur la deuxième colonne du carré 2×2 de gauche (figure VIII.15). On aurait ensuite construit un autre carré 2×2 ayant des bords EST-OUEST de couleur rouge que l'on aurait pu translater pour recouvrir le rectangle de longueur paire. Notons qu'en réalité si nous avions fait le choix de permuter les couleurs rouge et bleu de la dernière colonne du rectangle 2×4, on aurait ainsi exhibé un motif rectangulaire qui nous aurait permis d'obtenir une CS plus faible ($q \equiv 0\,[4]$) sur les rectangles de type $|B|$ que celle que nous avons déjà établie (voir propriété VIII.5, p. 154).

$q \equiv 0[2]$

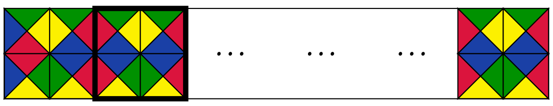
2 

***Figure* VIII.15 –** *Existence d'un pavage du $2 \times q$ de type C pour q pair avec un autre motif de base.*

La CS « q pair » est dans ce cas également une CN. La preuve de cette CN repose sur un raisonnement par forçage identique à celui évoqué dans le cas des rectangles de type $|B|$. En effet, il suffit de remarquer que si le rectangle $2 \times q$ possède un pavage valide lorsque q est impair alors la couleur jaune située sur la deuxième bande horizontale $1 \times p$ apparaît forcément à l'OUEST ou à l'EST des tuiles. En particulier pour toute case « d'abscisse » impaire, cette couleur est située nécessairement à l'EST. Ainsi si q est impair la couleur de la dernière tuile aura nécessairement du jaune à l'EST et cela est impossible pour les rectangles de type C. Ainsi « q pair » est une CNS pour paver un rectangle $2 \times q$ de ce type.

Propriété VIII.7 – Rectangle de type C de taille $2 \times q$

Soit $q \geqslant 2$ un entier, $\mathscr{R}^{C}_{2\times q}$ est pavable $\Leftrightarrow$ $q \equiv 0\,[2]$.

L'étude exhaustive des bandes $1\times q$ et $2\times q$ nous permet d'une part de renforcer notre premier idée sur la conjecture VIII.1 établie pour les rectangles de type C à partir de cas particuliers, à savoir que ces rectangles sont pavables, si et seulement si, les entiers p et q sont de même parité.

En outre et à ce stade de l'analyse nous pouvons formuler une deuxième conjecture relative aux rectangles de type A.

Conjecture VIII.2 – WANG-RECTANGLE-A

Soient $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$, $\mathscr{R}^{A}_{p\times q}$ est pavable $\Leftrightarrow$ $pq \equiv 0\,[2]$.

Les rectangles de type B semblent avoir une CNS analogue à la précédente avec des conditions plus fortes sur les entiers p et q et cette condition semble différente lorsque l'on se place dans un rectangle de type $|B|$ ou $\overline{\underline{B}}$.

Conjecture VIII.3 – WANG-RECTANGLE-B

Soient $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$,

- $\mathscr{R}^{\overline{\underline{B}}}_{p\times q}$ est pavable $\Leftrightarrow$ $(p \in 2\mathbb{N} \wedge q \in 2\mathbb{N}) \vee (p \in 2\mathbb{N} \wedge q \notin 2\mathbb{N})$.
- $\mathscr{R}^{|B|}_{p\times q}$ est pavable $\Leftrightarrow$ $(p \in 2\mathbb{N} \wedge p \in 2\mathbb{N}) \vee (p \notin 2\mathbb{N} \wedge q \in 2\mathbb{N})$.

Dans tous les cas, si la conjecture VIII.3 est vraie cela impliquera que si l'on a un produit pq pair, alors il existera toujours au moins un pavage valide de type B qui pourra être soit d'un sous-type $|B|$ ou $\overline{\underline{B}}$ lorsque p et q sont pairs, soit de type $|B|$ ou exclusif $\overline{\underline{B}}$ lorsqu'une et une seule des deux longueurs est impaire.

Avant de développer le cas général et prouver ou rejeter nos conjectures, nous pensons qu'il est intéressant de regarder succinctement le cas des rectangles $3\times q$ afin de s'apercevoir que dans certains types de rectangles le raisonnement par forçage pour démontrer une impossibilité devient rapidement coûteux à mettre en place.

1.4 Quelques remarques pour les bandes $3 \times q$

Dans le cas des rectangles de type A et de taille $3 \times q$ il est possible de prouver l'impossibilité à paver cette bande lorsque q est impair. En effet, il suffit de remarquer que les bords NORD-SUD sont d'une même couleur, disons verte, il est donc impossible, si un tel pavage existe, que les tuiles situées sur la deuxième ligne puissent avoir la couleur verte au NORD (resp. au SUD) car sinon les tuiles du dessus (resp. dessous) auraient alors nécessairement deux fois la même couleur verte sur les tuiles. Ceci est évidemment impossible puisqu'il y a quatre couleurs distinctes pour chaque tuile de $\mathcal{T}$. La couleur verte est donc située nécessairement à l'EST ou à l'OUEST des tuiles de la deuxième ligne. Le fait de commencer la deuxième ligne par une couleur bleue à l'OUEST nous oblige à positionner la couleur verte à l'EST de cette première tuile. Par construction, on montre que lorsque q est impair alors la deuxième ligne aura nécessairement la couleur verte à l'EST (figure VIII.16). Ceci est impossible pour le rectangle de type A, puisqu'il doit avoir des bords EST-OUEST d'une même couleur, ici bleue.

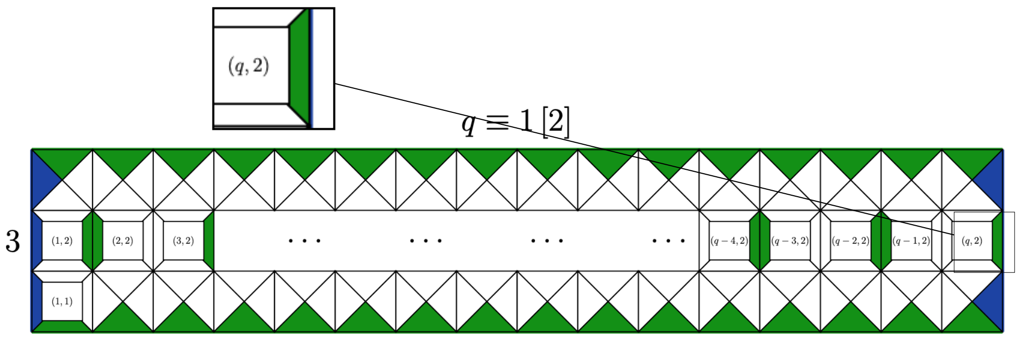


FIGURE VIII.16 – *Impossiblité de paver un rectangle $3 \times q$ de type A lorsque q est impair.*

En utilisant le rectangle 2×3 de type A de la figure VIII.11 (p. 153) et en effectuant une rotation d'un quart de tour, quitte à permuter les couleurs vertes et bleues pour avoir les mêmes couleurs aux bords, on obtient ainsi un rectangle 3×2 de type A (figure VIII.17). Cette procédure est correcte puisque rappelons tout de même que la collection $\mathcal{T}$ possède toutes les tuiles ayant exactement les quatre couleurs.

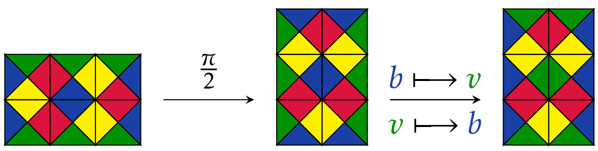


FIGURE VIII.17 – *Existence d'un pavage 3×2 de type A*

Il suffit alors de translater le motif de droite $\frac{q}{2}$ fois pour paver une bande $3 \times q$ lorsque q est pair (figure VIII.17) . Ainsi on vient de démontrer l'existence d'un pavage de type A pour les rectangles $3 \times q$ avec q pair.
D'après ce qui précède, la condition « q pair » est une CNS pour les rectangles $3 \times q$ de type A et vient conforter la conjecture VIII.2 établie dans la section précédente.

Propriété VIII.8 – Rectangle de type A de taille $3 \times q$

Soit $q \geqslant 2$ un entier, $\mathscr{R}^A_{3\times q}$ est pavable $\Leftrightarrow$ $q \equiv 0\,[2]$.

Par contre, si l'on se place dans le cas des rectangles $3 \times q$ de type C le raisonnement par forçage amène à traiter des sous-cas qui croissent assez rapidement lorsque q prend des valeurs de plus en plus grandes. Pour s'en convaincre, on va présenter une preuve d'impossibilité pour le rectangle 3×4 utilisant d'une part le raisonnement par forçage et d'autre part un raisonnement par disjonction des cas.

Pour faciliter la lecture nous introduisons un repère du quart du plan discret, dont chaque case peut être identifiée par ses coordonnées entières $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$. Par convention le coin en bas à gauche de la grille est repéré par le couple de coordonnées $(1, 1)$.

Définition VIII.3 – Notation pour repérer une tuile sur une grille discrète

On note $\tau(i, j)$ une tuile de $\mathcal{T}$ placée à la i-ème colonne et la j-ème ligne sur la grille. Pour préciser l'une des couleurs de la tuile τ, on utilisera un indice avec une lettre désignant un des quatre points cardinaux (N, S, E, O).

Par exemple sur cette grille $\tau_E(3,4) = v$ et $\tau_N(3,4) = j$, où j et v désignent évidemment la couleur jaune et la couleur verte de la tuile $\tau(3,4)$ à l'EST et au NORD.

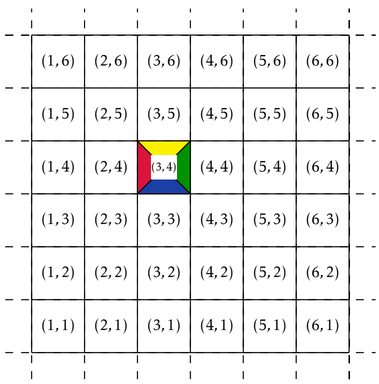
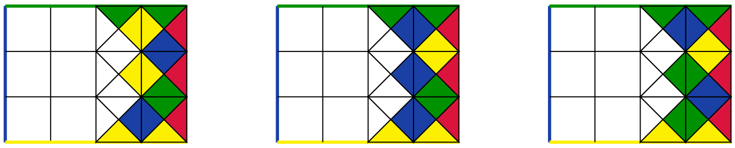


FIGURE VIII.18 – Grille à coordonnées entières et une tuile τ en position $(3, 4)$.

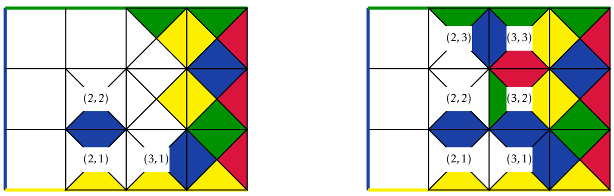
En supposant qu'un pavage du rectangle 3×4 de type C existe, on a alors nécessairement l'une des trois configurations suivantes. À noter que l'on aurait pu également raisonner sur les deux premières colonnes et l'analyse nous aurait conduits à la même conclusion.



1er cas 2e cas 3e cas

***Figure* VIII.19 –** *Etude de cas pour le rectangle 3×4 de type C.*

Pour le premier cas, comme la couleur du bord OUEST du rectangle est bleue et celle du SUD est jaune et d'après la coloration de la tuile $\tau(3,1)$, on en déduit que nécessairement $\tau_S(2,1) = j$ et $\tau_N(2,1) = b$. Ainsi, $\tau_S(2,2) = b$ (figure VIII.20.1). D'après ce qui précède, ceci nous amène à déduire que $\tau_S(2,3) \neq b$ et $\tau_O(2,3) \neq b$. De plus, le bord NORD du rectangle étant vert, on en déduit donc que nécessairement $\tau_E(2,3) = b$ et donc que $\tau_O(3,3) = b$. On a donc nécessairement $\tau_S(3,3) = r$ puisque la tuile $\tau(3,3)$ possède déjà les trois autres couleurs. Ainsi, $\tau_N(3,2) = r$ et comme $\tau(2,2)$ possède déjà une couleur bleue, la couleur $\tau_O(3,2) \neq b$, elle est donc forcément verte d'après ce qui précède, donc $\tau_O(3,2) = v$. Ainsi, $\tau_S(3,2) = b$ puisque les trois autres couleurs sur la tuile sont déjà fixées. Ce qui conduit à avoir $\tau_N(3,1) = b$, ce qui est absurde puisque $\tau_E(3,1) = b$ (figure VIII.20.2). Ceci est évidemment impossible puisque la tuile $\tau(3,1)$ ne peut pas posséder deux fois la même couleur. Le premier cas n'est donc pas pavable.



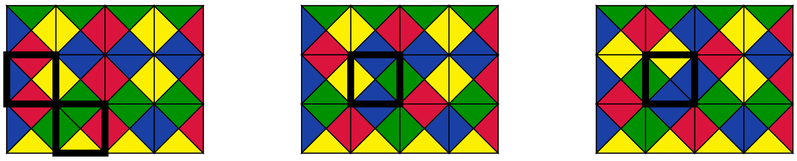
(1) (2)

***Figure* VIII.20 –** *Etapes du raisonnement par forçage pour le premier cas.*

Un raisonnement analogue pour le deuxième et troisième cas nous permet de démontrer que le pavage du rectangle 3×4 de type C est impossible, puisqu'aucun des trois cas présentés ne permet de construire un pavage valide avec des tuiles de $\mathcal{T}$.

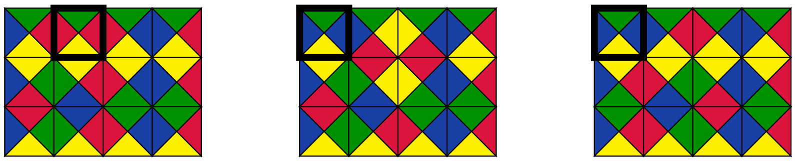
Un raisonnement plus exhaustif nous aurait conduits à traiter d'autres sous-cas qui nous auraient amenés à une absurdité, c'est à dire à « forcer » la pose d'une tuile $\tau \notin \mathcal{T}$ (figure VIII.21, cases en gras).

- 1^{er} cas :



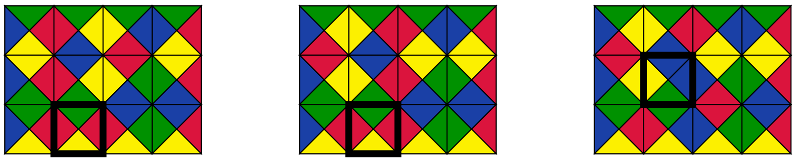
1.1 1.2 1.3

- 2^{e} cas :



2.1 2.1 2.1

- 3^{e} cas :



3.1 3.2 3.3

Figure VIII.21 – *Traitement des sous-cas pour le rectangle* 3×4 *de type C.*

En fait, lorsqu'on essaie d'exhiber un pavage valide, on part d'une position où l'on a le plus de contraintes, puis on place une autre tuile en vérifiant bien les conditions d'adjacence aux bords des tuiles et/ou du rectangle et on continue jusqu'à que l'on soit bloqué, c'est-à-dire lorsqu'il n'existe plus de tuile de $\mathcal{T}$ vérifiant les conditions d'adjacence. Dans ce cas, on revient en arrière pour tester d'autres configurations. Intuitivement ce processus ressemble à un type de programmation bien connu de type *branch and bound* où l'on teste la validité d'un motif au fur et à mesure de l'avancée dans la construction du pavage tout en en élimant les cas qui ne fonctionnent pas, quitte à revenir en arrière (*backtracking*).

Comme nous venons de le voir précédemment, le raisonnement par forçage ou par exhaustivité des cas a des limites puisque le nombre de sous-cas à traiter grandit lorsque p et q deviennent de plus en plus grands. Naïvement pour démontrer l'inexistence d'un pavage valide pour un rectangle $p \times q$ d'un certain type en utilisant une technique de type *backtracking*, il faudrait faire une recherche exhaustive afin d'énumérer tous les pavages possibles et tester leur validité (condition d'adjacence des tuiles et aux bords du rectangle) afin de s'assurer que l'ensemble de solutions est vide. Ceci nous assurerait de l'inexistence d'un tel pavage...Néanmoins, la complexité de ce type d'algorithme est exponentielle, de l'ordre de $\mathcal{O}(\#\mathcal{T}^{p\times q})$ où $\#\mathcal{T}$ est le cardinal de la collection $\mathcal{T}$.

Dans le prochain paragraphe, nous adopterons une autre stratégie pour démontrer l'impossibilité de paver certains types de rectangles de taille quelconque et mettrons à l'épreuve les trois conjectures établies précédemment.

1.5 Vers une généralisation pour les rectangles de taille $p \times q$

Nous avons vu auparavant une stratégie qui consiste à construire un motif carré de base ayant certaines propriétés aux bords permettant, lorsque les bords EST-OUEST sont d'une même couleur, de le translater horizontalement pour paver un rectangle dont la hauteur est fixée par la taille du motif initial. Ainsi, nous avons vu par exemple qu'en partant du motif 2×2 de type A on peut construire un pavage pour les rectangles de type A et de taille $2 \times q$ lorsque q pair. Remarquons que les bords NORD-SUD du rectangle ainsi construit étant identiques, nous pouvons alors le translater jusqu'à paver un rectangle de type A et de taille $p \times q$ avec p également pair. En effet, il suffit pour cela de répéter verticalement le pavage du rectangle précédemment construit $\frac{p}{2}$ pour obtenir l'existence d'un pavage pour tout rectangle de type A avec p et q pairs. Cet algorithme est polynomial voire linéaire en $\mathcal{O}(p+q)$ et permet la construction d'un pavage valide lorsque p et q sont tous les deux pairs.

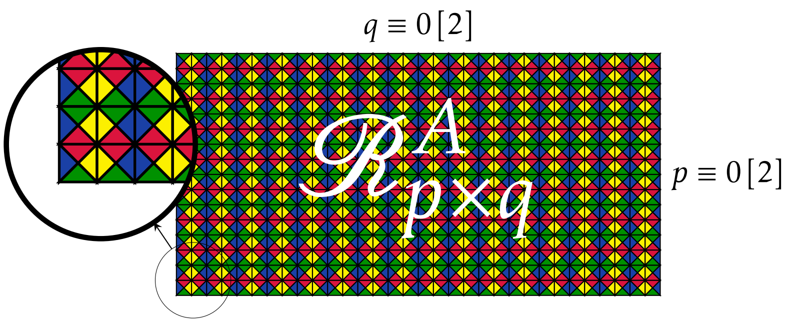


FIGURE VIII.22 – Construction d'un pavage valide pour le rectangle de type A de taille $p \times q$ avec p et q pairs.

On pose q' comme étant la largeur du rectangle. L'existence d'un pavage valide lorsque p est pair et q' est impair se démontre de manière analogue par des procédés de construction et de déconstruction d'objets. À partir du pavage précédent il suffit de retirer les deux dernières colonnes (figure VIII.23, p. 162).

On construit alors un motif 2×3 ayant la couleur bleue à l'EST et à l'OUEST et la couleur verte au NORD et SUD. On peut ainsi construire, par translations verticales de ce même motif, un pavage de taille $p \times 3$, qui, par concaténation avec le motif $p \times (q-2)$ permet de construire un pavage valide pour le rectangle $p \times q'$ où $q' = q + 1$ est impair puisque q était pair (figure VIII.23, p. 162).

Sans partir du pavage précédent on aurait également pu utiliser l'algorithme de construction pour le rectangle $2 \times q'$ lorsque q' est impair. En effet, par translations verticales de ce rectangle ; on aurait démontré l'existence d'un pavage valide pour le rectangle $p \times q'$ avec p pair et q' impair.

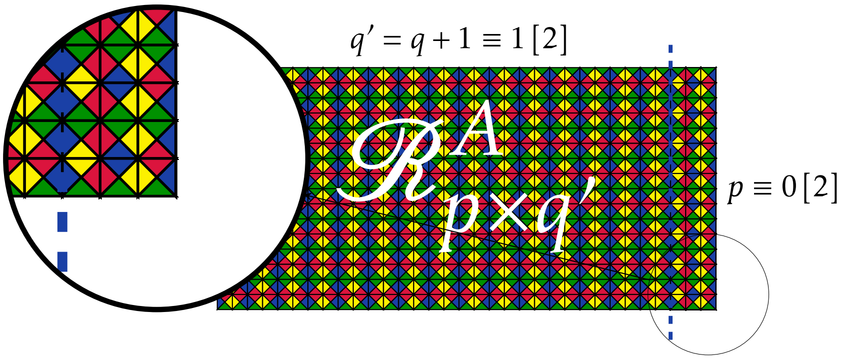


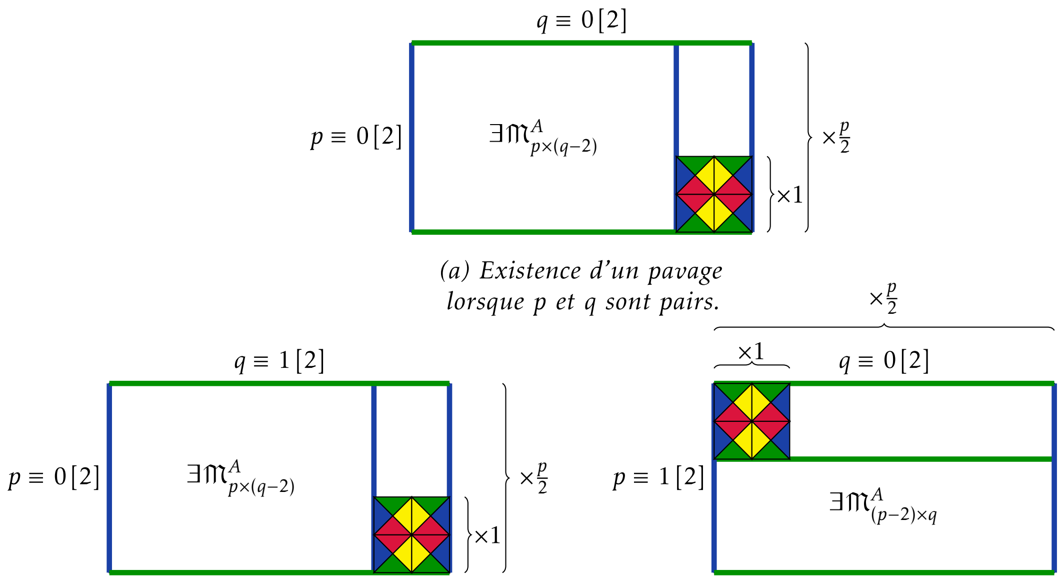
FIGURE VIII.23 – Construction d'un pavage valide pour le rectangle de type A de taille $p \times q$ avec p et q pairs.

En outre, comme on possède toutes les tuiles de quatre couleurs dans $\mathcal{T}$, on peut montrer également l'existence d'un pavage valide en effectuant une rotation d'un quart de tour sur le dernier pavage. Le pavage rectangulaire ainsi construit a une longueur paire et une largeur impaire. Pour avoir les mêmes couleurs sur les bords, il suffit alors de permuter les couleurs vertes et bleues dans chaque tuile du pavage et on construit ainsi un pavage valide pour le rectangle de type A avec les mêmes couleurs aux bords que précédemment. On vient donc de démontrer que la condition « $pq \equiv 0\,[2]$ » est une CS pour paver un rectangle de type A.

Les preuves que nous avons données sont en plus constructives puisque l'on a donné un algorithme de construction par itérations. Pour prouver la CS établie précédemment, on aurait également pu utiliser un raisonnement par récurrence descendante sur une classe d'objets en mettant en avant un contre-exemple minimal. Pour ce faire, supposons par exemple que p et q soient tous les deux pairs (figure VIII.24.a, le cas où un des deux est impair utilise une argumentation analogue). Supposons de plus que le rectangle de taille $p \times q$ soit le plus petit rectangle qui ne possède pas de pavage valide de type A. Ceci implique que tous les rectangles de plus petite taille qui possèdent les mêmes propriétés aux bords,

— à savoir les mêmes conditions de parité et de coloration sur les bords —, sont pavables. Ainsi, le rectangle $p \times (q-2)$ de type A possède bel et bien un pavage valide puisque les entiers p et $(q-2)$ sont aussi pairs. De plus, le rectangle $p \times 2$ restant est également pavable. Ainsi par concaténation des rectangles $p \times (q-2)$ et $p \times 2$, on montre l'existence d'un pavage valide de type A pour le rectangle $p \times q$. Ceci est en contradiction avec notre hypothèse de départ sur le fait que le rectangle $p \times q$ est le plus petit rectangle de type A ne possédant pas un pavage valide. Cette dernière est donc fausse, on en déduit donc que le rectangle $p \times q$ possède un pavage valide. Enfin, ce découpage est toujours possible jusqu'à atteindre le motif de type A et de taille 2×2 pour lequel un tel découpage n'est plus envisageable. Ce motif 2×2 constitue donc la base de notre induction.

Un raisonnement analogue aurait abouti à démontrer l'existence d'un pavage valide lorsque p et q sont d'une parité distincte (figures VIII.24.b et c). La base de l'induction aurait cependant été différente [3].



(a) Existence d'un pavage lorsque p et q sont pairs.

(b) Existence d'un pavage lorsque p est pair et q impair.

(c) Existence d'un pavage lorsque p est impair et q pair.

Figure VIII.24 – *Existence d'un pavage de type A par induction descendante sur une classe d'objets lorsque $pq \equiv 0\,[2]$.*

3. A noter qu'un raisonnement par induction plus direct, évitant de traiter des sous-cas, aurait pu être envisagé. Pour cela, il aurait suffi de considérer un rectangle de type A et d'aire paire, sans préciser comme avant les conditions de parité des entiers $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$...

Lemme VIII.1 – CS sur le rectangle $p \times q$ de type A

Soient $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$, si le produit de p par q est pair alors le rectangle $\mathscr{R}^A_{p\times q}$ est pavable par des tuiles $\mathcal{T}$.

À présent nous allons démontrer la réciproque du lemme énoncé précédemment. Autrement dit, prouver que la CS « $pq \equiv 0\,[2]$ » est également une CN. Pour ce faire nous allons introduire quelques notations.

Définition VIII.4

Soit $\mathcal{X} = \{b, j, v, r\}$ l'ensemble des couleurs de $\mathcal{T}$ et i un élément de $\mathcal{X}$,

(i) On note $\mathcal{N}_\triangle(i)$ le nombre de fois où la couleur $i \in \mathcal{X}$ apparaît dans le pavage.

(ii) On définit un triangle extérieur comme un triangle dont la base est sur un des bords du rectangle. On note ainsi $\mathcal{N}_{\triangle_{ext}}(i)$ le nombre de triangles extérieurs possédant la couleur $i \in \mathcal{X}$ au bord du rectangle.

(iii) De manière analogue, on définit un triangle intérieur comme un triangle dont les côtés ne sont pas sur un bord du rectangle, on note son nombre $\mathcal{N}_{\triangle_{int}}(i)$.

(iv) Afin d'éviter toute confusion et quand nous en aurons besoin, les nombres de triangles (extérieurs ou intérieurs) dans les rectangles de type A, B ou C seront notés $\mathcal{N}^A_\triangle(i)$, $\mathcal{N}^B_\triangle(i)$ et $\mathcal{N}^C_\triangle(i)$

De plus, on remarque que si le pavage est valide alors il possède exactement $p \cdot q$ tuiles donc $p \cdot q$ triangles colorés pour chacune des couleurs puisqu'il y a exactement quatre couleurs par tuile. En séparant le nombre de triangle d'une même couleur en deux ensembles disjoints de triangles intérieurs et extérieurs de la même couleur, on obtient l'égalité suivante :

$$\forall i \in \mathcal{X}, \quad \mathcal{N}_\triangle(i) = \mathcal{N}_{\triangle_{ext}}(i) + \mathcal{N}_{\triangle_{int}}(i) = p \cdot q$$

Or, si le pavage est valide alors nécessairement tous les triangles intérieurs sont adjacents à un autre triangle d'une même couleur. De ce fait, le nombre est nécessairement pair. Ainsi $\mathcal{N}_{\triangle_{int}}(i) \in 2\mathbb{N}$. De plus, le nombre de triangles extérieurs dépend du type de rectangle choisi mais aussi du choix de la couleur. Si par exemple on choisit un rectangle de type A et une couleur, disons rouge, qui n'apparaît pas sur les bords du rectangles alors $\mathcal{N}^A_{\triangle_{ext}}(r) = 0$. Ainsi, si le pavage existe alors nécessairement $\mathcal{N}^A_\triangle(r) = \mathcal{N}^A_{\triangle_{int}}(r) \in 2\mathbb{N}$, puisque $\mathcal{N}^A_{\triangle_{ext}}(r)$ est nul.

Ainsi, suivant si la couleur i fixée est sur l'un des bords du rectangle on obtient les cas suivants :

- pour un rectangle $\mathscr{R}^A_{p\times q}$ bien pavé, on a $\mathcal{N}^A_{\triangle_{ext}}(i) \in \{0, 2p, 2q\}$;
- pour un rectangle $\mathscr{R}^{|B|}_{p\times q}$ bien pavé, on a $\mathcal{N}^{|B|}_{\triangle_{ext}}(i) \in \{0, q, 2p\}$;

- pour un rectangle $\mathcal{R}^{\overline{B}}_{p\times q}$ bien pavé, on a $\mathcal{N}^{\overline{B}}_{\Delta_{ext}}(i) \in \{0, p, 2q\}$;
- pour un rectangle $\mathcal{R}^{C}_{p\times q}$ bien pavé, on a $\mathcal{N}^{C}_{\Delta_{ext}}(i) \in \{p, q\}$.

De manière générale, on obtient alors la propriété suivante.

Propriété VIII.9

Soit $i \in \mathcal{X}$, quel que soit le type de rectangle, si $\mathcal{R}_{p\times q}$ possède un pavage valide, alors le nombre $\mathcal{N}_{\Delta}(i)$ apparaît exactement $p \cdot q$ fois et on a,

$$\mathcal{N}_{\Delta}(i) = \underbrace{\mathcal{N}_{\Delta_{ext}}(i)}_{\in\{0,p,q,2p,2q\}} + \underbrace{\mathcal{N}_{\Delta_{int}}(i)}_{\in 2\mathbb{N}}$$

Comme on a démontré précédemment que $\mathcal{N}_{\Delta_{int}}(i) \in 2\mathbb{N}$, alors la parité de la somme des entiers $\mathcal{N}_{\Delta_{int}}(i)$ et $\mathcal{N}_{\Delta_{ext}}(i)$ ne dépend donc que de l'entier $\mathcal{N}_{\Delta_{ext}}(i)$. Dans ces conditions $\mathcal{N}_{\Delta}(i)$ et $\mathcal{N}_{\Delta_{ext}}(i)$ sont alors de même parité. Dans le cas où la couleur $i \in \mathcal{X}$ n'est sur aucun bord du rectangle on peut être plus fin puisque dans ce cas, $\mathcal{N}_{\Delta}(i) = \mathcal{N}_{\Delta_{int}}(i) \in 2\mathbb{N}$ car $\mathcal{N}_{\Delta_{ext}}(i)$ est nul. Ceci nous permet d'établir la propriété ci-après quel que soit le type de rectangle.

Propriété VIII.10

Soient $i \in \mathcal{X}$ et $\mathcal{R}_{p\times q}$ un rectangle d'un certain type possédant un pavage valide, on a alors $\mathcal{N}_{\Delta}(i) \equiv \mathcal{N}_{\Delta_{ext}}(i)\,[2]$

Raisonnons par l'absurde et supposons l'existence d'un pavage valide de type A pour le rectangle $p \times q$ lorsque $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$ sont simultanément impairs alors on a d'après la propriété VIII.9 (p. 165) :

$$\forall i \in \mathcal{X}, \quad \mathcal{N}^{A}_{\Delta}(i) = \mathcal{N}^{A}_{\Delta_{ext}}(i) + \mathcal{N}^{A}_{\Delta_{int}}(i) = p \cdot q \notin 2\mathbb{N}$$

En outre, comme le produit $p \cdot q$ est impair puisque p et q le sont et d'après la propriété précédente, si l'on fixe une couleur i_0 de $\mathcal{X}$ n'appartenant pas à l'un des bords du rectangle, alors $\mathcal{N}^{A}_{\Delta_{ext}}(i_0) = 0$ et on a donc $\mathcal{N}_{\Delta}(i_0) = \mathcal{N}_{\Delta_{int}}(i_0) \in 2\mathbb{N}$, donc $\mathcal{N}_{\Delta}(i_0) \in 2\mathbb{N}$. Ceci est absurde puisque l'on a supposé que p et q étaient simultanément impairs ce qui implique nécessairement que leur produit l'est aussi. L'hypothèse de départ est donc fausse. On en déduit donc qu'il n'existe pas de pavage valide pour les rectangles de type A lorsque $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$ sont simultanément impairs.

Un raisonnement analogue en fixant une couleur appartenant à un des bords du rectangle nous aurait conduits au même résultat. En effet, fixons $i_1 \in \mathcal{X}$ une des couleurs sur les bords du rectangle. Cette couleur apparaît donc nécessairement un nombre pair de fois sur les bords du rectangle, puisqu'elle apparait simultanément sur les bord EST-OUEST ou NORD-SUD. Ainsi, $\mathcal{N}_{\Delta_{ext}}(i_1) \in \{2p, 2q\}$.

D'après la propriété VIII.10, ceci impliquerait que $\mathcal{N}_{\triangle}(i_1)$ soit pair, ce qui est absurde puisque $p \cdot q$ est impair car p et q sont tous deux impairs. Il n'existe donc pas de pavage valide de type A avec $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$ impairs.

Lemme VIII.2 – CN sur le rectangle $p \times q$ de type A

Soient $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$, si le rectangle $\mathscr{R}^A_{p\times q}$ est pavable par des tuiles $\mathcal{T}$, alors les entiers p et q sont nécessairement non-simultanément impairs.

Ainsi nous venons de démontrer que la CS « $pq \equiv 0\,[2]$ » est également une CN pour paver des rectangles de type A et ainsi démontrer la conjecture VIII.2 énoncée pour les rectangles de A (p. 156).

Théorème VIII.1 – WANG-RECTANGLE-A

Soient $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$, $\mathscr{R}^A_{p\times q}$ est pavable $\Leftrightarrow$ $pq \equiv 0\,[2]$.

En outre si $p = q$ et si on pose $n = p$, on déduit directement une CNS quant à la pavabilité des carrés $n \times n$ de type A (WANG-CARRE-A).

Corollaire VIII.1 – WANG-CARRE-A

Soit $n \geqslant 2$, $\mathscr{R}^A_{n\times n}$ est pavable $\Leftrightarrow$ $n \equiv 0\,[2]$

Pour établir la CS sur le problème WANG-CARRE-A, on aurait pu utiliser une preuve algorithmique de construction similaire aux rectangles ou bien une preuve par induction descendante sur une classe d'objets. Pour cette dernière la partition du carré aurait été un peu différente que celle utilisée sur le rectangle pour montrer la CS (figure VIII.25). La CN quant à elle repose sur une argumentation analogue aux rectangles.

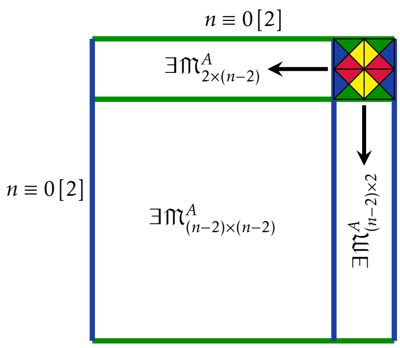


FIGURE VIII.25 – Existence d'un pavage carré de côté $n \geqslant 2$ pair et de type A par induction descendante sur une classe d'objets.

Pour les autres types de rectangles on va pourvoir traiter les CS plus rapidement en reprenant les résultats précédents et en utilisant une preuve par constructions et déconstructions d'objets.

En partant de la construction du pavage de taille $p \times q$ de type A lorsque p et q sont tous les deux pairs, il suffit alors de déconstruire la q-ième colonne pour obtenir un pavage de type $\overline{\underline{B}}$ de taille $p \times q'$ avec $q' = p - 1$ impair. La même procédure sur la p-ième ligne nous conduit à montrer l'existence d'un pavage valide mais cette fois-ci de type $|B|$ et de taille $p' \times q$ avec $p' = p - 1$ impair.

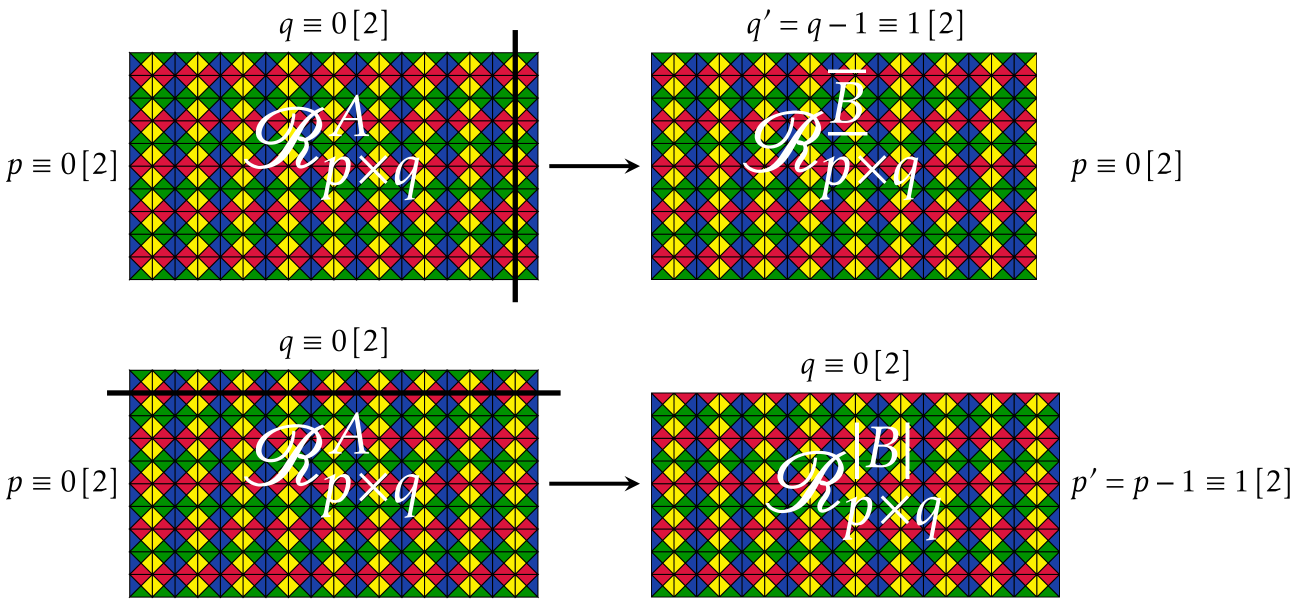


***Figure VIII.26** – Construction de pavages valides pour les rectangles de types $|B|$ et $\overline{\underline{B}}$ à partir d'un pavage de type A de taille $p \times q$ avec p et q pairs.*

Pour démontrer complètement la CS énoncée à la conjecture VIII.3 (p. 156), il reste à étudier l'existence d'un pavage lorsque p et q sont simultanément pairs. Pour ce faire, on peut s'appuyer sur l'existence d'un pavage de type A lorsque p est pair et q est impair (figure VIII.24 (b), p. 163). Il suffit, là encore, de déconstruire la q-ieme colonne pour démontrer l'existence d'un pavage de type $\overline{\underline{B}}$ de taille $p \times q'$ avec $q' = q - 1$ pair.

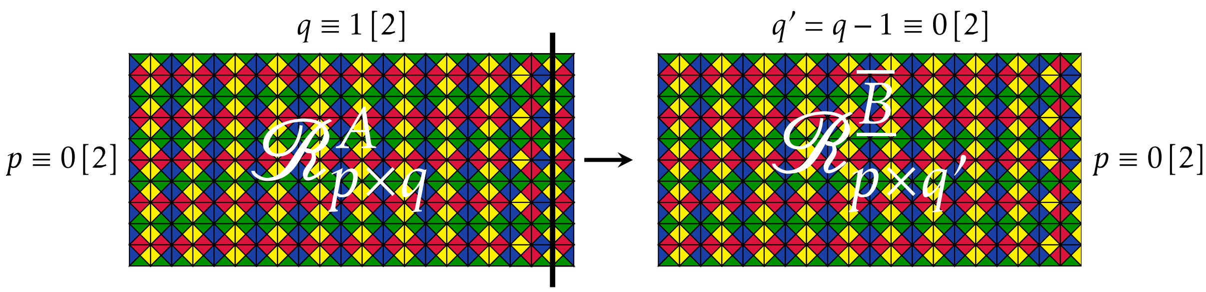


***Figure VIII.27** – Construction de pavages valides pour les rectangles de types $|B|$ et $\overline{B}$ à partir d'un pavage de type A de taille $p \times q$ avec p pair et q impair.*

Pour démontrer l'existence d'un pavage de type $|B|$ lorsque p et q sont simultanément pairs, il suffit de partir du pavage de type $\overline{B}$ construit précédemment et effectuer une rotation d'un quart de tour puisque toutes les tuiles de quatre couleurs sont dans $\mathcal{T}$ quitte à permuter les couleurs bleues et vertes pour avoir la couleur bleue à l'Est et à l'Ouest du rectangle.

Lemme VIII.3 – CS sur le rectangle $p \times q$ de type B

Soient $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$,

(i) Si p et q sont simultanément pairs ou si p est pair et q est impair alors, $\mathscr{R}^{\overline{B}}_{p\times q}$ est pavable par des tuiles $\mathcal{T}$.

(ii) Si p et q sont simultanément pairs ou si p est impair et q est pair alors, $\mathscr{R}^{|B|}_{p\times q}$ est pavable par des tuiles $\mathcal{T}$.

Là aussi on aurait pu utiliser une raisonnement par induction descendante sur une classe d'objets afin de démontrer l'existence d'un pavage suivant la parité des entiers p et q énoncée dans le résultat précédent.

Pour démontrer la réciproque du lemme précédent (i) et (ii) nous allons distinguer deux cas et leurs sous-cas.

(i) Le cas $\mathscr{R}^{\overline{B}}_{p\times q}$

- Supposons qu'il existe un pavage valide de type $\overline{B}$ lorsque p et q sont simultanément impairs. Dans ce cas il existe une couleur $i_o \in \mathcal{X}$ qui n'est pas sur un des bords du rectangle. De fait on a l'égalité suivante :

$$\mathcal{N}^{\overline{B}}_{\triangle}(i_0) = \mathcal{N}^{\overline{B}}_{\triangle_{int}}(i_0) = p \cdot q$$

Or, comme p et q sont impairs alors leur produit est également impair mais on a montré aussi que le nombre de triangles intérieurs, si le pavage existe, est nécessairement pair, donc l'entier $\mathcal{N}^{\overline{\underline{B}}}_{\Delta_{int}}(i_0) \in 2\mathbb{N}$ ce qui est absurde car un entier pair ne peut pas être également à un autre entier impair. Il n'existe donc pas de pavage valide de type $\overline{\underline{B}}$ lorsque p et q sont simultanément impairs.

- Supposons à présent qu'il existe un pavage valide de type $\overline{\underline{B}}$ lorsque p et impair et q est pair. Pour aboutir à une contradiction on fait le choix de choisir une couleur $i_1 \in \mathcal{X}$ qui apparaît sur le côté EST ou OUEST du rectangle bien pavé. On obtient alors l'égalité suivant :

$$\mathcal{N}^{\overline{\underline{B}}}_{\Delta}(i_1) = \mathcal{N}^{\overline{\underline{B}}}_{\Delta_{ext}}(i_1) + \mathcal{N}^{\overline{\underline{B}}}_{\Delta_{int}}(i_1) = p \cdot q$$

De plus, $\mathcal{N}^{\overline{\underline{B}}}_{\Delta_{ext}}(i_1)$ est impair puisque l'entier p l'est et comme on sait que l'entier $\mathcal{N}^{\overline{\underline{B}}}_{\Delta_{int}}(i_1)$ est pair alors leur somme est nécessairement impaire. Ceci est contradictoire avec le fait que l'entier $p \cdot q$ soit pair. Il n'existe donc pas de pavage valide de type $\overline{\underline{B}}$ lorsque p est pair et q est impair.

(ii) Le cas $\mathscr{R}^{|B|}_{p\times q}$

- Le raisonnement est analogue au précédent. Supposons qu'il existe un pavage valide de type $|B|$ lorsque p et q sont simultanément impairs. Dans ce cas il existe une couleur $i_o \in \mathcal{X}$ qui n'est pas sur un des bords du rectangle. De fait, on a l'égalité suivante :

$$\mathcal{N}^{|B|}_{\Delta}(i_0) = \mathcal{N}^{|B|}_{\Delta_{int}}(i_0) = p \cdot q$$

Or, comme p et q sont impairs alors leur produit est également impair mais on a montré aussi que le nombre de triangle intérieur, si le pavage existe, est nécessairement pair, donc l'entier $\mathcal{N}^{|B|}_{\Delta_{int}}(i_0) \in 2\mathbb{N}$ ce qui est absurde car un entier pair ne peut pas être également à un autre entier impair. Il n'existe donc pas de pavage valide de type $|B|$ lorsque p et q sont simultanément impairs.

- Supposons à présent qu'il existe un pavage valide de type $|B|$ lorsque p est pair et q est impair. Pour aboutir à une contradiction on fait le choix de choisir une couleur $i_1 \in \mathcal{X}$ qui apparaît sur le côté NORD ou SUD du rectangle bien pavé. On obtient alors l'égalité suivant :

$$\mathcal{N}^{\overline{\underline{B}}}_{\Delta}(i_1) = \mathcal{N}^{|B|}_{\Delta_{ext}}(i_1) + \mathcal{N}^{|B|}_{\Delta_{int}}(i_1) = p \cdot q$$

De plus, $\mathcal{N}^{|B|}_{\Delta_{ext}}(i_1)$ est impair puisque l'entier q l'est et comme on sait que l'entier $\mathcal{N}^{|B|}_{\Delta_{int}}(i_1)$ est pair alors leur somme est nécessairement impair. Ceci est contradictoire avec le fait que l'entier $p \cdot q$ soit pair. Il n'existe donc pas de pavage valide de type $|B|$ lorsque p est pair et q est impair.

Lemme VIII.4 – CN sur le rectangle $p \times q$ de type B

Soient $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$,

(i) Si $\mathscr{R}^{\overline{B}}_{p\times q}$ est pavable par des tuiles $\mathcal{T}$ alors p et q sont nécessairement simultanément pairs ou bien p est pair et q est impair.

(ii) Si $\mathscr{R}^{|B|}_{p\times q}$ est pavable par des tuiles $\mathcal{T}$ alors p et q sont nécessairement simultanément pairs ou bien p est impair et q est pair.

Les lemmes VIII.3 et VIII.4 précédemment démontrés nous permettent de valider la conjecture VIII.3 (p. 156. On a ainsi les CNS suivantes.

Théorème VIII.2 – WANG-RECTANGLE-B

Soient $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$,

- $\mathscr{R}^{\overline{B}}_{p\times q}$ est pavable $\Leftrightarrow$ $(p \in 2\mathbb{N} \wedge q \in 2\mathbb{N}) \vee (p \in 2\mathbb{N} \wedge q \notin 2\mathbb{N})$.
- $\mathscr{R}^{|B|}_{p\times q}$ est pavable $\Leftrightarrow$ $(p \in 2\mathbb{N} \wedge p \in 2\mathbb{N}) \vee (p \notin 2\mathbb{N} \wedge q \in 2\mathbb{N})$.

Ce résultat reste valable lorsque $p = 1$ et $q \geqslant 2$ dans le cas des rectangles de type $|B|$ et aussi, lorsque $p \geqslant 2$ et $q = 1$ dans le cas, cette fois-ci, des rectangles de type $\overline{\underline{B}}$.

Corollaire VIII.2 – WANG-RECTANGLE-B

Soient $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$, si le produit de p par q est pair, alors il existe toujours au moins un pavage valide pour le rectangle $\mathscr{R}^{B}_{p\times q}$ qui peut être du sous-type $|B|$ ou $\overline{\underline{B}}$.

Le « ou » utilisé dans le corollaire précédent n'est bien entendu pas un « ou exclusif » ici puisque l'existence d'un pavage valide est assuré même lorsque p et q sont simultanément pairs.

Du théorème précédent on déduit une CNS sur les carrés de taille $n \times n$ avec $n \geqslant 2$ (WANG-CARRE-B).

Corollaire VIII.3 – WANG-CARRE-B

Soit $n \geqslant 2$, $\mathscr{R}^{B}_{n\times n}$ est pavable $\Leftrightarrow n \equiv 0\,[2]$.

Dans le cas lorsque n est pair, on peut toujours exhiber un pavage valide de carrés de sous-types $|B|$ mais aussi $\overline{\underline{B}}$.

Il nous reste à traiter le cas des rectangles de type C, c'est-à-dire avec quatre couleurs monochromes et distinctes sur chacun des bords [4]. On peut là aussi partir se servir du pavage de type A lorsque p et q sont simultanément pairs. Il suffit alors d'ôter la p-ième ligne et la q-ième colonne pour démontrer l'existence d'un pavage valide de type C lorsque sa longueur et sa largeur sont toutes les deux impaires (figure VIII.28).

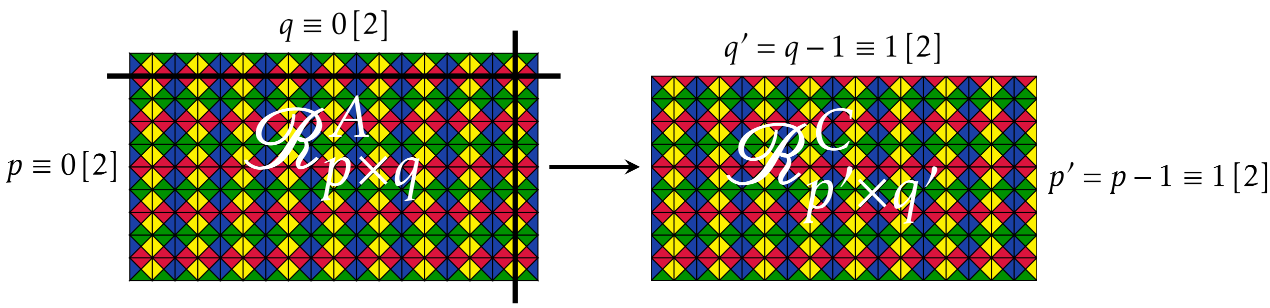


Figure VIII.28 – *Construction de pavages valides pour les rectangles de types C avec p et q impairs, à partir d'un pavage de type A de taille p × q avec p et q pairs.*

Cette stratégie permet au passage de donner des CS sur tous les types de rectangles concernant le problème WANG-REC-MONO-PART. En effet, à chaque étape de construction et de déconstruction on obtient une CS pour un certain type de rectangle. Prenons des entiers p et q simultanément pairs, on a :

$$\mathscr{R}^{A}_{p\times q} \longrightarrow \mathscr{R}^{\overline{B}}_{p\times(q-1)} \text{ ou} \longrightarrow \mathscr{R}^{|B|}_{(p-1)\times q} \longrightarrow \mathscr{R}^{C}_{(p-1)\times(q-1)}$$

On démontre donc que quelle que soit la parité de $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$ on peut toujours exhiber, pour un certain type de rectangles, au moins un pavage valide.

(i) Si p est pair et q est pair alors il existe au moins un pavage valide du rectangle $\mathscr{R}^{A}_{p\times q}$.

(ii) Si p est pair et q est impair alors il existe au moins un pavage valide du rectangle $\mathscr{R}^{\overline{B}}_{p\times q}$.

(iii) Si p est impair et q est pair alors il existe au moins un pavage valide du rectangle $\mathscr{R}^{|B|}_{p\times q}$.

(iv) Si p est impair et q est impair alors il existe au moins un pavage valide du rectangle $\mathscr{R}^{C}_{p\times q}$.

On obtient donc une solution non vide au problème WANG-REC-MONO-PART.

4. Vous trouverez une analyse fine de ce cas dans un article de Da Ronch, Gandit et Gravier (2020), voir aussi Bernat (2014) qui a écrit un papier indépendamment du problème de Wang.

Théorème VIII.3 – WANG-REC-MONO-PART
Soient $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$, quelle que soit la parité de p et q, il existera toujours au moins un pavage valide de rectangle d'un certain type.

Revenons au cas des rectangles de type C. Pour affiner la CS sur les rectangles de type C et démontrer également l'existence d'un pavage valide lorsque p et q sont tous les deux pairs on peut procéder de la manière suivante. On sait d'après les propriétés établies que le rectangle de type A et de taille $2 \times q$ est pavable quelle que soit la parité de $q \geqslant 2$. Il est donc tout à fait possible d'exhiber un pavage de type A et de taille $2 \times (q-2)$ valide lorsque $q > 2$ est pair. Il suffit ensuite de translater ce pavage verticalement autant de fois que nécessaire pour paver les $(p-2)$ premières lignes de longueur $(q-2)$, c'est-à-dire de répéter verticalement la bande $\left(\frac{p}{2}-1\right)$ fois. On construit ainsi un pavage de type A et de taille $(p-2) \times (q-2)$. Il reste alors à compléter le pavage en concaténant trois motifs de type $|B|$, $\overline{B}$ et C et de tailles respectives $2 \times (q-2)$, $(p-2) \times 2$ et 2×2 pour lesquels il existe bien entendu un pavage valide. Ainsi, on prouve l'existence d'un pavage de type A lorsque p et q sont simultanément pairs (figure VIII.29).

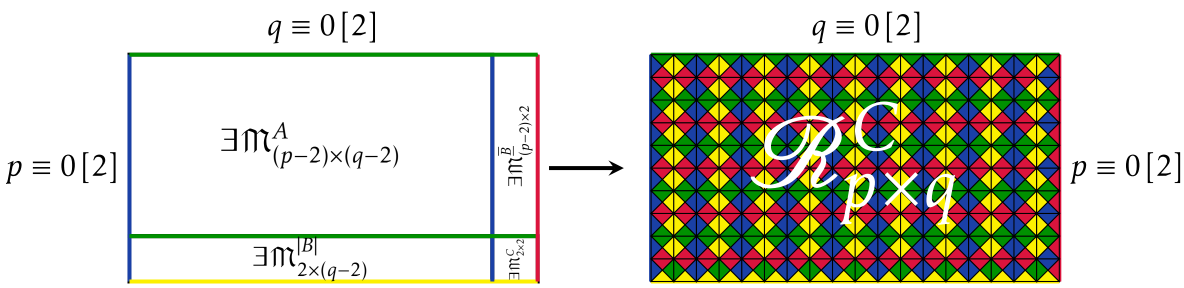


FIGURE VIII.29 – Partition d'un rectangle de type C en quatre rectangles de différents types pour lesquels il existe un motif valide.

Lemme VIII.5 – CS sur les rectangles $p \times q$ de type C
Soient $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$, si p et q sont de même parité alors il existe un pavage valide pour $\mathscr{R}^{C}_{p\times q}$.

Bien entendu, comme dans les cas précédents, on aurait pu utiliser un raisonnement par induction descendante en partitionnant correctement le rectangle de type C pour démontrer la CS (figure VIII.30). Le lecteur intéressé trouvera les détails dans Da Ronch, Gandit et Gravier (2020, p. 96).

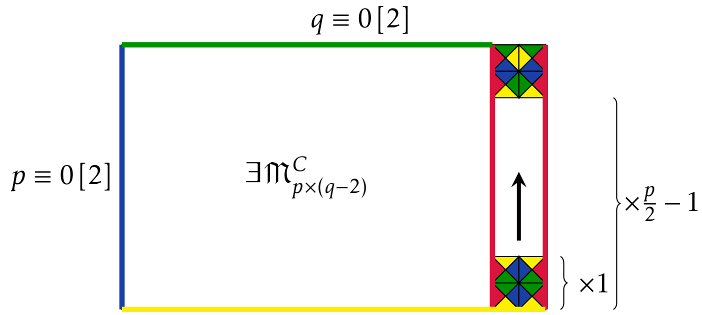


***Figure VIII.30** – Existence d'un pavage pour le rectangle de type C et de taille $p \times q$ par induction descendante sur une classe d'objets.*

Pour démontrer la conjecture VIII.1 énoncée sur les rectangles de type C (p. 150), il nous reste à prouver que lorsque p et q sont de parité différente alors il est impossible d'exhiber un pavage valide de type C.

Prenons arbitrairement p pair et q impair. Supposons qu'il existe un pavage valide avec les conditions décrites ci-avant sur les entiers p et q et fixons une couleur $i_0 \in \mathcal{X}$, une des couleurs apparaissant sur le bord NORD ou SUD du pavage, on a alors l'égalité suivante :

$$i_0 \in \mathcal{X}, \quad \mathcal{N}^C_{\triangle}(i_0) = \mathcal{N}^C_{\triangle_{ext}}(i_0) + \mathcal{N}^C_{\triangle_{int}}(i_0) = p \cdot q \in 2\mathbb{N}$$

On sait que $\mathcal{N}^C_{\triangle_{ext}}(i_0) = q$ et est donc impair puisque q l'est. Ainsi puisque $\mathcal{N}^C_{\triangle_{int}}(i_0) \in 2\mathbb{N}$ leur somme est nécessairement impaire. Or ceci est impossible en raison du fait que p est pair et donc que le produit de p par q l'est aussi. On vient donc de démontrer que lorsque p est pair et q est impair, il n'existe pas de pavage de type C valide. Un raisonnement analogue lorsque p est impair et q pair, en prenant cette fois-ci une couleur $i_0 \in \mathcal{X}$ d'un des bords EST ou OUEST du rectangle aurait permis de conclure de la même manière.

Lemme VIII.6 – CN sur les rectangles $p \times q$ de type C

Soient $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$, $\mathscr{R}^C_{p\times q}$ est pavable, alors nécessairement p et q sont de même parité.

Par contraposée, nous venons donc de démontrer que lorsque les entiers p et q sont d'une parité différente, il n'existe pas de pavage pour les rectangles de type C. Ainsi la conjecture VIII.1 (p. 150) énoncée est démontrée par les lemmes VIII.6 et VIII.5 et on obtient la CNS suivante.

Théorème VIII.4 – WANG-RECTANGLE-C

Soient $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$, $\mathscr{R}^C_{p\times q}$ est pavable $\Leftrightarrow p \equiv q\,[2]$.

De ce dernier théorème on déduit directement une propriété sur les carrés de taille $n \times n$ avec $n \geqslant 1$ (WANG-CARRE-C).

Corollaire VIII.4 – WANG-CARRE-C

Quel que soit $n \geqslant 1$, il existe toujours au moins un pavage valide pour le carré $\mathscr{R}^C_{n\times n}$.

En particulier lorsque l'on se place dans l'ensemble des puissances de deux $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$, on en déduit facilement que tout carré de la taille d'une puissance de deux possède un pavage valide de type C. Ce résultat est évident à partir du corollaire précédent mais il peut être intéressant de le démontrer d'une part, sans utiliser le résultat précédent et d'autre part, en utilisant une autre stratégie que celles évoquées tout au long de cette partie.

On va utiliser une stratégie très utile dans la construction de pavage apériodique mentionnant à la fois un argument de dilatation et de substitution. A partir des six types de tuiles de notre ensemble $\mathcal{T}$, on va construire des super-tuiles ayant la propriété d'avoir subi un agrandissement de facteur deux. Pour chacun des six super-tuiles on substitue, à rotation près, un et un seul motif de taille 2×2 construit avec des tuiles de $\mathcal{T}$. Ainsi, en procédant par itérations, on construit par cette méthode de dilatation-substitution tous les carrés de la taille d'une puissance de deux. Un raisonnement par récurrence permet de s'en convaincre, il suffit en effet de partitionner un carré de taille $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ en quatre carrés de taille $2^n \times 2^n$ et de type C, qui par hypothèse de récurrence sont pavables. On en déduit donc que le carré $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ possède aussi un pavage valide. Ceci reste vrai également dans le cas où $n = 0$, puisqu'il existe un pavage de type C de carré de taille 1×1, c'est une tuile de $\mathcal{T}$. L'existence d'un pavage de type C pour tous les carrés de la taille d'une puissance de deux est donc démontrée.

Propriété VIII.11 – Pavages substitutifs de carrés de taille $2^n \times 2^n$ de type C

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un pavage valide pour les carrés $\mathscr{R}^C_{2^n\times 2^n}$.

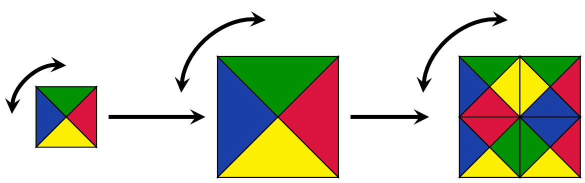


***Figure VIII.31** – Exemple de dilatation-substitution pour un type de tuiles de $\mathcal{T}$ générant un pavage valide 2×2 de type C.*

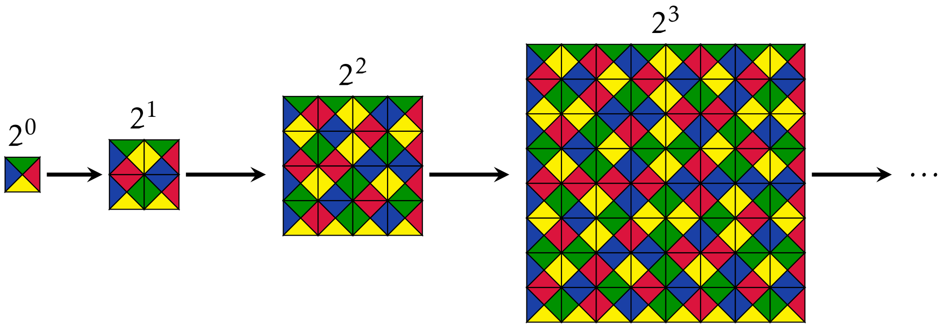


***Figure* VIII.32 –** *Premières étapes de construction de pavages par substitution pour des carrés de type C et de la taille d'une puissance de deux.*

On peut se servir en général de ce type de stratégie pour démontrer l'existence de certains pavages apériodiques du plan. En effet, le lemme de Kœnig nous assure que si on sait paver des carrés aussi grands que l'on veut, alors il existe nécessairement un pavage du plan. De plus, si ce pavage était périodique alors il existerait une translation d'un motif d'une certaine longueur $d > 0$ qui laisserait le pavage invariant. Or, cette stratégie de dilatation-substitution peut être répétée un nombre infini de fois ce qui permet de construire des motifs de plus en plus grands et donc plus grands que la période de translation hypothétique... Bien entendu, ici il n'est pas question d'une collection apériodique, puisque le jeu de tuiles permet de générer un pavage périodique du plan à partir d'un simple motif de type A et de taille 2×2.

Enfin, les corollaires VIII.1 (p. 166), VIII.3 (p. 170) et VIII.4 (p. 174) nous permettent d'établir deux résultats. Une CNS pour paver tous les carrés de n'importe quel type, et ce, dès lors que $n \geqslant 2$ (WANG-∀-CARRE-MONO-PART) et donne également une réponse positive quant à l'existence d'un moins un pavage carré valide d'un certain type, quelle que soit la taille du carré (WANG-CARRE-MONO-PART).

Corollaire VIII.5 – CNS WANG-∀-CARRE-MONO-PART

Soit $n \geqslant 2$, tous les types de carré sont pavables, si et seulement si, n est pair.

Corollaire VIII.6 – WANG-CARRE-MONO-PART

Quel que soit l'entier $n \geqslant 1$, il existe toujours au moins un pavage carré valide d'un certain type.

Revenons à présent à notre problème initial WANG-REC-MONO-PART. Nous avons donné des CNS pour chacun des types de rectangle mis en avant et ainsi répondu à chaque sous-problème WANG-RECTANGLE-A, WANG-RECTANGLE-

B et WANG-RECTANGLE-C. Nous résumons nos résultats dans le tableau VIII.1 ci-après.

Type de rectangle	$p \in 2\mathbb{N}$ $q \in 2\mathbb{N}$	$p \in 2\mathbb{N}$ $q \notin 2\mathbb{N}$	$p \notin 2\mathbb{N}$ $q \in 2\mathbb{N}$	$p \notin 2\mathbb{N}$ $q \notin 2\mathbb{N}$
$\mathscr{R}^{A}_{p\times q}$	•	•	•	
$\mathscr{R}^{\lvert B\rvert}_{p\times q}$	•		•	
$\mathscr{R}^{\overline{B}}_{p\times q}$	•	•		
$\mathscr{R}^{C}_{p\times q}$	•			•

Tableau VIII.1 – *Résultats d'existence (•) pour le problème WANG-REC-MONO-PART en fonction de la parité des entiers $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$ et du type de rectangle.*

Certains de ces résultats restent valides même lorsque $p \geqslant 1$ et/ou $q \geqslant 1$. Nous invitons le lecteur ou la lectrice à se référer aux théorèmes établis pour chacun des types de rectangle donnant les conditions initiales sur les entiers p et q. Il est évident, même si nous ne l'avons pas mentionné dans le tableau précédent, que tous les autres types de rectangle avec des bords monochromes qui possèdent au moins deux bords adjacents de la même couleur ne sont jamais pavables. La raison a été explicitée en début de section, nous laissons donc le lecteur ou la lectrice s'en convaincre...

Nous donnons, ci-après, un algorithme permettant de résoudre, en temps linéaire par rapport à la taille des instances p et q, le problème de décision WANG-REC-MONO-PART.

Algorithme VIII.1 – Décision/Construction de WANG-REC-MONO-PART

(1) On choisit des entiers $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$.
(2) En fonction de p et q choisir le premier type de rectangle qui soit pavable, passer ensuite à l'étape 3.
(3) Construire le pavage à partir des algorithmes de construction ayant servi dans les preuves pour démontrer l'existence d'un pavage (CS) et renvoyer le pavage.

Dans tous les cas l'algorithme s'arrête dès qu'il a construit un pavage valide pour un certain type qui a été choisi en fonction des entiers p et q. On sait en plus que quelle que soit la parité de $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$, il existe toujours une solution au problème WANG-REC-MONO-PART (voir tableau VIII.1). On peut néanmoins affiner cet algorithme pour traiter tous les sous-problèmes liés à WANG-REC-MONO-PART.

Algorithme VIII.2 – Décision/Construction de WANG-REC-MONO-PART affiné

(1) On choisit des entiers $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$.
(2) Pour chaque type de rectangle, tester les conditions sur les entiers p et q
(2.1) Si les conditions sont validées alors passer à l'étape 3.
(2.2) Sinon retourner que le pavage est impossible pour ce type et repasser à l'étape 2 jusqu'à ce que tous les types soient traités.
(3) Renvoyer qu'il existe un pavage de taille $p \times q$ pour ce rectangle et le construire en utilisant une des preuves algorithmiques ayant servi à démontrer l'existence d'un pavage (CS) puis repasser à l'étape 2 jusqu'à ce que tous les types de rectangle soient traités.

Cet algorithme se termine lorsque tous les types de rectangle ont été traités. Il renvoie une solution « positive », c'est-à-dire un pavage de taille $p \times q$ d'un certain type et une solution « négative » sinon, à savoir l'impossibilité de paver un rectangle de taille $p \times q$ lorsqu'il est impossible de construire un pavage valide pour un certain type de rectangle.

Le problème WANG-REC-MONO-PART est donc clairement dans $\mathcal{P}$ puisqu'il existe un algorithme exécutable en temps polynomial (linéaire même) permettant de décider du problème WANG-REC-MONO-PART. Cet algorithme permet même de construire une solution en $\mathcal{O}(p+q)$.

À partir des résultats d'existence mentionnés dans le tableau VIII.1 ci-avant (p. 176), on peut en extraire une CNS sur les entiers p et q pour pouvoir paver n'importe quel type de rectangle. Ceci permet non seulement de donner une condition de pavabilité sur les rectangles mais donne aussi une condition pour paver n'importe quel type. Cela revient donc à répondre au problème WANG-∀-REC-MONO-PART, c'est-à-dire établir des conditions sur les entiers p et q qui permettent de paver tous les types [5] de rectangles.

Théorème VIII.5 – WANG-∀-REC-MONO-PART

Soient $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$. Quel que soit le type du rectangle, il est toujours possible d'exhiber au moins un pavage valide, si et seulement si, les entiers p et q sont simultanément pairs.

Dans la prochaine section nous allons élargir le problème WANG-∀-REC-MONO-PART au problème WANG-∀-REC-MONO-PART* en gardant les mêmes propriétés sur la structure des rectangles (types) et des tuiles (quatre couleurs distinctes par tuile) mais en prenant, cette fois, un ensemble de couleurs tel que

5. A, B qui se scinde en sous-types $|B|$ et $\overline{\underline{B}}$ et C.

$\#\mathcal{X} \geqslant 4$. Nous allons alors chercher une ou plusieurs conditions vérifiant d'une part ces propriétés et d'autre part, des conditions qui permettent en plus de paver, quels que soient les entiers p et q et quel que soit le type de rectangle choisi, un rectangle de taille $p \times q$.

1.6 Vers une généralisation du problème dans le cas où $\mathcal{T}_{\#\mathcal{X}\geqslant 4}$

Nous avons établi des CNS sur chacun des types de rectangle exhibé précédemment (voir le résumé dans le tableau VIII.1, p. 176). En outre, nous avons démontré que quelle que soit la parité des entiers $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$, on peut toujours exhiber au moins un pavage valide pour un certain type de rectangle et donc trouver une solution non vide au problème WANG-REC-MONO-PART (théorème VIII.3, p. 172). Les CNS établies pour chacun des types de rectangle nous ont conduit à déduire une CNS sur un problème plus large, le problème WANG-∀-REC-MONO-PART (théorème VIII.5, p. 177). Ainsi, il existe donc des entiers p et q pour lesquels il est impossible d'exhiber un pavage valide pour certains types.

À présent la question est de savoir si en ajoutant des couleurs à notre collection initiale et *a fortiori* des tuiles tout en préservant leur structure de quatre couleurs, il est possible d'une part, d'exhiber un pavage valide pour tous les entiers $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$, et d'autre part, cela quel que soit le type de rectangle (WANG-∀-REC-MONO-PART*). Ainsi, si l'existence est avérée, nous déterminerons alors le nombre minimal de couleurs, c'est-à-dire nécessaire et suffisant que nous noterons $\min_{\#\mathcal{X}}$ à posséder dans cette nouvelle collection de tuiles. Dorénavant et dans toute la suite de cette section, on note $\mathcal{T}$ cette nouvelle collection de tuiles possédant toutes les tuiles d'exactement quatre couleurs distinctes pour chacune des tuiles et dont le cardinal dépend du nombre de couleurs de la collection. À cet effet, on pose $\mathcal{X}$ un ensemble fini et ordonné de $k > 0$ couleurs tel que $\mathcal{X} = \{1, 2, \ldots, k-1, k\}$.

Pour $k \geqslant 4$ couleurs on dispose donc de $\#\mathcal{T} = k \times (k-1) \times (k-2) \times (k-3)$ tuiles. En effet pour construire l'intégralité de la collection de tuiles, qui dépend *a fortiori* du cardinal de $\mathcal{X}$, on construit en fait le nombre de parties ordonnées de quatre couleurs dans l'ensemble ordonné à k couleurs de la collection. C'est donc le nombre de 4-arrangements possibles sans répétition de $\mathcal{X}$ noté

$$A_k^4 = \begin{cases} \dfrac{k!}{(k-4)!} = k \times (k-1) \times (k-2) \times (k-3) & , \quad \text{si } k \geqslant 4 \\ 0 & , \quad \text{si } k \leqslant 3 \end{cases}$$

Par convention si $k < 4$ alors le nombre d'arrangements de quatre couleurs par tuile dans l'ensemble des couleurs $\mathcal{X}$ à k éléments est nul. Ceci est intuitif car si

$\#\mathcal{X} < 4$ il n'est de toute manière pas possible de conserver la propriété des tuiles c'est à dire posséder quatre couleurs distinctes.
En outre, lorsque $\#\mathcal{X} = 4$, nous avons démontré qu'il était possible de résoudre le problème WANG-∀-REC-MONO-PART modulo une certaine condition bien spécifique portée sur les entiers p et q. Lorsque cette condition n'est pas respectée, ce dernier problème est insoluble, car il n'existe pas toujours de pavage valide pour tous les types. En particulier, pour le problème WANG-REC-MONO-PART et la collection initiale $\mathcal{T}_{\#\mathcal{X}=4}$, nous avons en effet pointé plusieurs impossibilités comme mentionné ci-avant et reporté dans le tableau VIII.2.

Type de rectangle	$p \in 2\mathbb{N}$ $q \in 2\mathbb{N}$	$p \in 2\mathbb{N}$ $q \notin 2\mathbb{N}$	$p \notin 2\mathbb{N}$ $q \in 2\mathbb{N}$	$p \notin 2\mathbb{N}$ $q \notin 2\mathbb{N}$
$\mathscr{R}^{A}_{p\times q}$				•
$\mathscr{R}^{\lvert B\rvert}_{p\times q}$		•		•
$\mathscr{R}^{\overline{B}}_{p\times q}$			•	•
$\mathscr{R}^{C}_{p\times q}$		•	•	

Tableau VIII.2 – *Résultat d'impossibilité (•) pour le problème WANG-REC-MONO-PART en fonction de la parité des entiers $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$ et du type de rectangle lorsque $\#\mathcal{X} = 4$.*

Nous pouvons donc déduire directement de ces résultats que si $\#\mathcal{X} = 4$ alors cela ne suffit pas à pouvoir paver n'importe quel type de rectangle, et cela, quels que soient les entiers p et q. Ce fait permet donc de donner une CN sur le nombre minimal de couleurs à avoir dans la collection $\mathcal{T}$ pour répondre au problème WANG-∀-REC-MONO-PART *.

Lemme VIII.7 – CN sur $\min_{\#\mathcal{X}}$

Le nombre nécessaire de couleurs dans $\mathcal{T}$ pour paver n'importe quelle taille de rectangles de n'importe quel type est tel que $\min_{\#\mathcal{X}} \geqslant 5$.

Nous avons déterminé un minorant à $\min_{\#\mathcal{X}}$. Ainsi, pour le moment on sait que pour paver correctement tous les types de rectangle, et ce, quelle que soit la parité de p et q, cinq couleurs au moins sont nécessaires puisque qu'avec moins de cinq couleurs cela est impossible. Il nous reste à démontrer que cinq couleurs suffisent. Pour le moment, on a juste établi l'inégalité suivante : $5 \leqslant \min_{\#\mathcal{X}} \leqslant k$. Il reste à faire une analyse par cas pour chacune des impossibilités mentionnées ci-avant (tableau VIII.2) afin de déterminer le nombre suffisant de couleurs qui permettrait d'exhiber un pavage valide pour tous les types de rectangle et cela quelle que soit leur taille.

On considère à présent une collection $\mathcal{T}_{\#\mathcal{X}\geqslant 5}$ de tuiles de cinq couleurs ou plus. Nous allons procéder à une analyse par cas pour chacune des impossibilités. Nous allons tout d'abord démontrer un résultat préliminaire qui va nous servir régulièrement dans notre analyse par cas.

> **Lemme VIII.8 – Rectangle de type C et de taille $1 \times q$ avec $\mathcal{T}_{\#\mathcal{X}\geqslant 5}$**
>
> Soit $\mathcal{T}_{\#\mathcal{X}\geqslant 5}$ une collection de tuiles d'au moins cinq couleurs. Quel que soit l'entier $q \geqslant 1$, il est toujours possible d'exhiber un pavage valide pour le rectangle $1 \times q$ de type C et en fait, il suffit d'avoir $\#\mathcal{X} = 5$.

En effet nous avons démontré que le rectangle $\mathscr{R}^{C}_{1\times q}$ est pavable, si et seulement si, q est impair (voir propriété VIII.3, p. 151). Par conséquent avec une collection de quatre couleurs il est impossible de paver ce rectangle lorsque q est pair. Prenons alors une collection $\mathcal{T}_{\#\mathcal{X}\geqslant 5}$, Il suffit là encore de translater horizontalement un motif 1×2 de type $|B|$ et cela $(\frac{q}{2} - 1)$ fois pour paver les $q - 2$ premières cases. Il reste alors à compléter les deux dernières cases avec un motif 1×2 de type C en prenant la cinquième couleur dans $\mathcal{X}$ (figure VIII.33.a). Ainsi, on vient de démontrer que cinq couleurs suffises pour paver un rectangle $\mathscr{R}^{C}_{1\times q}$ lorsque q est pair. Dans le cas où q est impair, on a directement le résultat puisqu'on savait déjà paver ce rectangle lorsque la collection de tuiles était seulement de quatre couleurs. Le lemme précédent est ainsi démontré.

Lorsque q est impair, on peut également exhiber un pavage valide d'exactement cinq couleurs. Pour ce faire on peut utiliser la même procédure de construction qui nous permet de paver les $q-1$ premières cases, donc un nombre pair de cases pour ensuite ajouter une dernière tuile sur la dernière case. On a ainsi paver les q cases et donc exhiber un pavage valide de type C avec la cinquième couleur sur le bord EST du pavage (figure VIII.33.b) .

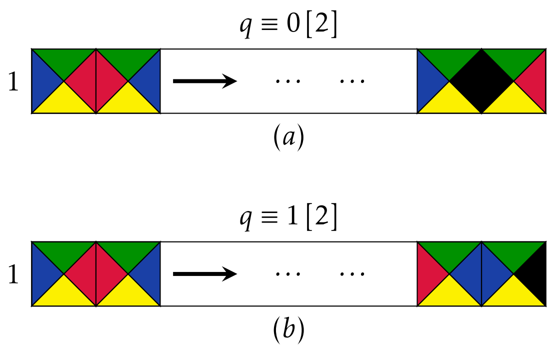


FIGURE VIII.33 – *Pavage d'un rectangle $1 \times q$ de type C avec $\#\mathcal{X} = 5$.*

Par rotation d'un quart de tour et puisqu'on possède toutes les tuiles dans la collection $\mathcal{T}_{\#\mathcal{X}=5}$, on montre de la même manière que la colonne est pavable. En outre lorsque cela s'avérera utile, on pourra bien entendu permuter la cinquième couleur, « noire » dans notre cas, avec l'une des autres couleurs sur les bords du rectangle.

Le cas des rectangles $\mathscr{R}^C_{p\times q}$ — Pour cette étude de cas nous allons examiner les deux cas problématiques relevés comme étant impossibles avec une collection de quatre couleurs.

- On se place dans le cas où $p \in 2\mathbb{N}$ et $q \notin 2\mathbb{N}$. Le théorème VIII.4 (p. 173) avec une collection de quatre couleurs, nous dit que le rectangle de type C est pavable, si et seulement si, les entiers sont de même parité. On sait donc construire un pavage valide de type C pour le rectangle de taille $p \times (q-1)$ avec quatre couleurs. En outre, si l'on veut construire la q-ième colonne, on est obligé d'introduire une cinquième couleur sur le bord EST de cette colonne qui n'est pas déjà sur un des quatre bords du pavage de taille $p \times (q-1)$ car sinon, par concaténation, on ne pourrait pas exhiber un pavage valide de type C pour le rectangle $p \times q$. De plus, d'après le lemme VIII.8 précédent on sait qu'il existe bien un pavage valide de type C pour le rectangle $p \times 1$ avec p impair. Par concaténation des deux pavages, modulo un choix de couleurs approprié sur les bords, on démontre l'existence d'un pavage valide de type C de taille $p \times q$ avec p pair, q impair et $\#\mathcal{X} = 5$ (figure VIII.34).

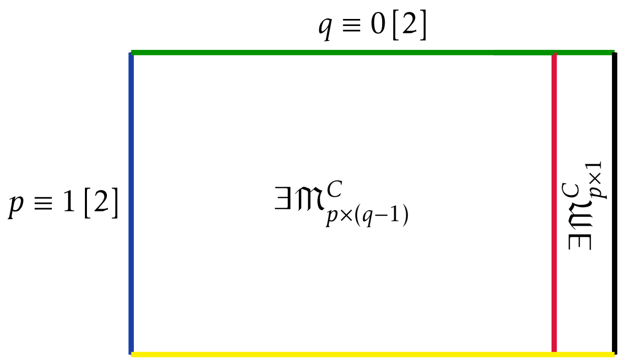


FIGURE VIII.34 – *Existence d'un pavage pour le rectangle de type C lorsque p est impair, q est pair et* $\#\mathcal{X} = 5$.

- On se place à présent dans le cas où $p \notin 2\mathbb{N}$ et $q \in 2\mathbb{N}$. La première stratégie consiste, à partir du cas précédent, à effectuer une rotation d'un quart de tour quitte à permuter le rôle de p et q ce qui permet de démontrer l'existence d'un pavage valide de type C de taille $p \times q$ lorsque p est impair et q est pair. Cette stratégie est valable puisque, rappelons-le, nous possédons bien toutes les tuiles de $\mathcal{T}_{\#\mathcal{X}\geqslant 5}$. Sans partir du cas précédent on aurait également pu, à partir de la construction d'un pavage valide de type C et de taille $(p-1)\times q$, construire non plus une colonne mais une ligne de taille $1\times q$ qui, modulo des couleurs bien choisies sur les bords et par concaténation, nous aurait permis de démontrer également l'existence d'un pavage valide de type C lorsque p est pair et q est impair avec $\#\mathcal{X} = 5$.

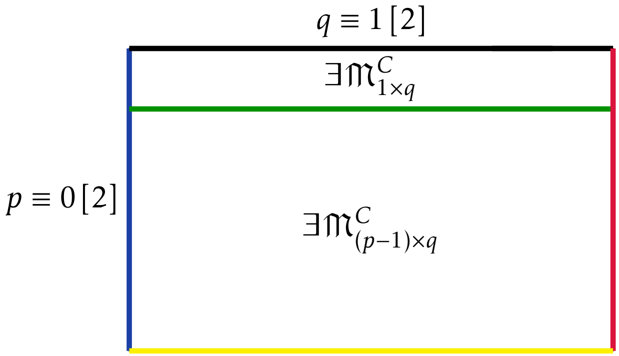


***Figure* VIII.35 –** *Existence d'un pavage pour le rectangle de type C lorsque p est pair, q est impair et* $\#\mathcal{X} = 5$.

L'étude des deux impossibilités exhibées lorsque $\mathcal{T}_{\#\mathcal{X}=4}$ s'avère ne plus en être une dès lors que l'on ajoute une cinquième couleur à notre collection. Ainsi nous venons d'établir le résultat suivant.

Propriété VIII.12 – WANG-RECTANGLE-C avec $\mathcal{T}_{\#\mathcal{X}\geqslant 5}$

Soit $\mathcal{T}_{\#\mathcal{X}\geqslant 5}$ une collection de tuiles d'au moins cinq couleurs. Quels que soient les entiers $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$, il existe toujours au moins un pavage valide de type C dès lors que $\#\mathcal{X} = 5$.

Le cas des rectangles $\mathscr{R}^{B}_{p\times q}$ — Pour cette étude de cas, nous allons nous restreindre au cas des rectangles du sous-type $|B|$, puisqu'à rotation d'un quart de tour près, s'il existe un pavage pour le rectangle de sous-type $|B|$ alors il existe un pavage pour le rectangle du sous-type $\underline{\overline{B}}$ quitte à permuter le rôle de p et q. Avant de développer cette étude nous allons démontrer un résultat préliminaire qui va nous servir dans la construction d'un pavage rectangulaire de type $|B|$.

Lemme VIII.9 – Rectangle de type $|B|$ et de taille $1\times q$ avec $\mathcal{T}_{\#\mathcal{X}\geqslant 5}$

Soit $\mathcal{T}_{\#\mathcal{X}\geqslant 5}$ une collection de tuiles d'au moins cinq couleurs. Quel que soit l'entier $q \geqslant 2$, il est toujours possible d'exhiber un pavage valide pour le rectangle $1\times q$ de type $|B|$ et en fait, il suffit d'avoir $\#\mathcal{X} = 5$.

On a démontré que l'on a une CNS lorsque la collection de tuiles possède quatre couleurs. En effet, le rectangle de type $|B|$ et de taille $1 \times q$ est pavable si et seulement si q est pair. Il reste alors à démontrer que lorsque q est impair on peut également construire un pavage valide modulo un certain nombre de couleurs à ajouter qu'il nous reste à déterminer. On considère donc une collection d'au moins cinq couleurs, pour ce faire, il suffit de construire un motif 1×2 de type $|B|$ et de répéter ce motif $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor - 1$ fois pour paver les $q-3$ premières cases. Il reste alors à compléter avec un motif 1×3 de type $|B|$ pour paver les trois dernières cases restantes. Ce dernier motif existe bien lorsque l'on dispose d'une cinquième couleur (figure VIII.36). On vient donc de démontrer l'existence d'un pavage valide de type $|B|$ lorsque q est impair dès lors que $\#\mathcal{X} = 5$. Le lemme précédent est ainsi démontré.

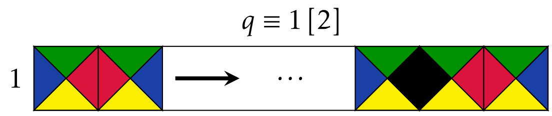


***Figure* VIII.36 –** *Pavage d'un rectangle $1 \times q$ de type $|B|$ avec $\#\mathcal{X} = 5$.*

Bien entendu, à rotation d'un quart de tour près, on exhibe également un pavage valide de type $\underline{\overline{B}}$ pour la colonne et cela quelle que soit sa hauteur supérieure ou égale à 2.

- On considère le cas où $p \in 2\mathbb{N}$ et $q \notin 2\mathbb{N}$. On sait d'après le théorème VIII.4 (p. 173) pour une collection de quatre couleurs, qu'il existe au moins un pavage de type C lorsque p et q sont de même parité. On en déduit donc qu'il existe un pavage valide de type C pour le rectangle $p \times (q-1)$ puisque p et $(q-1)$ sont tous les deux pairs. Il suffit alors de construire un pavage de taille $p \times 1$ qui possède sur son bord OUEST (resp. EST) la couleur du bord EST (resp. OUEST) du pavage du $p \times (q-1)$. En fait le pavage de cette colonne correspond à un pavage de type C et on sait d'après le lemme VIII.8 (p. 180) qu'un pavage existe avec une collection de cinq couleurs. Par concaténation des deux pavages rectangles, on vient de démontrer l'existence d'un pavage de type $|B|$ lorsque p est pair et q est impair (figure VIII.37).

Dans la figure VIII.37, la cinquième couleur n'est pas visible, elle apparaît en réalité à l'intérieur du pavage de la dernière colonne (voir par exemple la figure VIII.33(a), p. 180).

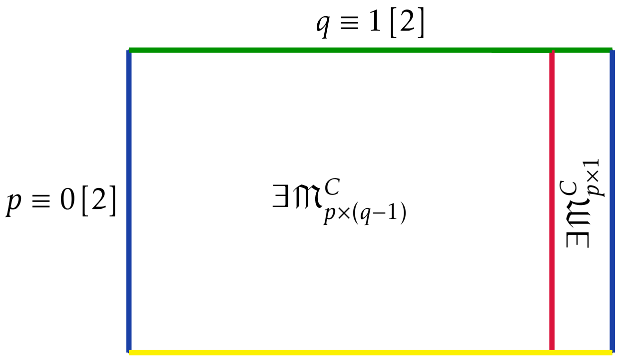


FIGURE VIII.37 – *Existence d'un pavage pour le rectangle de type* $|B|$ *lorsque* p *est pair,* q *est impair et* $\#\mathcal{X} = 5$.

- À présent considérons le cas où $p \notin 2\mathbb{N}$ et $q \notin 2\mathbb{N}$. Le résultat précédent nous dit qu'il existe, avec une collection de cinq couleurs, un pavage de type $|B|$ lorsque p est pair et q est impair. On en déduit donc l'existence d'un pavage de même type pour le rectangle $(p-1)\times q$. Il suffit alors de construire un pavage de type $|B|$ pour la ligne $1\times q$ et d'après le lemme VIII.9 (p. 182) ce pavage existe et on sait le construire. En faisant le choix de placer une cinquième couleur sur le bord NORD de ce pavage et de faire coïncider la couleur SUD avec la couleur NORD du pavage $(p-1)\times q$, on démontre ainsi, par concaténation, l'existence d'un pavage de type $|B|$ lorsque p et q sont simultanément impairs (figure VIII.38).

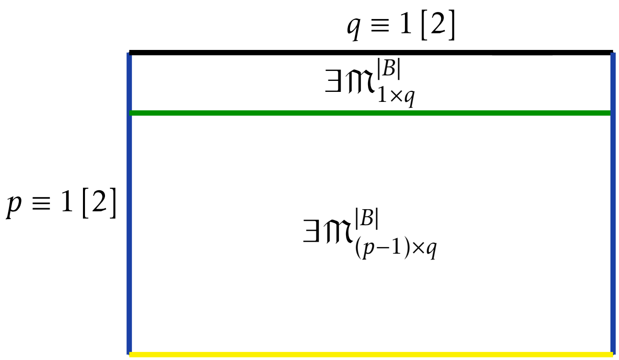


FIGURE VIII.38 – *Existence d'un pavage pour le rectangle de type C lorsque* p *est impair,* q *est impair et* $\#\mathcal{X} = 5$.

Pour démontrer l'existence de pavages pour les rectangles de type $\overline{\underline{B}}$, il suffit d'effectuer une rotation d'un quart de tour sur les deux précédents pavages, quitte là encore à permuter le rôle de p et q. On montre alors qu'il existe au moins un pavage de type $\overline{\underline{B}}$ lorsque p est impair et q est pair mais aussi lorsque p

et q sont tous deux impairs. On en déduit le résultat suivant pour les rectangles de type B.

Propriété VIII.13 – WANG-RECTANGLE-B avec $\mathcal{T}_{\#\mathcal{X}\geqslant 5}$

Soit $\mathcal{T}_{\#\mathcal{X}\geqslant 5}$ une collection de tuiles d'au moins cinq couleurs. Quels que soient les entiers $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$, il existe toujours au moins un pavage valide de type B dès lors que $\#\mathcal{X} = 5$.

Ce résultat est bien sûr valide pour les rectangles de sous-type $|B|$ (resp. $\overline{\underline{B}}$) dès que $p \geqslant 1$ (resp. $q \geqslant 1$).

Le cas des rectangles $\mathscr{R}^{A}_{p\times q}$ — Il nous reste à étudier un cas pour les rectangles de type A, le cas où p et q sont simultanément impairs.

- Soient $p \notin 2\mathbb{N}$ et $q \notin 2\mathbb{N}$. On sait qu'il existe un pavage valide pour le rectangle de type C lorsque p et q sont simultanément pairs. Ainsi, le rectangle $(p-1)\times(q-1)$ possède un pavage valide de type C. On construit ensuite un pavage de type $|B|$ pour la ligne $1 \times q$ et ce pavage existe d'après le lemme VIII.9 (p. 182). Il reste à construire le pavage d'une colonne de type C de taille $(p-1)\times 1$ dont l'existence a été démontrée en référence au lemme VIII.8 (p. 180). Bien évidemment si nous voulons pouvoir concaténer cette ligne et cette colonne avec le rectangle de type C précédemment construit, il nous faut faire un choix judicieux de couleurs sur les bords pour pouvoir les concaténer et former ainsi un pavage de type A de taille $p \times q$ lorsque p et q sont simultanément impairs (figure VIII.39). L'existence est ainsi démontrée.

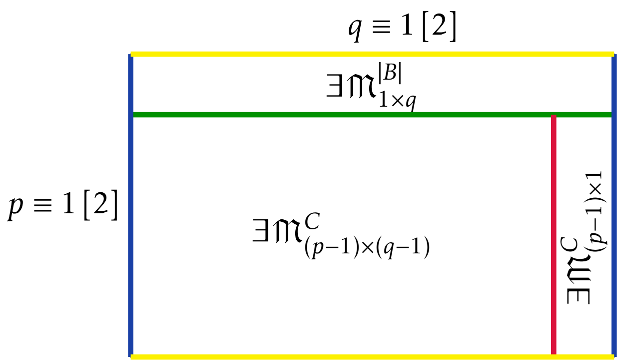


FIGURE VIII.39 – Existence d'un pavage pour le rectangle de type A lorsque p est impair, q est impair et $\#\mathcal{X} = 5$.

Une fois de plus la cinquième couleur apparaît à l'intérieur du pavage de la ligne et de la colonne.

Propriété VIII.14 – WANG-RECTANGLE-A avec $\mathcal{T}_{\#\mathcal{X}\geqslant 5}$

Soit $\mathcal{T}_{\#\mathcal{X}\geqslant 5}$ une collection de tuiles d'au moins cinq couleurs. Quels que soient les entiers $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$, il existe toujours au moins un pavage valide de type A dès lors que $\#\mathcal{X} = 5$.

Ainsi tous les cas d'impossibilité émanant des différents types de rectangle, lorsque l'on possède une collection à quatre couleurs, se sont avérés être possibles dès que nous avons ajouté une cinquième couleur à notre collection. Nous venons en fait de démontrer que cinq est le nombre minimum suffisant pour pouvoir paver n'importe quel type de rectangle et cela quelle que soit la valeur [6] prise par les entiers $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$. Ceci nous donne donc une CS sur $\min_{\#\mathcal{X}}$.

Lemme VIII.10 – CS sur $\min_{\#\mathcal{X}}$

Soient $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$ des entiers. Le nombre suffisant de couleurs dans $\mathcal{T}$ pour paver n'importe quelle taille de rectangle $p \times q$ de n'importe quel type est tel que $\min_{\#\mathcal{X}} \leqslant 5$

Nous venons de donner la valeur d'un majorant à $\min_{\#\mathcal{X}}$. Cette valeur est en fait celle de la borne supérieure, puisque c'est le plus petit des majorants car on a nécessairement $\min_{\#\mathcal{X}} \geqslant 5$ (voir lemme VIII.7, p. 179). Ainsi des deux lemmes VIII.7 et VIII.10 (pp. 179 & 186), on obtient alors le théorème suivant donnant la valeur de $\min_{\#\mathcal{X}}$.

Théorème VIII.6 – Valeur de $\min_{\#\mathcal{X}}$ pour les rectangles

Le nombre minimal de couleurs $\min_{\#\mathcal{X}}$ pour paver n'importe quels type et taille de rectangle vaut $\min_{\#\mathcal{X}} = 5$.

Cela sous-tend que n'importe quelle collection de tuiles $\mathcal{T}_{\#\mathcal{X}\geqslant 5}$ pave également tous les types de rectangle et cela quels que soient les entiers $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$. Le problème WANG-∀-REC-MONO-PART ⋆ est donc résolu pour toutes valeurs de $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$ avec cinq couleurs ou plus dans la collection de tuiles.

Enfin, le théorème VIII.6 nous permet donc d'établir le résultat suivant sur le problème des carrés (WANG-∀-CARRE-MONO-PART ⋆).

Corollaire VIII.7 – $\#\mathcal{X}$ pour les carrés

Tous les types de carré de n'importe quelle taille $n \geq 2$ sont pavables, si et seulement si, $\#\mathcal{X} \geqslant 5$ (5 suffit bien entendu).

6. Évidemment cette condition initiale sur les entiers p et q, comme nous l'avons déjà vu, peut être affinée pour certains types de rectangle en particulier pour les types A et B.

Pour information, on constate en fait qu'avec $\#\mathcal{X} = 5$ on construit une collection $\mathcal{T}$ de cardinal $\#\mathcal{T} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$. En réalité les cent-vingt tuiles ne sont pas toutes nécessaires. On pourrait alors s'intéresser à une sous-collection de tuiles de $\mathcal{T}$ dans un ensemble à cinq couleurs qui serait nécessaire et suffisante pour paver tous les types de rectangle quels que soient les entiers $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$. Autrement dit, commencer par déterminer deux entiers $A, B \in \{1, 2, \ldots, \#\mathcal{T}\}$ tels que $\min_{\#\mathcal{T}_{\#\mathcal{X}=5}} \leqslant A$ et $\min_{\#\mathcal{T}_{\#\mathcal{X}=5}} \geqslant B$, puis affiner cet encadrement jusqu'à exhiber l'unique valeur de $\min_{\#\mathcal{T}_{\#\mathcal{X}=5}}$ lorsque $A = B$. Intuitivement pour générer des pavages rectangulaires de grande taille tout en minimisant le nombre de tuiles différentes, on essaye de construire des motifs périodiques qui pourraient donc être translatés verticalement et/ou horizontalement. Une méthode consisterait à minimiser le nombre de motifs rectangulaires périodiques différents, tout en s'assurant pour chacun de ces motifs qu'ils contiennent un nombre nécessaire et suffisant de tuiles différentes pour pouvoir exhiber un pavage valide, ce qui revient en fait à déterminer la valeur de $\min_{\#\mathcal{T}_{\#\mathcal{X}=5}}$.

On observe également qu'en modifiant la structure des tuiles de notre collection à quatre couleurs et en prenant, par exemple, toutes les tuiles ayant exactement trois couleurs distinctes parmi notre ensemble de quatre couleurs (figure VIII.40), il semble alors possible de paver tous types de rectangle de n'importe quelle taille modulo certaines conditions initiales sur les entiers p et q. En fait, le fait de doubler une couleur permet de jouer le rôle de la cinquième couleur ajoutée. Outre ce fait, cette nouvelle collection semble également permettre d'établir l'existence de pavages pour des types de rectangle que nous avons exclus dès le début de notre analyse mathématique, à savoir ceux ayant des bords adjacents d'une même couleur (figure VIII.40).

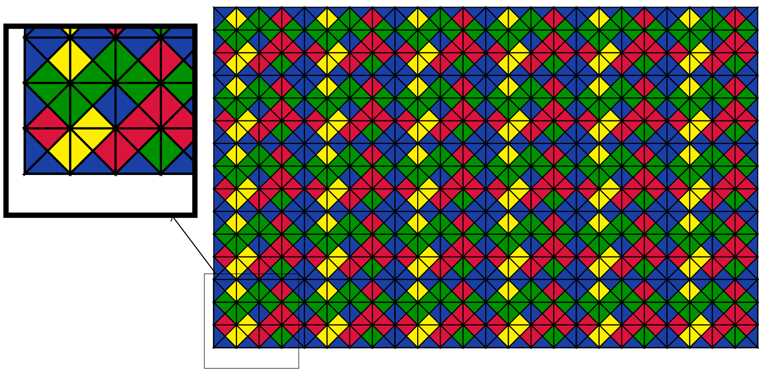


FIGURE VIII.40 – *Un nouveau type de pavages généré avec la nouvelle collection de tuiles.*

Nous terminons ce paragraphe en invitant la lectrice ou le lecteur intéressé par ces deux remarques à poursuivre ces réflexions...

Dans le prochain paragraphe on s'intéresse à des régions discrètes, non bornées ou partiellement bornées comme le plan $\mathbb{Z}^2$ et les bandes bi-infinies pour une hauteur $h > 0$ fixée, sous certaines conditions sur les familles de tuiles ou la hauteur considérée.

2 Le problème de Wang sur des bandes bi-infinies de hauteur h fixée : une étude de cas

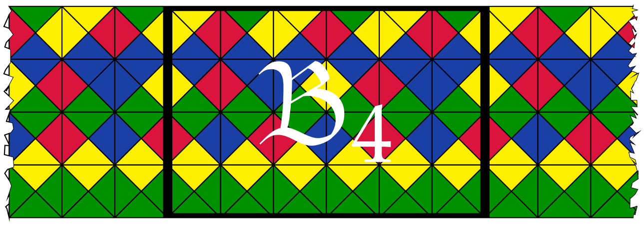


FIGURE VIII.41 – *Exemple d'un pavage d'une bande bi-infinie de hauteur $h = 4$ fixée ($\mathfrak{B}_4$) réalisé par translations horizontales d'un motif horizontalement périodique.*

2.1 Rappel des résultats généraux dans le cas des bandes bi-infinies $(\mathfrak{B}_h)_{h>0}$

On rappelle qu'une bande horizontale bi-infinie est semi-bornée, c'est-à-dire bornée par sa hauteur et on la définit de manière générale par :

$$\forall h \in \mathbb{N}^*, \quad \mathfrak{B}_h := \Big\{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, 1 \leqslant j \leqslant h\Big\} = \mathbb{Z} \times \{1, \ldots, h\}$$

Dans le précédent chapitre, nous avons vu que lorsque la hauteur $h \in \mathbb{N}^*$ de la bande bi-infinie $\mathfrak{B}_h$ faisait partie de la donnée du problème ce dernier était PSPACE-complet. Autrement dit difficile d'un point de vue de la théorie de la complexité. Pour rendre le problème accessible, nous pouvons fixer au préalable cette hauteur $h > 0$ comme étant un paramètre fixé ne faisant plus partie des données du problème. Nous avons démontré à cette occasion que lorsque la hauteur h est fixée, le problème est facile d'un point de vue de la complexité, puisqu'il existe un algorithme déterministe polynomial voire de coût constant permettant de décider, si étant donné un ensemble fini de tuiles, il existe un pavage de la bande de hauteur $h > 0$ fixée (voir théorèmes VII.6 et VII.9, p. 127 et p. 131) [7]. Dans cette partie on se centre spécifiquement dans le cas où $h \in \{1, 2\}$, c'est-à-dire sur les bandes $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$.

7. Nous invitons la lectrice ou le lecteur à consulter le précédent chapitre pour plus de détails sur le cas général.

2.2 Le cas de la bande bi-infinie $\mathfrak{B}_1$

De prime abord lorsqu'on s'intéresse au problème de pavage d'une bande bi-infinie lorsque $h = 1$ que l'on notera WANG-1-BANDE , on s'aperçoit que la couleur NORD et SUD des tuiles n'est pas importante dans la résolution. En effet ces couleurs n'interviennent pas dans la construction potentielle de notre pavage de la bande $\mathfrak{B}_1$. En outre, une CS assez intuitive nous amène à formuler qu'il suffit d'exhiber un motif rectangulaire horizontalement périodique pour paver une bande de hauteur $h = 1$. Effectivement s'il existe un tel motif $\mathfrak{M}$ avec des tuiles de Wang d'une collection $\mathcal{T}$, alors on peut translater horizontalement ce motif un nombre infini de fois puisque chaque tuile de notre collection, bien qu'elle soit finie, peut être utilisée une infinité de fois dans la construction d'un tel pavage. Ainsi, il suffit donc de répéter ces blocs rectangulaires à gauche et à droite pour démontrer l'existence d'un pavage pour la bande $\mathfrak{B}_1$.

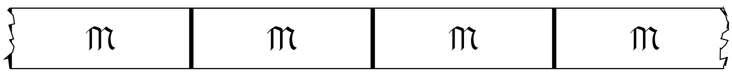


FIGURE VIII.42 – Pavage de la bande $\mathfrak{B}_1$ par translations horizontales d'un même motif rectangulaire $\mathfrak{M}$.

Il est naturel ensuite de se poser la question de savoir si la réciproque est vraie. Autrement dit, démontrer que si la bande $\mathfrak{B}_1$ est pavable par des tuiles d'une collection, alors il existe nécessairement au moins un motif rectangulaire horizontalement périodique. Ceci revient en fait à prouver que l'existence d'un tel motif est une CN pour paver une bande bi-infinie $\mathfrak{B}_1$. Prenons une collection finie $\mathcal{T}$ de $k > 0$ tuiles de Wang. Supposons en effet que la bande $\mathfrak{B}_1$ soit pavable par des tuiles de $\mathcal{T}$, on en déduit alors que tout rectangle de $\mathfrak{B}_1$ est également pavable et en particulier le rectangle de taille $1\times k$. Comme $\#\mathcal{T} = k$ par hypothèse, cela sous-tend que le rectangle $1 \times k$ possède dans le pire des cas un pavage avec les k tuiles distinctes de $\mathcal{T}$. Comme la bande est pavable, on en déduit donc que la $(k + 1)$-ième case possède une tuile qui apparaît déjà dans le pavage des k premières cases. Ceci nous assure donc l'existence d'un motif rectangulaire ayant la même couleur à l'EST et à l'OUEST. Ainsi nous venons de démontrer que l'existence d'un motif rectangulaire horizontalement périodique, c'est-à-dire ayant ici la même couleur à l'EST et à l'OUEST, est une CNS pour paver une bande bi-infinie de hauteur $h = 1$.

En réalité cette CN est assez intuitive puisque, étant donné que l'on dispose d'une collection ayant un nombre fini de tuiles et que, par hypothèse, on sait paver une bande bi-infinie $\mathfrak{B}_1$ avec des tuiles de cette collection, cela sous-tend qu'il existe au moins une tuile qui apparaît un nombre infini de fois dans la construction du pavage. Une conséquence de ce fait est donc, qu'entre deux tuiles identiques, on peut extirper un motif rectangulaire ayant la même couleur sur les bords EST et OUEST. Ceci est dû à un résultat bien connu lié au principe de Dirichlet communément appelé principe des tiroirs ou principe du pigeonnier (*pigeonhole principle*) [8].

Propriété VIII.15 – CNS pour WANG-1-BANDE

Soit $\mathcal{T}$ une collection finie de tuiles de Wang. La bande bi-infinie $\mathfrak{B}_1$ est pavable par des tuiles de $\mathcal{T}$, si et seulement si, il existe au moins un motif rectangulaire horizontalement périodique.

L'existence d'un motif horizontalement périodique est en fait complètement équivalent à l'existence d'un circuit de tuiles, c'est-à-dire d'un chemin ayant des extrémités de la même couleur que l'on peut répéter en quantité infinie.

Définition VIII.5 – Circuit de tuiles

Étant donné une collection $\mathcal{T}$, un circuit de tuiles est tout simplement un motif rectangulaire horizontalement périodique de hauteur un construit avec des tuiles de $\mathcal{T}$.

Maintenant que nous savons qu'il faut et qu'il suffit de montrer l'existence d'un motif rectangulaire ayant la même couleur à l'EST et à l'OUEST, donc d'un circuit de tuiles, pour paver la bande $\mathfrak{B}_1$, nous allons rechercher une procédure algorithmique nous permettant d'exhiber ou non un tel motif.

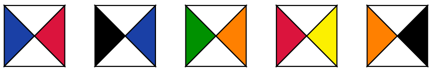
L'idée clé consiste, étant donné un ensemble fini $\mathcal{T}$ de tuiles, à éliminer successivement toutes les tuiles qui ne pourront pas servir à la construction d'un tel pavage de $\mathfrak{B}_1$ pour ne conserver qu'un sous-ensemble $\mathcal{T}^{'} \subseteq \mathcal{T}$ suffisant. Nous avons déjà évoqué le fait que les couleurs NORD et SUD ne sont pas nécessaires dans la recherche d'un motif horizontalement périodique. On s'intéresse donc uniquement aux couleurs EST et OUEST des tuiles de $\mathcal{T}$. Une procédure possible consiste à éliminer successivement les tuiles qui ne pourront pas apparaitre dans la construction d'un pavage de $\mathfrak{B}_1$. Pour ce faire, il convient d'identifier les couleurs qui n'apparaissent que sur les bords EST ou OUEST des tuiles de $\mathcal{T}$, mais pas les deux sinon on pourrait les agencer. La raison est intuitive, en effet supposons que l'on ait une certaine couleur à l'OUEST de quelques tuiles de notre collection qui ne soit pas présente à l'EST d'au moins une tuile de $\mathcal{T}$, ceci impliquerait nécessairement que ces tuiles n'auraient jamais de voisin

8. Le principe du pigeonnier dans le cas infini peut s'énoncer ainsi, on dispose d'un nombre infini de pigeons à répartir dans un nombre fini de cages, ceci a pour conséquence qu'il existe au moins une cage possédant un nombre infini de pigeons. On peut prouver cet énoncé par l'absurde. En effet, supposons que chacune des cages possède un nombre fini de pigeons, comme le nombre de cages est aussi fini, on en déduit donc qu'il ne peut exister qu'un nombre fini de pigeons, ceci est absurde puisque nous disposons d'un nombre de pigeons en quantité infinie. Il existe donc au moins une cage ayant une infinité de pigeons.

à droite. Ainsi, si un tel pavage de $\mathcal{B}_1$ existe, il ne pourrait pas contenir ces tuiles. Cette stratégie par élimination fonctionne aussi lorsqu'on raisonne en premier lieu sur les couleurs EST des tuiles. Il est important de noter que cette stratégie d'élimination de tuiles peut en fait supprimer d'autres tuiles qui, a priori, semblaient utiles dans la construction de $\mathcal{B}_1$. Nous donnons ci-après un exemple qui illustre ce point (exemple VIII.1).

Exemple VIII.1

Considérons la collection $\mathcal{T}$ de cinq tuiles suivante :



τ_1 τ_2 τ_3 τ_4 τ_5

***Figure* VIII.43** – *Exemple d'un ensemble $\mathcal{T}$ de cinq tuiles ne pavant pas la bande $\mathcal{B}_1$*

Commençons arbitrairement avec la première tuile τ_1. Cette tuile possède une couleur bleue à l'EST et la tuile τ_2 possède la même couleur à l'OUEST. Ensuite, on observe que τ_1 possède la même couleur à l'OUEST que la tuile τ_4 à l'EST. La tuile τ_1 semble donc, *a priori*, utile dans la construction d'un pavage de $\mathcal{B}_1$ si ce dernier existe. Passons ensuite à la tuile τ_2, cette dernière a la couleur noire à l'EST tout comme τ_5 à l'OUEST. Comme vu précédemment, la couleur à l'OUEST de τ_2 est la même que la couleur EST de τ_1. Ainsi, pour le moment la tuile τ_2 semble être aussi une tuile utile. La tuile τ_3 possède, quant à elle, une couleur verte à l'EST qui n'apparait pas à l'OUEST d'une autre tuile de $\mathcal{T}$. On peut donc supprimer cette tuile. Néanmoins, il faut faire attention car en supprimant cette tuile on est contraint de supprimer la tuile τ_5 puisqu'elle sera la seule avec une couleur orange à l'OUEST. Mais alors, en supprimant τ_5 on se voit obliger de supprimer également τ_2 qui, a priori, était utile. En effet l'élimination de τ_5 entraine l'élimination de τ_2 puisque cette dernière est la seule tuile à posséder la couleur noire à l'EST. Il reste donc deux tuiles τ_1 et τ_4 potentielles pour la construction d'un pavage de $\mathcal{B}_1$. La tuile τ_4 possède la couleur jaune à l'OUEST mais ce n'est pas le cas de la tuile τ_1 sur son bord EST. De fait la suppression de τ_4 implique aussi l'élimination de τ_1. Cette procédure nous amène donc à un ensemble vide de tuiles restantes, $\mathcal{T}' = \emptyset$. Il est donc impossible de paver $\mathcal{B}_1$ avec des tuiles de la collection $\mathcal{T}$ puisque toutes les tuiles sont inutiles.

L'algorithme dans le langage naturel se déroule ainsi.

Algorithme VIII.3 – WANG-1-BANDE

- On parcourt intégralement l'ensemble de tuiles de $\mathcal{T}$ en supprimant les tuiles inutiles ;
- on s'arrête lorsque $\mathcal{T}^{'} = \emptyset$ et on renvoie que le pavage de $\mathfrak{B}_1$ est impossible ;
- sinon, on retourne un sous-ensemble $\mathcal{T}^{'} \subseteq \mathcal{T}$ suffisant pour la construction d'un pavage de $\mathfrak{B}_1$.

Il est clair qu'après avoir éliminé les tuiles inutiles, si on a l'ensemble $\mathcal{T}^{'}$ qui est vide, c'est-à-dire ne contenant aucune tuile, alors nécessairement le pavage de $\mathfrak{B}_1$ n'existe pas. Par contre si après élimination $\mathcal{T}^{'} \neq \emptyset$, alors cela sous-tend que chaque tuile de $\mathcal{T}^{'}$ peut être connectée — sur son bord EST et OUEST — à une autre tuiles de $\mathcal{T}^{'}$ et donc que les ensembles des couleurs EST $\mathcal{X}_E^{'}$ et OUEST $\mathcal{X}_O^{'}$ de $\mathcal{T}^{'}$ sont identiques. Ainsi, on peut construire un motif rectangulaire horizontalement périodique avec les tuiles de $\mathcal{T}^{'}$. L'existence d'un motif de périodicité horizontale résulte du fait qu'il existe toujours un voisin à droite et à gauche d'une des tuiles de $\mathcal{T}^{'}$ et que cet ensemble est fini puisque $\mathcal{T}^{'} \subseteq \mathcal{T}$ et $\mathcal{T}$ l'est. S'il existe un sous-ensemble non vide $\mathcal{T}^{'}$ de $\mathcal{T}$ tel que $\mathcal{X}_E^{'} = \mathcal{X}_O^{'}$, alors il existe un motif horizontalement périodique qui pave $\mathfrak{B}_1$. Réciproquement, si une bande $\mathfrak{B}_1$ est pavable par des tuiles de $\mathcal{T}$, alors d'après la propriété VIII.15, il existe au moins un motif horizontalement périodique et par conséquent un sous-ensemble $\mathcal{T}^{'}$ non vide de $\mathcal{T}$ tel que $\mathcal{X}_E^{'} = \mathcal{X}_O^{'}$.

Propriété VIII.16 – CNS pour WANG-1-BANDE (bis)

La bande bi-infinie $\mathfrak{B}_1$ est pavable par des tuiles de $\mathcal{T}$, si et seulement si, il existe un sous-ensemble $\mathcal{T}^{'} \subseteq \mathcal{T}$ tels que $\mathcal{T}^{'} \neq \emptyset$ et $\mathcal{X}_O^{'} = \mathcal{X}_E^{'}$.

Un changement de point de vue permet de résoudre le problème WANG-1-BANDE dans le cas des graphes. En effet, on peut par un changement de représentation, amener à modéliser une tuile de Wang comme un graphe orienté étiqueté à la manière des automates (voir p. ex., Culik II, 1996 ; Jeandel et Rao, 2015 ; Kari, 1996) En outre, comme les couleurs NORD et SUD n'interviennent pas dans la construction d'un pavage d'une bande de hauteur $h = 1$, une modélisation de tuiles par un graphe orienté sans étiquette suffit.

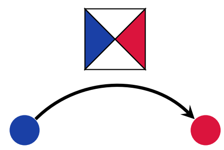


FIGURE VIII.44 – Modélisation et changement de représentation d'une tuile de Wang par un graphe orienté.

Étant donné une collection de tuiles de Wang, on définit le graphe orienté $G(V,A)$ où V est l'ensemble des sommets représentant les couleurs EST et OUEST de la collection de tuiles reliés par des arcs $a \in A$, lorsqu'il existe une tuile possédant ces deux couleurs sur les bords EST et OUEST. Le choix des arcs à la place des arêtes se justifie par le fait que si l'on n'oriente pas le graphe représentant les tuiles cela sous-tend qu'il existe, pour chaque tuile, une tuile symétrique. Or, ceci est évidemment impossible d'après la règle du jeu puisque les rotations et les réflexions sont interdites.

D'un point de vue de la théorie des graphes, le problème WANG-1-BANDE peut être modélisé à l'aide d'un graphe orienté et revient en fait à résoudre un problème de recherche de CIRCUIT dans un graphe orienté. Dans la littérature experte, il existe principalement deux algorithmes déterministes permettant de résoudre, en temps polynomial, le problème CIRCUIT. Ces deux algorithmes sont ceux utilisant un algorithme de parcours de graphe en profondeur (DFS, *Depth-First Search*) ou en largeur (BFS, *Breadth First Search*) . Ils ont tous deux une complexité en temps dans le pire des cas de l'ordre de $\mathcal{O}(\#A + \#V)$ où $\#A$ et $\#V$ sont respectivement les nombres d'arcs et de sommets de G (Dasgupta, Papadimitriou et Vazirani, 2008). Par exemple pour détecter ou non la présence d'un circuit dans un graphe orienté G, il faut et il suffit de détecter au moins un arc retour lorsqu'on utilise l'algorithme du parcours en profondeur (DFS) dans G. Ceci nous assure de l'existence ou non d'un circuit dans G, et donc permet aussi d'inférer l'existence d'un circuit de tuiles pour paver $\mathfrak{B}_1$. L'algorithme DFS couplé à la recherche d'un arc retour fonctionne de la manière suivante : on part d'un sommet arbitraire s de G et on poursuit le chemin jusqu'à ce qu'on soit bloqué, autrement dit, jusqu'à ce qu'un de ces sommets ne possède plus de descendant. On effectue alors un retour sur trace sur le premier sommet où il est possible d'atteindre un autre chemin. L'algorithme DFS s'arrête dès lors que tous les sommets de G ont été visités, dans ce cas cela signifie que G ne contient pas de circuit ou bien lorsqu'il atteint un sommet qui a déjà été visité. En effet, cela sous-tend dans ce dernier cas, l'existence d'un arc retour partant d'un descendant vers un ascendant et permet donc d'exhiber un circuit dans G.

Théorème VIII.7 – Complexité de WANG-1-BANDE par les graphes

Le problème d'existence d'un circuit de tuiles WANG-1-BANDE est résoluble en temps polynomial grâce à une modélisation par les graphes. Ainsi, WANG-1-BANDE $\in \mathcal{P}$.

Nous donnons ci-après un exemple permettant de détecter un circuit de tuiles à partir de l'algorithme DFS. On considère la collection $\mathcal{T}$ de tuiles suivante et son graphe orienté G associé.

Exemple VIII.2

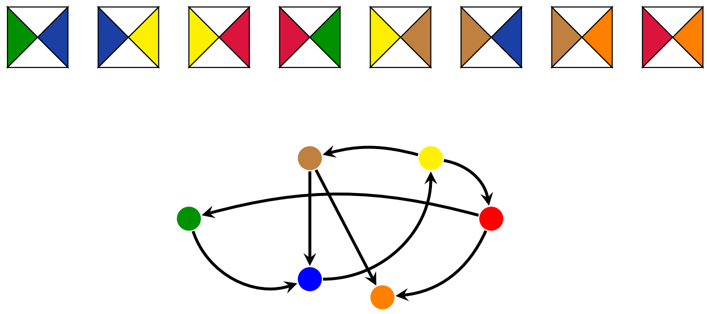
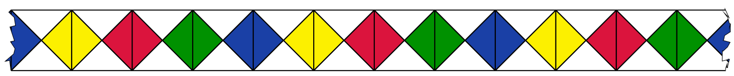


FIGURE VIII.45 – Exemple d'un ensemble de tuiles $\mathcal{T}$ et son graphe G associé.

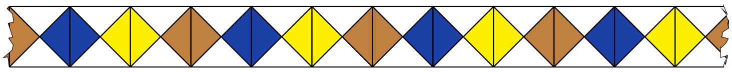
Partons d'un sommet arbitraire $s(\bullet)$. À partir de ce dernier, deux choix de descendant sont possibles les sommets $s(\bullet)$ ou $s(\bullet)$. Choisissons par exemple de visiter $s(\bullet)$, à cet instant on se retrouve bloqué puisque ce sommet ne possède pas d'arc sortant. On peut donc l'éliminer de la liste des sommets restant à visiter. On revient en arrière, on doit donc aller sur le sommet $s(\bullet)$, on poursuit alors nécessairement sur le sommet $s(\bullet)$. Deux choix de parcours sont possibles, poursuivre soit sur $s(\bullet)$, soit sur $s(\bullet)$. Choisissons le sommet $s(\bullet)$, qui n'est d'ailleurs pas le meilleur choix. A partir de $s(\bullet)$ on peut aller uniquement sur $s(\bullet)$ puisque le sommet $s(\bullet)$ a déjà été visité et a été éliminé. On poursuit le parcours de $s(\bullet)$ à $s(\bullet)$ qui a déjà été visité mais non supprimé. On est donc en présence d'un arc retour et donc cela permet de détecter un circuit de G associé à la collection $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{C} = < s(\bullet)s(\bullet)s(\bullet)s(\bullet)s(\bullet) >$$

L'existence d'un circuit dans G nous permet d'affirmer l'existence d'un circuit de tuiles pour paver $\mathfrak{B}_1$ à l'aide d'un motif horizontalement périodique. Néanmoins rien ne garantit que le circuit exhibé est optimal dans le sens qu'il utilise le moins de tuiles possibles. En effet, l'exemple précédent nous a permis d'exhiber un circuit de tuiles avec quatre tuiles (figure VIII.46, a) mais cette solution n'est pas optimale, puisqu'il existe aussi un circuit de tuiles utilisant seulement trois tuiles (figure VIII.46, b). C'est d'ailleurs l'optimum puisqu'il n'existe aucun autre circuit avec seulement une ou deux tuiles — nous laissons la lectrice ou le lecteur s'en convaincre.



(a)



(b)

Figure VIII.46 – *Pavages de la bande $\mathfrak{B}_1$ avec un circuit de quatre tuiles (a) et un circuit minimal de trois tuiles (b).*

Un problème connexe à CIRCUIT est le problème MIN-CIRCUIT qui vise à déterminer le circuit optimal, c'est-à-dire le circuit le plus court d'un graphe orienté $G(V,A)$ en l'occurrence la maille de G. De manière générale, MIN-CIRCUIT dans sa version « optimisation » est un problème $\mathcal{NP}$-difficile et sa version décisionnelle à savoir, existe-il un circuit C de G tel que sa longueur $l(C) \leqslant k$ avec $k \leqslant \#A$ et où le poids des arcs $l(a) \in \mathbb{Z}$ pour tout $a \in A$, est $\mathcal{NP}$-complet (Garey et Johnson, 1979, p. 214). Néanmoins dans certains cas le problème MIN-CIRCUIT est dans $\mathcal{P}$ puisqu'il a été démontré qu'il existe un algorithme déterministe polynomial en la taille du graphe qui permet de résoudre MIN-CIRCUIT en $\mathcal{O}(nm)$ (Itai et Rodeh, 1978), notamment lorsque $l(a) \in \mathbb{Z}_+$ pour tout $a \in A$. On pourrait donc non plus s'intéresser au problème WANG-1-BANDE mais plutôt au problème MIN-WANG-1-BANDE , c'est-à-dire rechercher un circuit minimal de tuiles permettant de paver $\mathfrak{B}_1$. Ceci revient en fait à résoudre MIN-CIRCUIT lorsque l'on modélise l'ensemble des tuiles par un graphe orienté $G(V,A)$ où les sommets sont les couleurs est et ouest des tuiles et où toutes les longueurs des arcs $l(a) = 1$. Ainsi, MIN-WANG-1-BANDE $\in \mathcal{P}$.

Propriété VIII.17 – Complexité de MIN-WANG-1-BANDE

Le problème de circuit de tuiles minimal MIN-WANG-1-BANDE est résoluble en temps polynomial. Ainsi, MIN-WANG-1-BANDE $\in \mathcal{P}$

Un problème tout aussi intéressant serait de se questionner sur le problème dual à MIN-WANG-1-BANDE. En effet, au lieu de chercher un circuit de tuiles de taille minimale, on pourrait se poser la question du circuit de tuiles de taille maximale, c'est-à-dire le circuit contenant le plus de tuiles possible. Le problème MAX-WANG-1-BANDE serait en fait équivalent au problème de recherche MAX-CIRCUIT . En effet, en modélisant un ensemble de tuiles comme un graphe orienté $G(V,A)$, on cherche en fait à déterminer la longueur du circuit le plus long dans G. Dans la littérature, MAX-CIRCUIT dans sa version décisionnelle est NP-complet (Garey et Johnson, 1979, p. 214) même lorsque le poids des arcs vaut 1 ce qui rend également de manière générale le problème MAX-WANG-1-BANDE lui aussi difficile d'un point de vue de la complexité. Il existe clairement un vérificateur polynomial en la taille de la collection de tuiles qui permet de vérifier si la longueur du circuit est supérieure ou égale à l'entier k : MAX-WANG-1-BANDE $\in \mathcal{NP}$. En outre, on peut effectuer une réduction polynomiale du problème MAX-CIRCUIT à MAX-WANG-1-BANDE en codant chaque arc de G par une tuile dont les couleurs EST et OUEST sont les extrémités des arcs. Ainsi une solution à MAX-CIRCUIT est aussi une solution à MAX-WANG-1-BANDE, ce dernier étant au moins aussi difficile que MAX-CIRCUIT, il est aussi $\mathcal{NP}$-complet.

Propriété VIII.18 – Complexité de MAX-WANG-1-BANDE

Le problème de circuit de tuiles maximal MAX-WANG-1-BANDE est complet pour la classe $\mathcal{NP}$.

Un autre problème très proche est de ne plus considérer une solution valide au problème WANG-1-BANDE avec seulement un sous-ensemble de tuiles mais de considérer une solution valide lorsque exactement toutes les tuiles de la collection sont utilisées une et une seule fois dans un circuit. Là encore en modélisant notre ensemble de tuiles par un graphe orienté $G(V,A)$ cela revient en fait à déterminer l'existence d'un circuit passant une et une seule fois par tous les arcs d'un graphe. Ce problème est bien connu en théorie des graphes sous le nom de problème EULERIEN . À ce propos une CNS due à Euler et Hierholzer a été établie concernant l'existence d'un tel circuit dans G (Euler, 1741 ; Hierholzer et Wiener, 1873) et, par exemple, l'algorithme de Fleury dans le cas d'un graphe orienté permet d'en exhiber un exemple en un temps polynomial (Rigo, 2009).

Théorème VIII.8 – CNS Euler-Hierholzer

Soit $G(V,A)$ un graphe orienté et fortement connexe, $G(V,A)$ admet un circuit eulérien, si et seulement si, tout sommet $a \in A$ a autant d'arcs entrants que d'arcs de sortie, autrement dit, pour tout $a \in A$, $\deg_+(a) = \deg_-(a)$.

Une conséquence directe de ce théorème permet de formuler le résultat suivant pour le problème EULERIEN-WANG-1-BANDE.

Corollaire VIII.8 – CNS EULERIEN-WANG-1-BANDE

Soit $\mathcal{T}$ une collection de tuiles et $G(V,A)$ son graphe orienté associé. $\mathfrak{B}_1$ possède un pavage valide utilisant toutes les tuiles de $\mathcal{T}$ une et une seule fois dans son motif horizontalement périodique, si et seulement si, son graphe associé G est eulérien.

Attention, la condition d'euleriennicité de G n'est qu'une CS si l'on omet le fait que les tuiles apparaissent une et une seule fois dans le motif horizontalement périodique. En effet, il est clair que si G est eulérien et modélise la collection de tuiles, alors il en découle naturellement qu'il existe un circuit de tuiles possédant — une et une seule fois — toutes les tuiles. Par contre cette CS n'est pas une CN pour avoir un circuit avec toutes les tuiles. En effet, il est facile de construire un contre-exemple qui montre que la bande bi-infinie $\mathcal{B}_1$ peut être pavée avec toutes les tuiles d'une collection sans pour autant que le graphe associé à la collection de tuiles soit eulérien (voir exemple VIII.3).

Exemple VIII.3

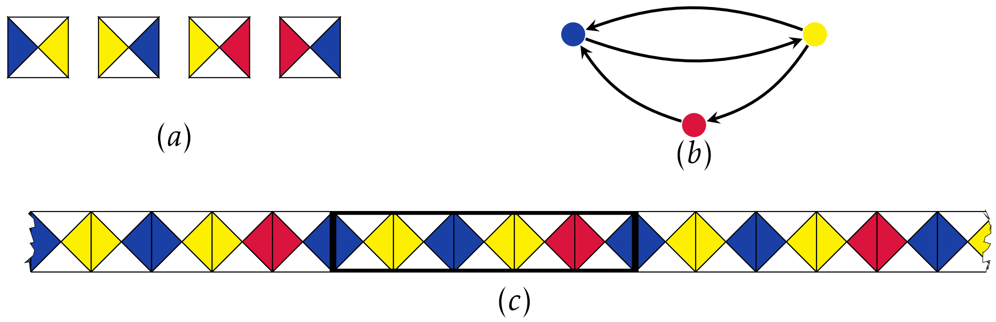


Figure VIII.47 – *Ensemble de tuiles (a) pavant la bande $\mathcal{B}_1$ avec toutes les tuiles (c) sans pour autant que son graphe associé (b) soit eulérien.*

En outre, si le graphe associé à $\mathcal{T}$ est eulérien, c'est-à-dire qu'il possède un circuit passant une et une seule fois par chaque arc du graphe, il en découle naturellement qu'il existe un motif horizontalement périodique possédant toutes les tuiles de la collection pour lequel chaque tuile apparaît une et une seule fois dans le motif. Ce dernier permet donc de paver $\mathcal{B}_1$ par translations, à gauche et à droite, de ce motif. Le fait que G soit eulérien permet en plus de donner une condition équivalente et affinée sur les couleurs EST et OUEST de la collection que nous décrivons ci-après.

Corollaire VIII.9

Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des couleurs EST et OUEST d'une collection de tuiles $\mathcal{T}$. $\mathcal{B}_1$ possède un pavage valide utilisant toutes les tuiles de $\mathcal{T}$ une et une seule fois dans son motif horizontalement périodique, si et seulement si, pour chaque couleur de $\mathcal{X}$, le nombre de fois où elle apparaît à l'EST est égal au nombre de fois où elle apparaît à l'OUEST de la collection.

Il est important de noter que le choix sur la modélisation des couleurs EST et OUEST des tuiles par des sommets de G est extrêmement important d'un point de vue de la complexité du problème. En effet, naïvement on aurait pu faire le choix de représenter les sommets du graphe comme un couple de couleurs EST et OUEST pour chacune des tuiles. Ainsi le problème EULERIEN-WANG-1-BANDE se serait transformé, par changement de représentation des tuiles, au problème HAMILTONIEN-WANG-1-BANDE. En effet, il ne serait plus relatif à un problème de recherche de circuit eulérien dans un graphe orienté mais serait lié à un problème HAMILTONIEN, c'est-à-dire rechercher l'existence d'un circuit passant par tous les sommets de G une et une seule fois [9]. Ce problème a été démontré comme étant difficile d'un point de vue de la complexité puisqu'il est $\mathcal{NP}$-complet et que par hypothèse, on suppose que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ (Garey et Johnson, 1979; Karp, 1972). Il est facile de montrer la complétude pour la classe $\mathcal{NP}$ de HAMILTONIEN-WANG-1-BANDE en le réduisant à partir du problème HAMILTONIEN dans un graphe orienté. Le choix de représentation des tuiles dans la modélisation est donc important puisque il modifie drastiquement la complexité du problème, passant d'un problème résoluble en temps polynomial, à un problème $\mathcal{NP}$-complet.

Dans le prochain paragraphe on va cette fois-ci s'intéresser à la bande bi-infinie de hauteur $h = 2$.

2.3 Le cas de la bande bi-infinie $\mathfrak{B}_2$

Pour le problème WANG-2-BANDE, tout d'abord, si pour chacune des tuiles de notre collection $\mathcal{T}$ on a la même couleur au NORD et au SUD cela revient à résoudre le problème WANG-1-BANDE, puisqu'on ne se préoccupe finalement pas des couleurs NORD et SUD, donc des assemblages verticaux. Pour savoir si la bande $\mathfrak{B}_2$ est pavable, il faut et il suffit alors, de démontrer l'existence d'un circuit de tuiles ayant une hauteur $h = 1$. Donc, se ramener au problème WANG-1-BANDE.

Exemple VIII.4

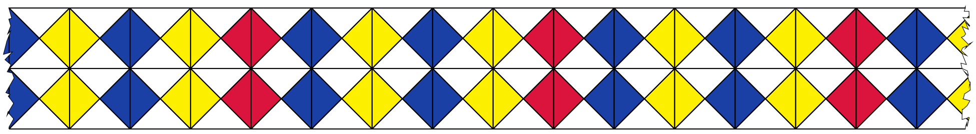


Figure VIII.48 – *Exemple de pavage d'une bande bi-infinie de hauteur $h = 2$ ayant des tuiles avec les mêmes couleurs au NORD et au SUD.*

Propriété VIII.19 – CNS WANG-2-BANDE où $\tau_N = \tau_S$

Soit $\mathcal{T}$ une collection de tuiles telle que pour chaque tuile de $\mathcal{T}$, $\tau_N = \tau_S$ alors, WANG-2-BANDE est résoluble si et seulement si WANG-1-BANDE est résoluble. Dans ce cas ce problème est aussi dans $\mathcal{P}$.

A présent, considérons le cas où les couleurs NORD et SUD des tuiles ne sont pas toutes identiques.

9. Le lectorat intéressé sur le travail de modélisation eulérienne/hamiltonienne concernant le problème classique d'alignement de dominos pourra se référer aux travaux de Cartier (2008).

On sait que pour paver une bande horizontale de hauteur $h = 2$, il faut et il suffit qu'il existe un motif que l'on puisse translater horizontalement. Ce motif peut prendre différentes formes. On peut supposer que le motif horizontal supérieur est un rectangle de taille $p \times 1$ car si ce motif était en deux parties, par connexité avec la bande inférieure, on aurait un espace non pavé sur la bande supérieure. En raisonnant de manière analogue, le motif horizontal inférieur sera lui aussi un rectangle de taille $q \times 1$. Or, si la bande $\mathfrak{B}_2$ est pavable, nous devons pouvoir connecter le motif supérieur et inférieur entre eux. Ainsi, $p = q$.

Exemple VIII.5

Par exemple, pour paver la bande $\mathfrak{B}_2$ avec trois tuiles, nous aurons, si cette dernière est pavable, trois motifs différents à réflexion près.

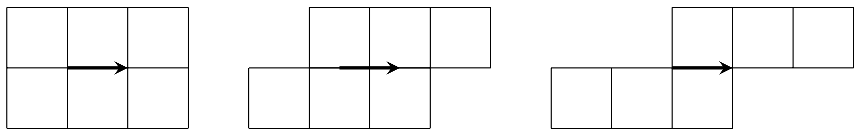


FIGURE VIII.49 – Exemple de motifs possibles pour paver $\mathfrak{B}_2$ avec trois tuiles.

Dans le précédent chapitre, le théorème VII.1 des motifs périodiques (p. 109) permet d'affirmer que si un motif existe pour paver la bande $\mathfrak{B}_2$ par translations, alors il existe nécessairement un motif rectangulaire horizontalement périodique.

En outre, si on prend une collection $\mathcal{T}$ de $k > 0$ tuiles de Wang. En supposant que la bande $\mathfrak{B}_2$ soit pavable, alors on peut paver n'importe quel rectangle de hauteur $h = 2$, en particulier le rectangle de longueur k^2. En effet, comme on a $\#\mathcal{T} = k$ tuiles, on peut au mieux effectuer k^2 blocs verticaux 1×2 valides et construire dans le pire des cas un rectangle de taille $k^2 \times 2$ avec les k^2 blocs. Mais alors le bloc de la $(k^2 + 1)$-ieme position sera déjà présent dans le motif rectangulaire de longueur k^2. Ceci assure l'existence d'un motif rectangulaire périodique. Ainsi, si la bande de hauteur $h = 2$ est pavable alors il existe un motif rectangulaire horizontalement périodique de hauteur $h = 2$. La réciproque est également vraie, par translations horizontales d'un motif horizontalement périodique, on pave $\mathfrak{B}_2$. Ainsi on a la CNS suivante.

Propriété VIII.20 – CNS WANG-2-BANDE

Soit $\mathcal{T}$ une collection finie de tuiles de Wang. La bande bi-infinie $\mathfrak{B}_2$ est pavable par des tuiles de $\mathcal{T}$, si et seulement si, il existe au moins un motif rectangulaire horizontalement périodique de hauteur $h = 2$.

Un moyen de démontrer l'existence d'un pavage bi-infini pour $\mathfrak{B}_2$ est de construire tous les assemblages verticaux possibles avec deux tuiles de Wang et d'ensuite chercher un circuit possible avec ces assemblages de tuiles.

Algorithme VIII.4 – WANG-2-BANDE

- On parcourt intégralement l'ensemble de tuiles de $\mathcal{T}$ en supprimant les tuiles inutiles, c'est-à-dire les tuiles qui ne peuvent pas former de blocs verticaux ;
- on s'arrête lorsque $\mathcal{T}^{'} = \emptyset$ et on renvoie que le pavage de $\mathfrak{B}_2$ est impossible ;
- sinon, on retourne un sous-ensemble $\mathcal{T}^{'} \subseteq \mathcal{T}$ suffisant pour la construction des blocs verticaux 1×2.
- On réitère la procédure cette fois-ci en parcourant intégralement l'ensemble des blocs de $\mathcal{T}^{'}$ en supprimant les blocs inutiles.
- on s'arrête lorsque $\mathcal{T}^{''} = \emptyset$ et on renvoie que le pavage de $\mathfrak{B}_2$ est impossible ;
- sinon, on retourne un sous-ensemble $\mathcal{T}^{''} \subseteq \mathcal{T}^{'}$ suffisant pour la construction d'un motif horizontalement périodique par concaténation de blocs verticaux valides.

On aurait pu également « inverser » la procédure en supprimant d'abord les tuiles inutiles, c'est-à-dire celles qui ne peuvent pas avoir de voisin à gauche et à droite. Ainsi, si cette nouvelle collection $\mathcal{T}^{'}$ est non vide, on construit alors tous les blocs verticaux 1×2 valides. Ces blocs constituent l'ensemble des empilements de deux tuiles $(\tau, \tau^{'}) \in \mathcal{T}^{'} \times \mathcal{T}^{'}$ défini sur l'ensemble des couleurs de la collection $\mathcal{X} \cup (\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ et tel que $\tau_N = \tau^{'}_S$. Il reste ensuite à chercher un circuit avec ces empilements. Pour faciliter la recherche d'un circuit, on peut voir les bords des empilements EST et OUEST comme une seule couleur... Cette procédure se généralise pour des bandes bi-infinies d'une hauteur $h > 2$ (voir WANG-h-BANDE).

À cette occasion, une conséquence directe des théorèmes VII.8 et VII.9 donnés pour le problème WANG-h-BANDE permet d'affirmer que WANG-2-BANDE peut être résolu en temps polynomial en utilisant l'approche par les graphes et les algorithmes classiques de recherche circuits du type BFS ou DFS (voir p. 130) . Ce problème peut aussi être résolu par un algorithme à coût constant en utilisant l'approche par l'algèbre des chemins (voir p. 131).

Corollaire VIII.10 – Complexité de WANG-2-BANDE

WANG-2-BANDE est résoluble en temps polynomial ou constant selon l'approche utilisée.

Enfin, on peut bien entendu transformer le problème WANG-2-BANDE initial en recherchant des pavages spécifiques, c'est-à-dire des pavages formés par d'autres types de circuit de tuiles : maximal, minimal, eulérien comme pour le problème WANG-1-BANDE.

3 Le problème de Wang dans le plan $\mathbb{Z}^2$ avec certaines familles $(\mathscr{F}_i)_{i\in\{1,2,3\}}$

Dans le précédent chapitre nous avons vu que dans le cas général le problème WANG-PLAN était indécidable. En revanche, lorsqu'on se restreignait à des collections de tuiles d'au plus trois couleurs, le problème était alors décidable mais les preuves, hormis le cas trivial d'une couleur, étaient très techniques (Chen, Hu, Lai et Lin, 2014; Hu et Lin, 2011). Pour rendre le problème dans $\mathbb{Z}^2$ accessible, on va s'intéresser aux cas où les collections de tuiles possèdent au plus deux couleurs distinctes par tuile dans un ensemble fini $\mathcal{X}$ de couleurs.

- La famille $\mathscr{F}_1$ qui représente les tuiles à une couleur.
- La famille $\mathscr{F}_2$ qui représente les tuiles à deux couleurs distinctes dont l'une recouvre exactement trois secteurs.
- La famille $\mathscr{F}_3$ qui représente les tuiles à deux couleurs distinctes dont chacune de ces couleurs recouvre exactement deux secteurs.

On s'intéresse donc au problème de décision suivante : WANG-PLAN-$\mathscr{F}_i$ où $i = \{1,2,3\}$.

- *Instance*. Une collection de tuiles de la famille $\mathscr{F}_i$ avec $i = 1,2$ ou 3.
- *Question*. Est-il possible de paver le plan discret $\mathbb{Z}^2$ avec des tuiles de $\mathcal{F}_i$?

3.1 Le cas de la famille $\mathscr{F}_1$

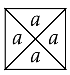


Figure VIII.50 – *Type de tuiles de la famille $\mathscr{F}_1$ où a est une couleur arbitraire de $\mathcal{X}$.*

Ce cas est trivial, puisque ce type de tuiles est autopavant. En effet, une tuile de ce type suffit à elle seule pour recouvrir le plan discret.

Exemple VIII.6

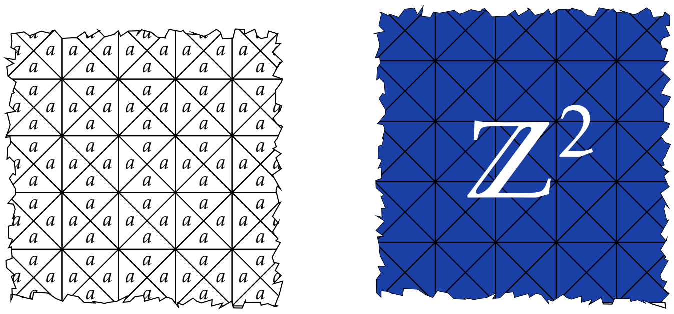


FIGURE VIII.51 – *Pavage de $\mathbb{Z}^2$ avec une tuile de la famille $\mathscr{F}_1$*

Propriété VIII.21 – WANG-PLAN-$\mathscr{F}_1$

Toute collection de la famille $\mathscr{F}_1$ pave périodiquement le plan discret.

On obtient même un résultat plus général à savoir.

Propriété VIII.22

Toute collection de tuiles possédant au moins une tuile de $\mathscr{F}_1$ pave $\mathbb{Z}^2$ périodiquement.

3.2 Le cas de la famille $\mathscr{F}_2$

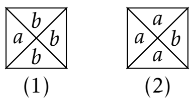


FIGURE VIII.52 – *Types de tuiles de la famille $\mathscr{F}_2$ où a et b sont des couleurs arbitraires de $\mathcal{X}$.*

Soient $\mathcal{T}$ une collection finie de tuiles de Wang de la famille $\mathscr{F}_2$ et $\mathcal{X}$ un ensemble fini de p couleurs tel que :

$$\mathcal{X} = \left\{a_0, a_1, \ldots, a_{p-1} \quad | \quad 0 \leqslant i < j < p, \quad a_i \neq a_j\right\}$$

Dans cette section on ne traitera que le cas des tuiles de type 1 (figure VIII.52.1), puisque ce type de tuiles est équivalent aux tuiles de type 2 (figure VIII.52.2) dans notre problème.

Dans cette famille on a pour chacune des tuiles $\tau_N = \tau_S$. Ce problème se réduit donc en fait à la recherche d'un circuit de tuiles pour la bande de hauteur $h = 1$ (WANG-1-BANDE). En effet, si un tel circuit existe, il suffira ensuite de translater cette bande verticalement pour paver le plan (figure VIII.53). Ainsi, on a le résultat suivant.

Propriété VIII.23 – WANG-PLAN-$\mathscr{F}_2$

Soit $\mathcal{T}$ une collection de tuiles de la famille $\mathscr{F}_2$. Le pavage du plan est décidable et le plan $\mathbb{Z}^2$ est pavable, si et seulement si, il existe un pavage pour la bande bi-infinie de hauteur $h = 1$.

Ce pavage est en plus un pavage périodique. Effectivement on a démontré que la bande de hauteur $h = 1$ est pavable si et seulement si il existe un motif rectangulaire horizontalement périodique. Ce motif est, dans le cas des tuiles de la famille $\mathscr{F}_2$, également verticalement périodique. Ainsi le pavage du plan obtenu, s'il existe, est bien périodique. Le fait qu'il existe un algorithme permettant de détecter un circuit de tuiles et donc un pavage du plan rend décidable le problème WANG-PLAN-$\mathscr{F}_2$. Ce problème est même dans $\mathcal{P}$ puisque le problème de détecter un circuit de tuiles WANG-1-BANDE l'est.

Exemple VIII.7

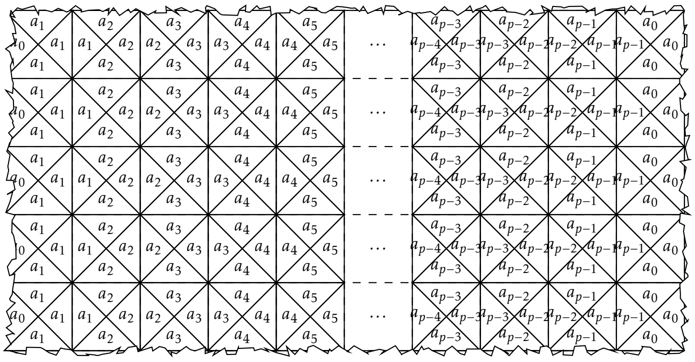


FIGURE VIII.53 – Un exemple de pavage périodique du plan avec des tuiles de la famille $\mathscr{F}_1$

Nous renvoyons le lecteur ou la lectrice à la section concernant le pavage de la bande bi-infinie de hauteur $h = 1$ pour plus de précision.

3.3 Le cas de la famille $\mathscr{F}_3$

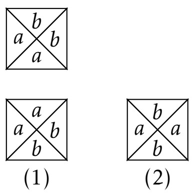


FIGURE VIII.54 – Types de tuiles de la famille $\mathscr{F}_3$ où a et b sont des couleurs arbitraires de $\mathcal{X}$.

Les tuiles de type 2 de la famille $\mathscr{F}_3$ sont autopavantes (figure VIII.54, (2)). En effet, on a pour chaque tuile de ce type $\tau_N = \tau_S$ et $\tau_E = \tau_O$. Ainsi, on peut translater cette tuile horizontalement et verticalement pour paver $\mathbb{Z}^2$.

Exemple VIII.8

En prenant l'exemple d'une tuile de type 2 de la famille $\mathscr{F}_3$, on exhibe facilement un pavage périodique du plan.

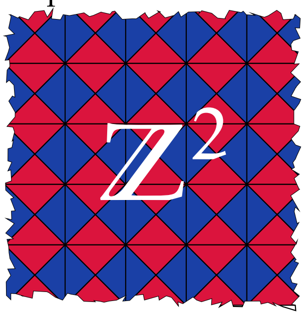


Figure VIII.55 – Exemple d'un pavage de $\mathbb{Z}^2$ avec une tuile autopavante de type 2 de la famille $\mathscr{F}_3$.

Propriété VIII.24 – WANG-PLAN-$\mathscr{F}_3$ de type 2

Toute collection de tuiles $\mathcal{T}$ possédant au moins une tuile de type 2 de la famille $\mathscr{F}_3$ permet de paver $\mathbb{Z}^2$ périodiquement.

Concernant le type 1 (figure VIII.54 (1)), prenons arbitrairement les tuiles coupées dans le sens /[10]. Supposons à présent que notre collection finie $\mathcal{T}$ de tuiles coupées dans ce sens pave une bande de hauteur $h = 1$. Alors, il est possible de paver le plan $\mathbb{Z}^2$. Prenons un exemple pour illustrer nos propos.

Exemple VIII.9

Considérons la collection $\mathcal{T}$ de tuiles ci-après.

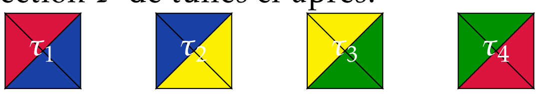
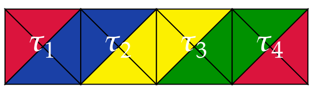


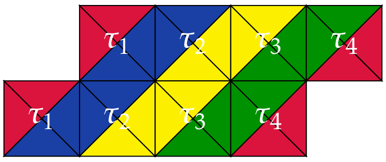
Figure VIII.56 – Exemple d'une collection de tuiles de la famille $\mathscr{F}_3$ coupées dans le sens /.

Le motif rectangulaire formé avec ces tuiles pave la bande de hauteur $h = 1$ puisqu'il peut être translaté horizontalement.



10. Le raisonnement est similaire pour les tuiles coupées dans le sens \

On observe que l'on peut paver la bande du dessous en translatant ce motif d'un carreau vers la gauche et d'un carreau vers le bas.



En fait nous n'avons pas vraiment le choix puisque la première tuile τ_1 possède une couleur bleue au sud. De fait la couleur de la tuile du dessous devra nécessairement posséder une couleur bleue au nord. Comme les tuiles sont coupées dans le sens /. Elle aura également une couleur bleue à l'ouest. En outre, la deuxième tuile τ_2 possède une couleur jaune au sud. De fait, la tuile du dessous devra nécessairement avoir une couleur jaune au nord (resp. à l'ouest) pour les mêmes raisons qu'évoquées précédemment. Ainsi la tuile en dessous de τ_1 sera nécessairement la tuile τ_2. En raisonnant de manière analogue, on démontre l'obligation de translater le motif d'un carreau vers la gauche et vers le bas (resp. vers la droite et vers le haut). En réitérant le processus, on pave ainsi le plan $\mathbb{Z}^2$ et on extrait même un motif carré périodique (figure VIII.57 et VIII.58).

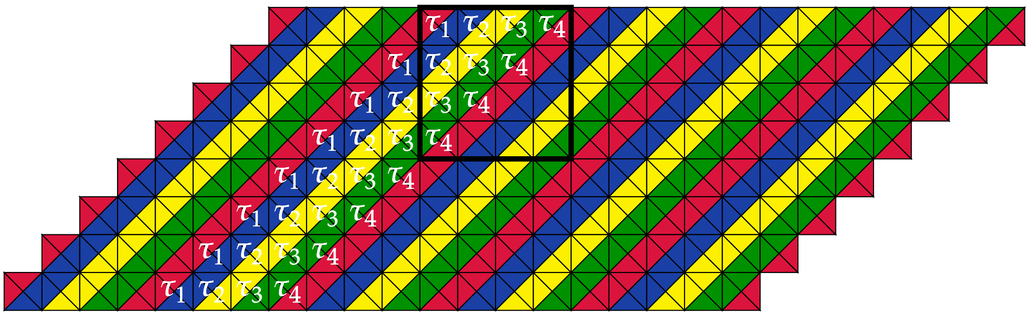


Figure VIII.57 – *Itérations des translations de bandes dans le processus de construction d'un pavage du plan avec des tuiles coupées dans le sens / de la famille $\mathscr{F}_3$.*

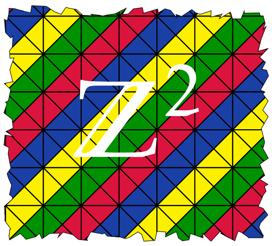


Figure VIII.58 – *Extrait d'un pavage périodique du plan avec des tuiles coupées dans le sens / de la famille $\mathscr{F}_3$.*

L'exemple donné précédemment se généralise sans encombre. Considérons une collection de tuiles de type 1 de la famille $\mathscr{F}_3$ et un ensemble de couleurs $\mathcal{X}$ tel que :

$$\mathcal{X} = \left\{ a_0, a_1, \ldots, a_{p-1} \quad | \quad 0 \leqslant i < j < p, \quad a_i \neq a_j \right\}$$

Supposons qu'il existe un circuit de tuiles pavant la bande de hauteur $h = 1$. On peut, par un raisonnement de translations analogue, paver le plan $\mathbb{Z}^2$ (figure VIII.59). La réciproque de ce résultat est évidente.

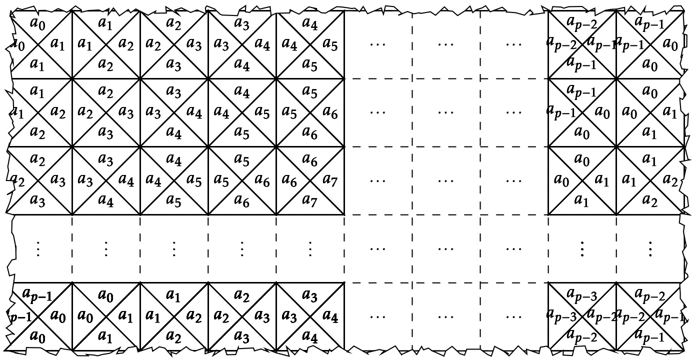


***Figure VIII.59** – Extrait d'un pavage de $\mathbb{Z}^2$ avec des tuiles de type 1 de la famille $\mathscr{F}_3$*

.

On a ainsi la propriété suivante.

Propriété VIII.25

Si la bande horizontale de hauteur $h = 1$ avec des tuiles de type 1 de la famille $\mathscr{F}_3$ est pavable, alors il est possible de paver le plan périodiquement.

Il reste à savoir à présent si ce pavage est nécessairement périodique (Debrabant et Busser, 2018). Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un pavage du plan mais que ce pavage n'est pas périodique. Autrement dit, qu'il existe un pavage apériodique.

Si l'on considère le graphe orienté $G'(V', A')$ de telle sorte que V' représente l'ensemble des sommets de couleurs des tuiles et A' l'ensemble des arcs orientés (u', v'), pour chaque tuile du type 1 (coupée dans le sens /) (figure VIII.54). Comme ce pavage est apériodique, il ne peut pas exister un motif rectangulaire périodique qui laisse le pavage du plan invariant par translations. Du point de vue d'un graphe, on suppose que G' ne possède pas de circuit. Comme il y a un nombre fini de couleurs, il existe au moins une tuile qui ne possède pas de « voisin » à droite avec les tuiles coupées dans le sens /, on doit alors nécessairement prendre une tuile « coupée » dans le sens inverse . On réitère nécessairement la même procédure à l'étape suivante (étape 2). Finalement, la dernière tuile est du type , ce qui est bien évidemment contradictoire avec l'hypothèse de départ. Conclusion, tous les pavages du plan sont nécessairement périodiques.

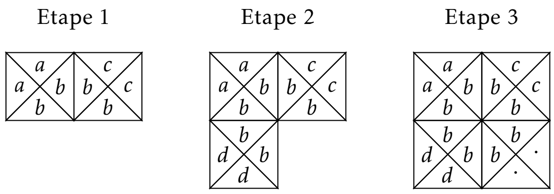


Figure VIII.60 – *Différentes étapes pour démontrer l'inexistance de pavage apériodique pour la famille $\mathscr{F}_3$ de type 1.*

On a donc démontré que si le plan est pavable, alors nécessairement il est pavable de façon périodique. De fait le problème WANG-PLAN-$\mathscr{F}_3$ est aussi un problème décidable, puisqu'un algorithme de recherche de circuit permet d'y répondre. Ainsi, d'après ce qui précède et la propriété VIII.25 précédente (p. 206), on vient de démontrer la CNS suivante.

Propriété VIII.26 – CNS WANG-PLAN-$\mathscr{F}_3$ de type 2

WANG-PLAN-$\mathscr{F}_3$ est décidable, de complexité algorithmique polynomiale et le plan $\mathbb{Z}^2$ est périodiquement pavable , si et seulement si, il existe un circuit de tuiles pavant la bande de hauteur $h = 1$. Autrement dit s'il existe un motif rectangulaire horizontalement périodique de hauteur $h = 1$

Les problèmes WANG-PLAN-$\mathscr{F}_i$ pour $i = 1, 2$ ou 3, où le nombre de couleurs différentes sur les tuiles est d'au plus deux couleurs, sont donc décidables pour chaque i puisque tous les pavages du plan, s'ils existent, sont périodiques et qu'il faut et qu'il suffit d'exhiber un circuit de tuiles pavant $\mathfrak{B}_1$.

On pourrait se poser un nouveau problème en mélangeant les tuiles de différentes familles et en supposant que chaque famille ne permet pas à elle seule de paver le plan. Ainsi, le pavage obtenu — s'il existe — en mélangeant les différentes familles est-il toujours périodique ? En outre, le pavage d'une bande bi-infinie horizontale de hauteur $h = 1$ est-il encore une CNS pour paver le plan $\mathbb{Z}^2$?

Quid si on autorise cette fois-ci au plus, non pas deux, mais trois couleurs par tuile ?

Ainsi se clôture, par de nouvelles questions, notre analyse mathématique sur le problème de Wang en laissant au choix, du lecteur ou de la lectrice, de poursuivre ces réflexions...

Dans les prochaines sections, nous synthétisons notre travail en donnant une caractérisation affinée de l'espace-problème de Wang.

4 Deuxième zoom sur l'espace-problème $\Omega_{\mathbb{W}}$

4.1 $\Omega_{\mathbb{W}}$ affiné à partir de notre analyse mathématique

En zoomant sur l'espace-problème $\Omega_{\mathbb{W}}$ de la figure (figure VII.32, p.142), on a abordé des problèmes plus ciblés. En particulier, on s'est centré sur trois des principaux problèmes abordés dans le chapitre VII à savoir, WANG-PLAN, WANG-h-BANDE et WANG-REC-k-MONOCHROME où $k = 4$. Nous avons bien évidemment pris en compte CIRCUIT puisque qu'il entretient des relations avec certains de ces problèmes. Ce focus a permis, à la suite de notre chapitre épistémologique et historique (chap. VII), de formuler et d'étudier des problèmes plus fins (chap. VIII) dans un souci de développer des situations de recherche dans la suite de notre travail.

Dans un premier temps, on s'est intéressé à la problématique des pavages sur des rectangles avec des bords monochromes dont les tuiles sont constituées d'exactement quatre couleurs parmi un ensemble de couleurs $\mathcal{X}$ tel que $\#\mathcal{X} \geqslant 4$. (WANG-$\forall$-REC-MONO-PART*). En particulier lorsque $\#\mathcal{X} = 4$ (WANG-$\forall$-REC-MONO-PART, WANG-REC-MONO-PART) et les sous-problèmes WANG-REC-A, WANG-REC-B et WANG-REC-C.

Dans un second temps, on s'est intéressé au problème de pavage du plan avec des tuiles d'au plus deux couleurs par tuile parmi un ensemble fini de couleurs $\mathcal{X}$ (WANG-PLAN-$\mathscr{F}_i$). Ceci a été l'occasion de travailler avec trois familles particulières de tuiles $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ et $\mathscr{F}_3$.

Enfin, nous avons étudié les cas particuliers où la hauteur de la bande bi-infinie vaut $h = 1$ ou $h = 2$ (WANG-1-BANDE et WANG-2-BANDE).

Ces deux problèmes sont proches de CIRCUIT. A cette occasion on s'est intéressé à différentes variantes de ce dernier et notamment au problème MAX-CIRCUIT, MIN-CIRCUIT, EULERIEN et HAMILTONIEN. Ceci a été l'occasion de prolonger notre question sur la bande bi-infinie de hauteur $h = 1$ en cherchant des pavages particuliers respectant certaines conditions sur leurs circuits de tuiles (MIN-WANG-1-BANDE, MAX-WANG-1-BANDE, EULERIEN-WANG-1-BANDE et HAMILTONIEN-WANG-1-BANDE). [11]

11. En réalité EULERIEN-WANG-1-BANDE et HAMILTONIEN-WANG-1-BANDE sont analogues puisqu'on cherche à paver $\mathfrak{B}_1$ avec toutes les tuiles de la collection $\mathcal{T}$ mais en revanche c'est dans le choix de la représentation (eulérien ou hamiltonien) à l'aide de graphe orienté que ces deux problèmes se différencient.

Ce deuxième zoom sur l'espace-problème $\Omega_{\mathbb{W}}$, inhérent à ce présent chapitre VIII, est décrit par la figure ci-après (figure VIII.61).

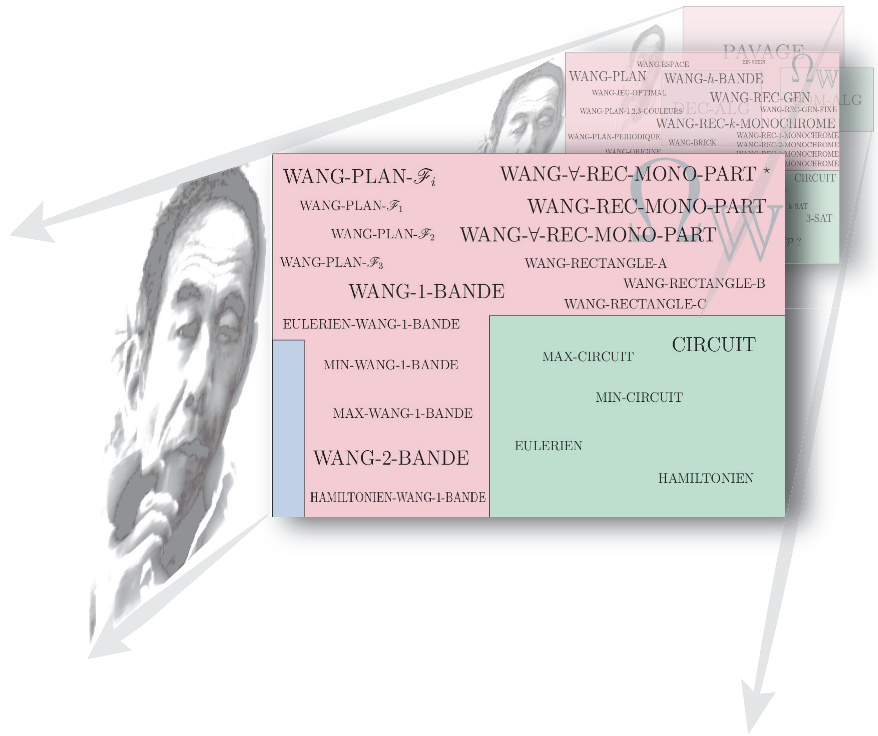


***Figure VIII.61** – Deuxième zoom sur l'espace-problème $\Omega_{\mathbb{W}}$.*

4.2 Relations établies entre les problèmes grâce à notre analyse mathématique

Notre étude a montré que pour résoudre WANG-PLAN-$\mathscr{F}_i$ pour $i = 1, 2$ ou 3, il fallait savoir résoudre WANG-1-BANDE et par conséquence CIRCUIT. Bien entendu si on sait résoudre WANG-PLAN-$\mathscr{F}_i$ pour chaque i on sait résoudre également WANG-PLAN-$\mathscr{F}_1$, WANG-PLAN-$\mathscr{F}_2$ et WANG-PLAN-$\mathscr{F}_3$. En outre, les preuves établies pour WANG-PLAN-$\mathscr{F}_3$ et WANG-PLAN-$\mathscr{F}_2$ sont similaires ce qui constitue une proximité entre ces problèmes. Ces relations sont décrites dans la figure VIII.62.

Par ailleurs, si on sait résoudre CIRCUIT alors on sait également résoudre les problèmes WANG-1-BANDE et WANG-2-BANDE. La restriction de CIRCUIT à MAX-CIRCUIT (resp. MIN-CIRCUIT, EULERIEN) permet de résoudre également MAX-WANG-1-BANDE (resp. MIN-WANG-1-BANDE et EULERIEN-WANG-1-BANDE). On remarquera également une relation de suffisante entre HAMILTONIEN et HAMILTONIEN-WANG-1-BANDE. En effet, nous avons montré que si l'on prenait une représentation hamiltonienne des tuiles, c'est-à-dire que l'on modélise les tuiles de Wang à l'aide d'une graphe orienté pour lequel chaque sommet code une double couleur OUEST-EST des tuiles de la collection. Chercher à paver $\mathcal{B}_1$ avec toutes les tuiles de la collection, revient à chercher un circuit passant une et une seule fois par tous les sommets du graphe orienté, donc à chercher un circuit hamiltonien. Cette variante n'appartient plus à la classe de complexité $\mathcal{P}$ mais est complet pour la classe $\mathcal{NP}$. Ainsi, ce changement de représentation complexifie indéniablement la résolution algorithmique du problème, toujours sous l'hypothèse que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$. Bien entendu si on sait résoudre la variante MIN-WANG-1-BANDE (resp. MAX-WANG-1-BANDE, EULERIEN-WANG-1-BANDE et HAMILTONIEN-WANG-1-BANDE) alors on donne également une réponse à WANG-1-BANDE. De plus, savoir résoudre WANG-1-BANDE permet de résoudre WANG-2-BANDE et réciproquement.

Enfin, tous les problèmes relatifs à la pavabilité de rectangles monochromes sont proches puisque les preuves utilisent toutes des arguments analogues. Par ailleurs, notre étude a permis d'établir que si on sait résoudre WANG-$\forall$-REC-MONO-PART *, alors on peut résoudre WANG-$\forall$-REC-MONO-PART, WANG-REC-MONO-PART et les sous-problèmes de ce dernier à savoir WANG-RECTANGLE-A, WANG-RECTANGLE-B et WANG-RECTANGLE-C.

De plus, savoir résoudre au moins WANG-RECTANGLE-A (resp. WANG-RECTANGLE-B, WANG-RECTANGLE-C) permet de résoudre WANG-REC-MONO-PART. Et si de plus on sait résoudre les trois, alors on résout WANG-$\forall$-REC-MONO-PART. Ceci justifie la relation d'équivalence. Par ailleurs, WANG-$\forall$-REC-MONO-PART entretient une relation de suffisance partielle avec WANG-$\forall$-REC-MONO-PART * puisque ce premier problème permet de donner une solution partielle, à savoir le nombre nécessaire (borne inférieure) de couleurs à avoir dans la collection pour pouvoir paver tous les types de rectangle de n'importe quelle taille.

Le problème dual a été de démontrer que ce nombre était aussi suffisant (borne supérieure). En fait, ces deux problèmes sur la recherche de l'optimum de $\min_{\#\chi}$ entretiennent une relation ternaire avec WANG-$\forall$-REC-MONO-PART * mais nous ne l'avons pas caractérisée sur le schéma ci-après.

Ainsi, toutes les relations évoquées précédemment sont représentées sur le schéma (figure VIII.62).

Pour information, le lecteur ou la lectrice remarquera que WANG-$\forall$-CARRE-MONO-PART*, WANG-$\forall$-CARRE-MONO-PART, WANG-CARRE-MONO-PART et les sous-problèmes WANG-CARRE-A, WANG-CARRE-B et WANG-CARRE-C ne sont pas mentionnés dans le schéma ci-avant (figure VIII.61). Ceci s'explique d'une part, parce que nous avons choisi de ne pas surcharger le schéma de cet espace et d'autre part, car ces problèmes non pas « réellement » étaient étudiés en soi, mais leurs résultats sont les conséquences directes de l'étude approfondie réalisée sur les rectangles (voir chap. VIII).

Enfin, certaines de ces relations de suffisance peuvent être, en réalité, des relations d'équivalence. Nous ne les avons pas toutes explicitement décrites puisque nos relations sont construites au plus près du cheminement emprunté lors de l'analyse de ces problèmes.

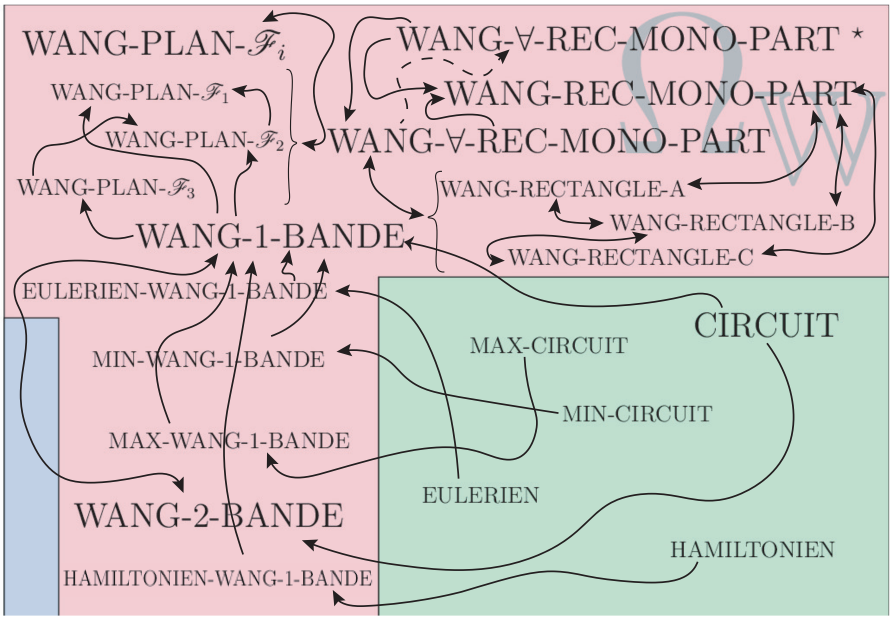


***FIGURE VIII.62** – Deuxième zoom sur l'espace-problème $\Omega_{\mathbb{W}}$ et relations entre les problèmes $\mathscr{P}_i \in \Omega_{\mathbb{W}}$.*

5 Vers la conception d'ingénieries didactiques de l'activité mathématique

Ce chapitre a été l'occasion de poursuivre le travail épistémologique et mathématique réalisé dans le chapitre VII. L'analyse mathématique de ce présent chapitre a permis d'affiner l'espace-problème $\Omega_{\mathbb{W}}$ (figure VIII.61, p. 209) et d'établir des relations entre les différents problèmes (figure VIII.62, p. 211).

Ce travail sera réinvesti dans le prochain chapitre afin de justifier nos choix sur la conception de nos ingénieries didactiques à partir du modèle du *problème* *transposé*. En particulier, ceux relevant du niveau épistémologique et de la transposition didactique. Cela nous permettra de justifier le fait que l'on applique le modèle des SiRC (Grenier et Payan, 2003) dans nos choix de transpositions par la proximité avec des questions de recherche contemporaine, toujours ouvertes et le lien avec les notions relatives à la preuve : modélisation, récurrence, absurde, théorème d'existence... ou à des notions plus spécifiques liées au problème : périodicité, translation, algorithme, complexité...

Chapitre IX

Analyse didactique et conception des situations issues du problème de Wang

L'étude épistémologique et mathématique que nous avons menée à travers les chapitres précédents (chap. VII, VIII), nous a permis d'effectuer des premiers choix afin de permettre la dévolution des problèmes et l'accessibilité aux raisonnements et aux processus de preuves. Des choix plus fins seront proposés dans ce présent chapitre et seront décrits avec l'appui de notre *modèle du problème transposé*. Nous nous intéresserons dans un premier temps à la première étape de notre modèle concernant l'épistémologie des problèmes en jeu. A cette occasion, nous proposerons des problèmes qui vérifient d'une part l'aspect syntaxique dans la structure de leur formulation et d'autre part qui vérifient l'aspect sémantique par leurs sens et leurs proximités avec d'autres problèmes. Cette étape découle de notre large étude épistémologique menée dans les précédents chapitres. Nous nous intéresserons, ensuite, dans un second temps à la seconde étape du modèle concernant la transposition didactique des problèmes proposés. Cela sera l'occasion de montrer notre intentionnalité didactique en identifiant finement les connaissances d'ordre I et II mobilisées et visées par ces situations (Sackur, Drouhard, Assude, Paquelier et Maurel, 2005), tout en faisant du lien avec les stratégies potentielles de résolution. Ensuite, nous effectuerons des choix sur la nature et la valeur des variables didactiques et de recherche permettant d'influencer les stratégies identifiées et les connaissances visées. Nous montrerons ensuite en quoi ces situations développées répondent aux caractéristiques du modèle des SiRC (Da Ronch, Gandit et Gravier, 2020 ; Grenier et Payan, 2003). Dans un troisième temps, nous évoquerons les aspects ergonomiques du milieu concernant l'utilité, l'utilisabilité et l'acceptabilité (Tricot *et al.*, 2003).

Enfin, nous terminerons ce chapitre en explicitant nos choix d'actions élémentaires que nous avons jugés épistémologiquement et didactiquement pertinents pour repérer des traces d'activité mathématique lors de l'analyse de notre corpus. Le sens de l'encodage de ces actions (resp. micro-activités) sera alors rendu explicite.

1 Épistémologie du problème

1.1 Syntaxe des problèmes proposés dans nos situations

D'après notre modèle, les problèmes doivent être explicitement formulés sous la forme d'instances, de conditions et d'une question selon la nomenclature proposée par Garey et Johnson (1979). Les instances, les conditions et la portée de la question sont inhérentes aux variables du problème qui sont ici des variables didactiques et de recherche. Ainsi, la formulation d'un problème doit avoir une syntaxe claire permettant d'identifier précisément la question et les données portées par certaines conditions.

Il convient de préciser que dans nos ingénieries nous allons proposer de développer deux types de situations relatives à notre étude épistémologique. Le premier concerne les pavages de Wang dans le plan et sur des régions semi-bornées du plan en lien avec trois problèmes identifiés et étudiés à savoir, WANG-PLAN-$\mathscr{F}_3$, WANG-1-BANDE et WANG-2-BANDE. Le deuxième concerne plutôt les pavages de Wang sur des rectangles avec des bords monochromes en lien avec les problèmes WANG-RECTANGE-A, WANG-RECTANGE-B et WANG-RECTANGE-C.

Pour le premier type de situations nous proposons la formulation suivante : « *Étant donné des types de tuiles, peut-on recouvrir le plan avec ces tuiles ?* ». Le lecteur ou la lectrice remarquera que la question est orientée dans le plan et non sur les bandes. Ce choix se justifie par le fait que les bandes bi-infinies de hauteur $h = 1$ et $h = 2$ sont des portions de $\mathbb{Z}^2$ et qu'il n'est pas nécessaire de formuler deux questions différentes. D'une part, car le problème général concerne le pavage du plan et d'autre part, suivant la région considérée, le sujet pourra facilement identifier s'il s'agit de paver une bande bi-infinie pour une hauteur h donnée (la région est bornée verticalement) ou le plan entier (la région n'est pas bornée).

Pour le deuxième type de situations, nous proposons la formulation du problème suivant : « *Étant donné une région et des types de tuiles, peut-on recouvrir cette région par ces tuiles ?* ». Nous avons fait le choix d'évoquer le vocable « région » et non le terme « rectangle » afin de formuler le problème sur des régions arbitraires bien que lors de nos expérimentations ces problèmes soient proposés, grâce au matériel, sur des rectangles. Cette formulation permet donc de présenter un problème plus général et semble-t-il encore ouvert sur des régions arbitraires et en partie bornées.

1.2 Sémantique des problèmes proposés dans nos situations

Les problèmes proposés à travers les différentes situations que nous allons construire ont du sens puisqu'ils possèdent tous une certaine proximité dans le choix des instances, de la portée des questions et ont des invariants de preuve pour les résoudre. Nous invitons le lecteur ou la lectrice à se référer aux chapitres VII et VIII pour prendre conscience des relations qu'entretiennent ces problèmes et les problèmes mathématiques connexes sous-jacents qui montrent qu'ils ont du sens, c'est-à-dire qu'ils sont sémantiquement intéressants, puisque non isolés dans l'univers $\Omega_{\mathbb{W}}$.

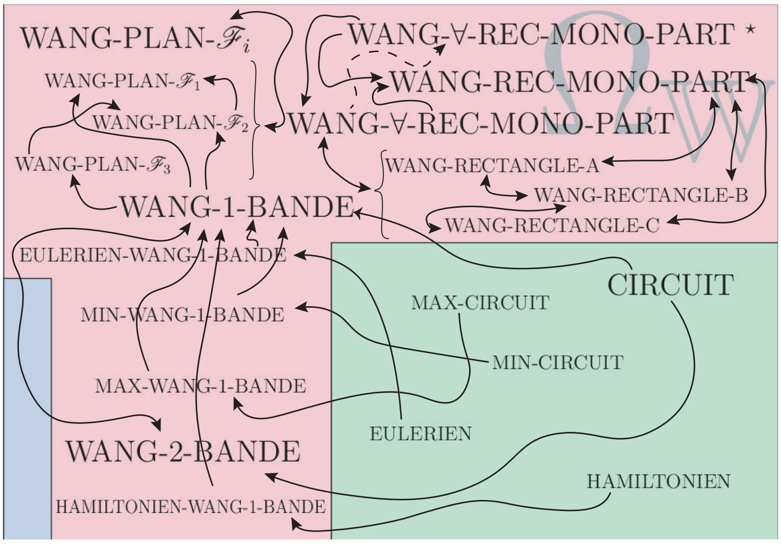


Figure IX.1 – *Espace-problème $\Omega_{\mathbb{W}}$ et relations entre les problèmes $\mathscr{P}_i \in \Omega_{\mathbb{W}}$ (voir p. 211).*

2 Transposition didactique des problèmes

L'analyse mathématique (chap. VIII) permet d'identifier finement les connaissances mobilisées et visées à travers la mise en œuvre des stratégies de résolution. Ainsi, cette analyse permet de pointer précisément les connaissances d'ordre I et d'ordre II (Sackur, Drouhard, Assude, Paquelier et Maurel, 2005) mobilisées et visées dans les problèmes étudiés.

Dans la prochaine section, nous présentons à cette occasion les connaissances qui peuvent être travaillées selon le contexte de la situation.

2.1 Connaissances d'ordre I et II mobilisées et visées

Connaissances d'ordre I

De manière générale, suivant le contexte de mise en œuvre et le niveau des personnes confrontées à ces situations, les notions mathématiques en jeu sont en lien avec la géométrie du plan, l'arithmétique de base, l'algorithmique et l'algèbre linéaire dans la théorie des graphes.

Au niveau élémentaire, la notion de pavage est vue comme un recouvrement, sans chevauchement et dépassement, de la région considérée. On y retrouve également la notion de périodicité qui est vue ici comme une translation de motifs (rectangulaires) ainsi que d'autres isométries du plan comme la symétrie axiale et la rotation. On peut également travailler la conservation des surfaces pavées par ces isométries du plan.

En outre, on retrouve évidemment des notions d'arithmétique élémentaire, comme les opérations dans $\mathbb{N}$, la divisibilité par deux inhérente à la notion de parité et donc de congruence modulo deux.

À un niveau moins élémentaire, on retrouve aussi des notions davantage centrées sur l'algorithmique comme le concept de variables, de conditions et de boucles (voir p. ex., les algorithmes des CS dans le chapitre VIII).

À un niveau plus évolué enfin, peuvent être travaillées des connaissances plus poussées d'algèbre linéaire en lien avec la théorie des graphes comme les notions de matrices d'adjacences associées aux graphes orientés, de puissance k-ième de ces matrices permettant de détecter l'existence d'un chemin (resp. circuit) dans un graphe. L'existence constructive d'un chemin (resp. circuit) permet aussi de faire du lien avec des algorithmes de parcours en profondeur et en largeur (voir DFS et BFS).

Connaissances d'ordre II

D'un autre côté, les connaissances d'ordre II qui sont en jeu, sont la distinction entre CN et CS relative à des notions d'existence et d'impossibilité. Cela permet d'appuyer sur la distinction des processus de preuves d'énoncés universellement et existentiellement quantifiés. Par exemple, on peut travailler les différences dans les processus de preuve entre CS d'existence d'objets (il suffit d'exhiber au moins un objet pour démontrer qu'il existe) et CN pointant l'impossibilité à exhiber un tel objet (un exemple ne suffit plus).

Elles permettent également de mettre en œuvre des preuves ostensives sur des cas particuliers via le théorème d'existence. Comme le montre l'analyse mathématique, il est facile de traiter des petits cas particuliers en exhibant un exemple de pavage valide. L'entrée dans un problème par l'étude de cas simples permet, par un raisonnement inductif, la formulation de conjectures locales voire globales et travaille aussi l'aspect de validation (preuve)/réfutation (contre-exemple). Cela amène donc à une articulation entre le raisonnement inductif de type plausisibilité et déductif de type validatif/irréfutable. C'est d'ailleurs de cette manière que l'analyse mathématique a été construite. On est parti de l'étude de cas particuliers et de celles des bandes $1 \times q$, $2 \times q$ voire $3 \times q$ qui nous ont amenés à formuler différentes conjectures sur les différents types de rectangle de taille $p \times q$ (voir les conjectures VIII.1, p. 150 ; VIII.2, p. 156 et VIII.3, p. 156) qui ont été prouvées par la suite.

Dans une certaine mesure, cela permet de travailler sur le statut d'énoncé contingent investi d'une valeur épistémique mais aussi sur la distinction entre conjecture (formulation) et la nécessité de preuve (validation). Ces situations font aussi travailler la modélisation inhérente parfois à un changement de cadre voire à un changement de représentation sémiotique des objets en jeu. Par exemple une tuile a une représentation géométrico-symbolique et il est possible de la représenter aussi sous la forme d'un graphe orienté, ce qui modifie le cadre dans lequel on regarde l'objet (voir figure VIII.44, p. 193). L'aspect de définition d'objets mathématiques est également travaillé puisque pour faire des preuves, il faut savoir définir certains objets au préalable et dans certains cas, la construction de ces objets découle du processus de preuve qui nécessite la production de nouvelles définitions. Ceci est le cas par exemple lorsqu'on cherche à définir la notion de triangles intérieurs et extérieurs permettant de prouver l'impossibilité de paver certaines tailles de rectangle (voir définition VIII.4, p. 164).

Enfin, ces situations contribuent à développer plusieurs stratégies de résolution permettant de travailler différents types de raisonnement : implication directe, absurde utilisant le forçage (voir p. ex., p. 158), induction à l'aide de partitions (voir p. ex., p. 172), construction et déconstruction de classe d'objets (voir p. ex., p. 167), disjonction de cas et exhaustivité des cas (voir p. ex., p. 160).

2.2 Notre intentionnalité didactique

Dans notre recherche, notre intentionnalité didactique est d'inscrire l'activité du public dans une réelle pratique de l'activité mathématique. Pour cela, il est nécessaire de proposer au public des problèmes épistémologiquement consistants, c'est-à-dire détenant une quantité épistémologique significative. Par conséquent, ces problèmes nécessitent donc, lors de leur résolution, de mobiliser des connaissances d'ordre II au travers du développement de stratégies de résolution. Certaines connaissances dites d'ordre I seront aussi mobilisées et pourraient, de fait, être travaillées de manière indirecte.

Afin de développer ces connaissances d'ordre II, nous identifierons, dans l'analyse mathématique, certaines stratégies qui ont ce potentiel et qui ont été, en plus, déjà mobilisées par un large public (élèves, étudiants, chercheurs) lors de nos pré-expérimentations. Ainsi, l'identification du choix des stratégies est issue d'une part, de nos connaissances sur la résolution du problème de Wang grâce à notre étude épistémologique, et d'autre part, du fruit des observations des pré-expérimentations menées dans différents contextes :

- mini-mémoires d'étudiants de licences non spécialistes en mathématiques (module Jeux combinatoires et raisonnements mathématiques de l'Université Grenoble Alpes) (voir p. ex., Da Ronch, Gandit et Gravier, 2021) ;
- activités menées dans l'Unité d'Enseignement sur la modélisation dans le cadre du Master MEEF mathématiques de deuxième année ;
- activités menées lors de la semaine des mathématiques avec des classes de cycle 3 (CM2 et sixième, 10-11 ans) et cycle 4 (cinquième, 12 ans) ;
- actions menées dans le cadre de séminaires/ateliers de recherche 2021(Da Ronch, 2020a,b,d ; Da Ronch et Gandit, 2021) ;
- actions menées en Bachelor (equiv. Licence) et Master au sein de la Haute École Pédagogique du Valais :
- et enfin dans des ateliers *Maths.en.Jeans*.

La variété des pré-expérimentations, à différents niveaux (école, collège, lycée, université), est très importante pour la construction de nos ingénieries puisque nous n'aurons pas connaissance du niveau des individus lors de nos expérimentations menées dans des conditions cliniques proches du réel. De plus, ces pré-expérimentations nous ont permis de vérifier l'enrôlement et la dévolution de ces problèmes. Enfin, elles ont aussi permis de vérifier l'accessibilité à la preuve et aux raisonnements mathématiques inhérents aux connaissances d'ordre II développées au niveau des stratégies.

2.3 Stratégies de résolution identifiées dans notre étude épistémologique

Notre étude épistémologique a permis de proposer des preuves sur les différents problèmes étudiés. En particulier, nous avons mis en avant des stratégies qui mobilisent des connaissances d'ordre II permettant de donner des résultats d'existence et d'impossibilité sur certains objets. Ces résultats ont permis de donner des CS, CN et des CNS. Nous retenons quelques-unes des stratégies, jugées pertinentes au regard de nos observations, qui seront potentiellement celles développées en situation d'expérimentations.

Dans notre cas, nous prenons en considération sept stratégies [1] décrites ci-

1. Nous avons tout de même conscience par rapport à ces choix de stratégies que lors de nos expérimentations, il pourrait y avoir d'autres stratégies mobilisées par le public qui n'auraient peut-être pas été préalablement observées lors des pré-expérimentations par exemple... Ces dernières seraient alors traitées au cas par cas.

après. Ces stratégies sont définies, en pratique, en *compréhension* même si en théorie on pourrait les définir *en extension* puisque l'analyse épistémologique nous les donne toutes. [2]

MOTIF_PERIODIQUE.— Cette stratégie permet de construire des preuves d'existence de pavages par translations d'un même motif périodique. On la retrouve dans la plupart de nos preuves établissant des CS d'existence d'objets. C'est donc la répétition de mêmes micro-activités que l'on retrouve dans la construction de la répétition d'un motif en raisonnant par implication directe.

Cette stratégie est, par exemple, mise en œuvre dans la plupart des preuves des lemmes, propriétés et théorèmes du chapitre VIII (p. 145) concernant l'existence de pavages pour les rectangles, les bandes bi-infinies de hauteurs $h = 1$ et $h = 2$ et le plan discret. De plus, dans la plupart des expérimentations menées sur ces situations pour valider l'accessibilité à la preuve et aux raisonnements mathématiques, nous avons remarqué que cette stratégie était clairement mise en œuvre. Nous proposons un exemple ci-après.

Exemple IX.1

Extrait d'un mini-mémoire d'étudiants de licence du module *jeux combinatoires et raisonnements mathématiques* de l'Université Grenoble Alpes (2021). Dans cet extrait, on observe que les étudiants utilisent un motif périodique de type A et qu'ils le translatent horizontalement et verticalement pour paver un rectangle d'une longueur et d'une largeur paires.

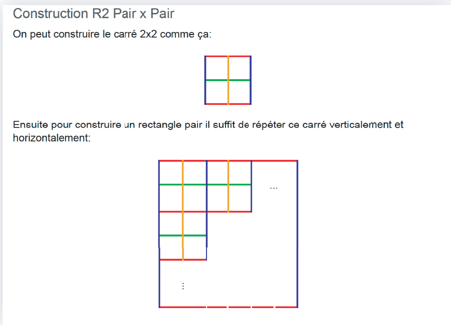


Figure IX.2 – Extrait d'une production d'étudiants démontrant l'existence d'un pavage de type A.

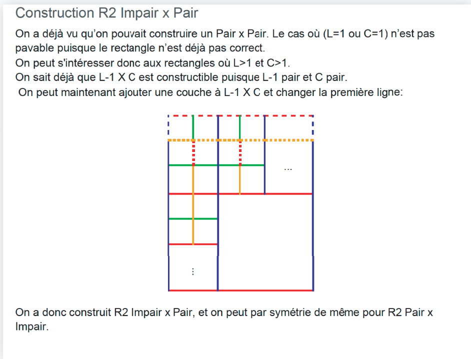
2. Les problèmes étudiés lors de l'analyse mathématique du chapitre VIII sont décidables. Cet argument serait discutable dans le cas de problèmes indécidables, notamment pour la construction de pavages apériodiques, puisqu'en théorie il existerait une infinité de méthodes, donc de stratégies, pour les construire...

(DE)CONSTRUCTION.— Cette stratégie permet d'établir des preuves d'existence en cassant ou en ajoutant des objets à certaines structures déjà établies afin de dégager de nouvelles propriétés sur les nouveaux objets construits. En général, elle peut être couplée avec une stratégie de construction comme celle de MOTIF_PERIODIQUE.

Le lectorat trouvera cette stratégie dans les preuves d'existence (CS) des théorèmes et lemmes du chapitre VIII. Par exemple, on retrouve cette stratégie dans la preuve du lemme VIII.3 (p. 168).

Exemple IX.2

Cet exemple est issu du même travail que l'exemple IX.1. Les étudiants réinvestissent le résultat sur les rectangles de type A lorsque la longueur et la largeur sont toutes les deux paires. Ils ajoutent ensuite une nouvelle ligne pour démontrer l'existence d'un pavage de type A lorsque p est impair et q est pair.


Construction R2 Impair x Pair

On a déjà vu qu'on pouvait construire un Pair x Pair. Le cas où (L=1 ou C=1) n'est pas pavable puisque le rectangle n'est déjà pas correct.
On peut s'intéresser donc aux rectangles où L>1 et C>1.
On sait déjà que L-1 X C est constructible puisque L-1 pair et C pair.
On peut maintenant ajouter une couche à L-1 X C et changer la première ligne:

On a donc construit R2 Impair x Pair, et on peut par symétrie de même pour R2 Pair x Impair.

FIGURE IX.3 – Extrait d'une production d'étudiants prouvant l'existence d'un pavage en utilisant la stratégie (DE)CONSTRUCTION.

Exemple IX.3

Cet extrait est issu d'une production d'élèves de classe de sixième (11 ans) du collège de *Côte Rousse* qui ont expérimenté le problème de Wang sur des rectangles de largeur un et de longueur quelconque lors de la semaine des mathématiques (2020). Ces élèves ont établi un résultat d'existence sur un cas particulier, en répétant deux fois un motif horizontalement périodique 2×1 et ont ajouté la dernière tuile. En revanche, il se peut lors de l'expérience, hors traces écrites, que ces mêmes élèves aient répété trois fois le motif 2×1 et supprimé ensuite la dernière tuile.

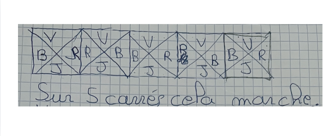


Figure IX.4 – *Extrait d'une production d'élèves démontrant l'existence d'un pavage de type C de taille 1×5 en utilisant* MOTIF_PERIODIQUE *couplé avec* (DE)CONSTRUCTION .

PARTITION.— Cette stratégie permet d'établir des preuves d'existence en structurant un objet en sous-objets. C'est-à-dire qu'on partitionne l'objet et on montre l'existence des sous-objets inhérents pour en déduire, par concaténation de ces derniers, l'existence de l'objet initial. Cette stratégie peut être efficace localement pour l'étude de « gros » cas particuliers. Elle peut être utilisée à un niveau global pour montrer des résultats généraux d'existence en la combinant à un raisonnement par induction descendante utilisant le contre-exemple minimal par exemple.

Cette stratégie est par exemple utilisée dans les preuves d'existence utilisant le raisonnement par induction descendante sur une classe d'objets. Nous invitons le lecteur ou la lectrice à se référer, entre autres, au lemme VIII.1 (p. 164) par exemple.

Exemple IX.4

Extrait d'un autre mini-mémoire d'étudiants de licence du module *jeux combinatoires et raisonnements mathématiques* de l'Université Grenoble Alpes (2020) pris dans Da Ronch, Gandit et Gravier (2021). Dans cet exemple, les étudiants décomposent le rectangle $2 \times p$ de type A en rectangles de tailles 2×2 et 2×3 de type A. Ils partitionnent en quelque sorte ce rectangle et utilisent la concaténation de ces rectangles pour prouver l'existence d'un pavage de type A et de taille $2 \times p$.

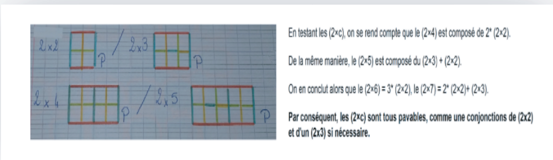
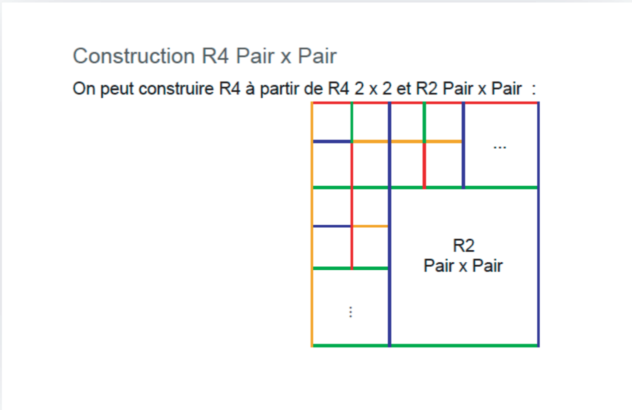


Figure IX.5 – *Extrait d'une production d'étudiants pour démontrer l'existence d'un pavage de type A utilisant* PARTITION *couplé à* MOTIF_PERIODIQUE.

Exemple IX.5

Autre extrait d'un mini-mémoire d'étudiants de licence du module *jeux combinatoires et raisonnements mathématiques* de l'Université Grenoble Alpes (2021). Dans cet exemple, les étudiants décomposent le rectangle de type C et de taille $p \times q$ avec p et q pairs en rectangles de type A et C et de taille 2×2 et $(p-2) \times (q-2)$ où pour cette dernière chaque opérande est pair. Les étudiants partitionnent ce rectangle et utilisent la concaténation de ces rectangles pour prouver l'existence d'un pavage de taille $p \times q$ avec p et q pairs.



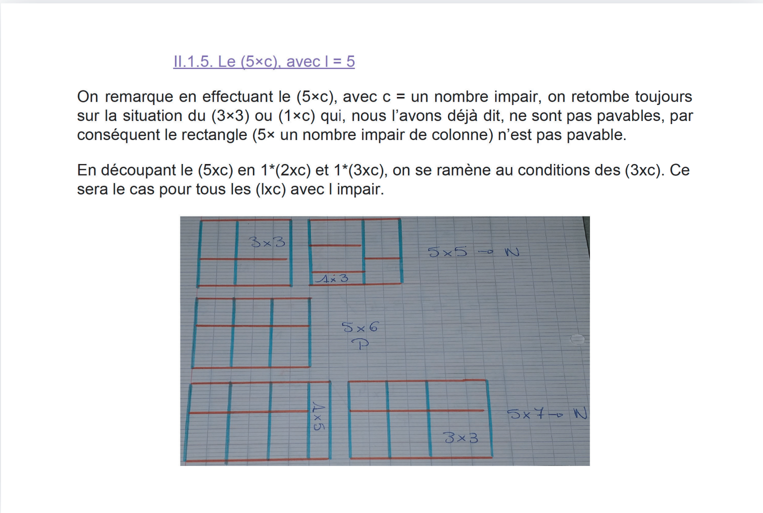
;

Figure IX.6 – *Extrait d'une production d'étudiant relatif à une preuve d'existence de pavage de type C utilisant* PARTITION *couplé à* MOTIF_PERIODIQUE.

Le raisonnement par partitions n'est en général pas valide lorsqu'on cherche à démontrer une impossibilité de pavage. En effet, il ne suffit pas d'exhiber seulement un exemple de partition pour laquelle un élément de cette partition n'est pas pavable pour conclure à une impossibilité. Cela fait pourtant partie des théorèmes en acte ou règles d'action de certains étudiants même en formation des enseignants (Da Ronch et Gandit, 2021 ; Gandit, 2008). Nous proposons un exemple de ce type ci-après.

Exemple IX.6

Dans cet extrait issu d'un mini-mémoire d'étudiant de licence (2019), on observe que les étudiants partitionnent les grands rectangles 5×5 et 5×7 de type A en rectangles de plus petite taille de type A pour lesquels au moins un rectangle de la partition n'est pas pavable comme par exemple le 1×3, 1×5 ou le 3×3. Ce raisonnement est incorrect puisque l'étude de quelques cas ne permet pas d'affirmer que ces rectangles ne sont pas pavables, même si les partitions proposées ne permettent pas d'exhiber un pavage valide. De plus, il n'y a, *a priori*, aucune raison de partitionner les grands rectangles de type A en sous-rectangles de type A dans ces configurations. Il est nécessaire, dans ce cas, d'étudier toutes les configurations possibles pour conclure quant à l'impossibilité de paver.



II.1.5. Le (5×c), avec l = 5

On remarque en effectuant le (5×c), avec c = un nombre impair, on retombe toujours sur la situation du (3×3) ou (1×c) qui, nous l'avons déjà dit, ne sont pas pavables, par conséquent le rectangle (5× un nombre impair de colonne) n'est pas pavable.

En découpant le (5xc) en 1*(2xc) et 1*(3xc), on se ramène au conditions des (3xc). Ce sera le cas pour tous les (lxc) avec l impair.

FIGURE IX.7 – Extrait d'une production d'étudiant utilisant de manière inappropriée la stratégie de PARTITION dans une preuve d'impossibilité.

FORÇAGE.— Cette stratégie permet d'établir des preuves d'impossibilité et reste efficace localement. Elle utilise un raisonnement par l'absurde, qui suppose au départ que l'objet existe, puis le raisonnement s'enchaîne par une succession d'implications directes (CN) conduisant à une absurdité et donc à l'inexistence de l'objet de départ. Cette stratégie n'est malheureusement pas efficace dès lors que la taille des objets mathématiques étudiés « grossit » puisqu'il faut alors traiter des sous-cas, ce qui en général, provoque une explosion combinatoire lorsque la taille de l'objet croît.

Le raisonnement par forçage permet de démontrer des impossibilités. Nous l'avons utilisé pour prouver des CN sur les différents types de rectangles de taille $1 \times q$, $2 \times q$, $3 \times q$ et sur quelques cas particuliers. Voir par exemple les preuves des CN des propriétés VIII.3 (p. 151), VIII.5 (p. 154), VIII.7 (p. 156) et VIII.8 (p. 158)...

Exemple IX.7

Dans cet extrait issu d'une production d'élèves de classe de CM2 (10 ans) lors de la semaine des maths, on observe un argument final permettant de prouver l'impossibilité de paver un rectangle de type C de taille 1×4. En revanche, cette preuve est incomplète car il manque l'argument concernant la nécessité de poser les trois premières tuiles de cette manière.

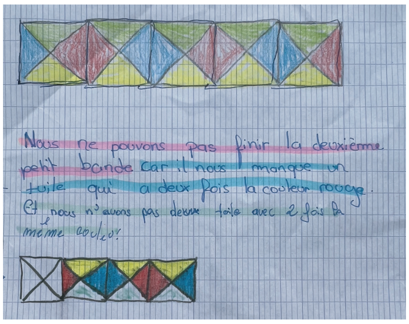


***Figure IX.8** – Extrait d'une production d'élèves de CM2 relatif à une preuve incomplète d'impossiblité utilisant la stratégie de FORÇAGE.*

Exemple IX.8

Dans cet extrait issu d'une production d'élèves de sixième (11 ans), la preuve d'impossibilité de paver un rectangle de type C de taille 1×4 est correctement formulée mentionnant chaque pas de raisonnement par nécessité. Pour une meilleure lisibilité, nous recopions mot pour mot le texte issu de la production d'un élève (figure IX.9).

« C'est impossible parce que la colonne du haut et verte et la colonne du bas jaune sa commence par le bleu donc le bleu et obligé d'être fâce au rouge dans le carré il y a 4 couleur il peut pas y avoir deux fois la même couleur dans un carré si par exemple [...] donc c'est impossible. »

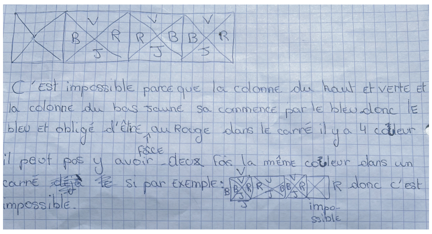


FIGURE IX.9 – Extrait d'une production d'élève de sixième relatif à une preuve d'impossibilité utilisant FORÇAGE.

A noter que pour les élèves, les preuves d'impossibilité sont souvent confondues avec des preuves d'existence, dans le sens, qu'un exemple suffit pour affirmer une impossibilité... Un travail sur les preuves d'énoncés existentiellement et universellement quantifiés semble fondamental pour changer ces conceptions.

BRUTE-FORCE.— Cette stratégie est relative à la stratégie naïve d'essais-erreurs exhaustive. Elle peut faire référence à deux stratégies. La stratégie de BACKTRACKING et la stratégie de BRANCH_AND_BOUND. BACKTRACKING consiste à paver pas à pas et à la fin vérifier la validité du pavage. Si le pavage n'est pas valide alors on effectue un retour en arrière jusqu'à ce qu'on trouve un pavage valide. Sinon, si tous les cas ont été traités alors le pavage est impossible. BRANCH_AND_BOUND est similaire au BACKTRACKING mais à la différence que cette stratégie n'attend pas la fin du pavage mais vérifie la validité de motifs pas à pas.

On retrouve également une autre stratégie concernant le dénombrement d'objets.

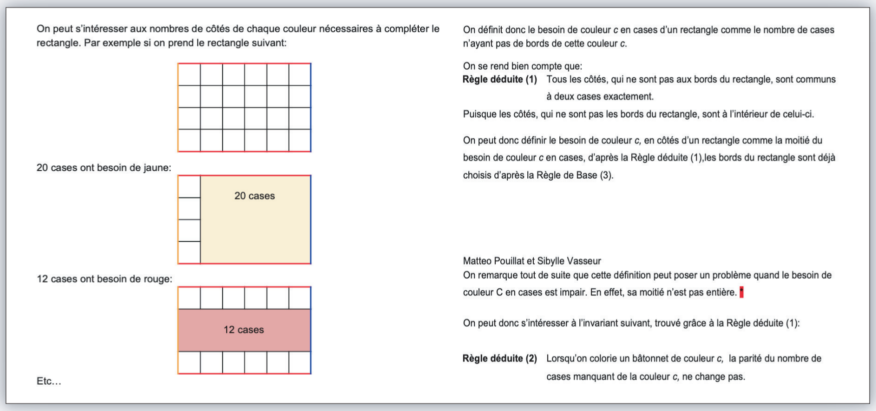
DENOMBREMENT.— Cette stratégie « casse » en quelque sorte la structure d'un objet pour le dénombrer de plusieurs manières. Dans notre cas une tuile de Wang peut être vue comme quatre triangles colorés avec pour but de dénombrer de deux manières, pour une couleur donnée, le nombre de triangles nécessaires pour paver un rectangle de taille quelconque. Cette stratégie permet d'établir, grâce à un raisonnement par l'absurde, des CN de (non)-existence de pavage.

Voir par exemple la preuve associée à la CN du théorème VIII.1 (p. 166) et en particulier le lemme VIII.2 (p.166).

Nos premières pré-expérimentations ont montré que la stratégie DENOMBREMENT n'est pas évidente à mettre en œuvre et ce à tout niveau d'enseignement, du primaire à l'université, puisqu'il faut voir l'objet « tuile » comme une partition de quatre secteurs triangulaires colorés... Seul un duo d'étudiants l'a exprimée (voir exemple IX.9 ci-après). De plus, le matériel proposé sous la forme de tuiles carrées empêche sans doute cette conceptualisation, là où le matériel du *Palais de la Découverte*, sous la forme de triangles colorés, était peut-être mieux adapté.

Exemple IX.9

Extrait d'un mini mémoire d'étudiants du module *jeux mathématiques et raisonnements mathématiques* de l'Université Grenoble Alpes (2021) formulant correctement la preuve de la CN quant à la pavabilité des rectangles de type $\overline{\underline{B}}$.



On peut s'intéresser aux nombres de côtés de chaque couleur nécessaires à compléter le rectangle. Par exemple si on prend le rectangle suivant:

20 cases ont besoin de jaune:

20 cases

12 cases ont besoin de rouge:

12 cases

Etc...

On définit donc le besoin de couleur *c* en cases d'un rectangle comme le nombre de cases n'ayant pas de bords de cette couleur *c*.

On se rend bien compte que:

Règle déduite (1) Tous les côtés, qui ne sont pas aux bords du rectangle, sont communs à deux cases exactement.

Puisque les côtés, qui ne sont pas les bords du rectangle, sont à l'intérieur de celui-ci.

On peut donc définir le besoin de couleur *c*, en côtés d'un rectangle comme la moitié du besoin de couleur *c* en cases, d'après la Règle déduite (1),les bords du rectangle sont déjà choisis d'après la Règle de Base (3).

Matteo Pouillat et Sibylle Vasseur

On remarque tout de suite que cette définition peut poser un problème quand le besoin de couleur C en cases est impair. En effet, sa moitié n'est pas entière. *

On peut donc s'intéresser à l'invariant suivant, trouvé grâce à la Règle déduite (1):

Règle déduite (2) Lorsqu'on colorie un bâtonnet de couleur *c*, la parité du nombre de cases manquant de la couleur *c*, ne change pas.

Figure IX.10 – Extrait d'une production d'étudiants relatif à la preuve de la CN pour les rectangles de type $\overline{\underline{B}}$ utilisant DENOMBREMENT.

EMPILEMENT.— Cette stratégie consiste à empiler des tuiles pour former des colonnes ou à empiler des lignes de tuiles. Elle peut être couplée à d'autres stratégies identifiées ci-avant pour des preuves d'existence ou d'impossibilité utilisant différents raisonnements comme la disjonction de cas ou l'exhaustivité des cas par exemple.

Cette stratégie est potentiellement plus présente dans les problèmes de pavages de bandes bi-infinies pour une certaine hauteur h fixée.

Nous résumons dans le tableau IX.1 les sept stratégies jugées mobilisables et qui nécessitent de développer les connaissances d'ordre II citées précédemment.

Stratégie	Référence	Connaissances d'ordre II
MOTIF_PERIODIQUE	p. 219	CS d'existence, implication directe, construction de classe d'objets
(DE)CONSTRUCTION	p. 220	CS d'existence, implication directe, construction de classe d'objets
PARTITION	p. 221	CS d'existence, raisonnement par l'absurde, construction de classe d'objets , raisonnement par induction, contre-exemple minimal
FORÇAGE	p. 223	CN de (non)-existence, CS d'existence, raisonnement par l'absurde, disjonction de cas
BRUTE-FORCE	p. 225	CS d'existence, CN de (non)-existence, implication directe, disjonction de cas, exhaustivité des cas
DENOMBREMENT	p. 225	CN de (non)-existence, partition de l'objet, raisonnement par l'absurde, processus de définition, changement de représentation de l'objet
EMPILEMENT	p. 226	CS d'existence, CN d'impossibilité, implication directe, exhaustivité des cas, disjonction des cas

Tableau IX.1 – *Sept stratégies issues de notre étude épistémologique, jugées mobilisables, pour développer les connaissances d'ordre II visées.*

La stratégie FORÇAGE est surtout utilisée dans des preuves d'impossibilité (p. ex., non-existence de pavage).

La stratégie EMPILEMENT peut également servir dans des preuves de non-existence mais elle est alors couplée à d'autres raisonnements comme l'exhaustivité des cas par exemple.

Afin d'influencer le comportement procédural du public vers ces stratégies qui permettent de mobiliser des connaissances d'ordre II associées à la pratique de l'activité mathématique, il convient d'effectuer des choix didactiques judicieux sur les variables du problème et leurs valeurs associées. Ces variables sont des variables didactiques ou de recherche. Ces dernières correspondent aux variables du problème mais leur valeur est laissée, *a contrario* des valeurs des variables didactiques, à la charge de celui qui résout le problème. Le choix de certaines valeurs des variables permet de faire émerger des stratégies que nous avons identifiées. Ces points font l'objet de la prochaine section.

2.4 Les variables didactiques et les variables de recherche et leurs impacts sur les stratégies

Nous informons le lecteur ou la lectrice que dans toute cette section le choix des valeurs des variables didactiques est aussi conditionné aux contraintes ergonomiques liées au milieu artefactuel construit à cette occasion.

De manière générale, on souhaite faire travailler le public sur différentes régions du plan. De fait, une variable importante est le nombre de bords qui vaudrait soit zéro dans le cas du plan, soit deux dans le cas des bandes bi-infinies, soit quatre dans le cas des rectangles (VAR_DID_NBRE_BORDS).

Une fois cette valeur fixée, il existe d'autres variables qui en découlent mais qui ne se situent pas sur le même plan que VAR_DID_NBRE_BORDS. Ainsi les prochaines sections permettront d'identifier les autres variables qui résultent de la valeur fixée de VAR_DID_NBRE_BORDS.

Choix dans le cas des rectangles où la valeur de VAR_DID_NBRE_BORDS vaut quatre

Pour les rectangles, on identifie plusieurs variables didactiques. Tout d'abord, **VAR_DID_RECTANGLE_TYPE** concerne le type de rectangle [3]. Afin d'avoir un point de vue global sur le problème et ainsi avoir la possibilité de réinvestir des stratégies sur différents types de rectangle, nous proposons de fixer la valeur de cette variable pour le type A, le type B et le type C (figure IX.11). Pour le type B,

3. Nous avons privilégié de choisir des rectangles et non des carrés car, par exemple, pour un carré de type C, les sujets ne sont pas confrontés à des preuves d'impossibilité puisqu'il est toujours possible d'exhiber un pavage valide quelle que soit sa taille. Pour les autres types de carrés, les preuves d'impossibilité utilisant FORÇAGE deviennent très vite fastidieuses dès que $n \geqslant 3$.

on a vu à travers notre analyse mathématique qu'il existait deux sous-types $|B|$ et $\overline{B}$. A cette occasion nous faisons le choix de nous restreindre au sous-type $|B|$ puisque pour ces deux sous-types les procédures sont analogues à rotation près. De plus, par exemple, pour le type A, comme nous le verrons par la suite ce type permet aussi d'étendre l'efficacité de la stratégie FORÇAGE jusqu'au rectangle $3 \times q$.

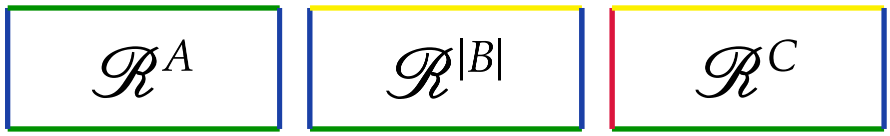


Figure IX.11 – *Trois types de rectangle dans nos situations.*

Ensuite, nous identifions VAR_DID_RECTANGLE_TAILLE_MAX qui est la variable didactique concernant la taille maximale fixée des rectangles. Nous avons fixé cette taille aux rectangles 4×9 pour chacun des trois types : A, $\overline{B}$ et C. Cela permet, selon nous, d'utiliser les principales stratégies pour résoudre le problème sur les rectangles. En effet, toutes les CNS établies pour ces types de rectangle de taille $1 \times q$ ou $2 \times q$ utilisent, soit le théorème d'existence à l'aide de la stratégie MOTIF_PERIODIQUE pour exhiber un pavage valide, soit la stratégie FORÇAGE pour établir des CN permettant de relever des impossibilités de pavage. Cette dernière stratégie est aussi viable pour le rectangle de type $\overline{B}$ de taille $3 \times q$.

La taille 4×9 permet donc de rendre compte de ces stratégies tout en montrant les limites de la stratégie FORÇAGE dès lors que la largeur vaut quatre (resp. trois dans certains types). Cela peut donc influencer un changement de point de vue en utilisant, soit la stratégie DENOMBREMENT qui permet d'établir des CN, soit la stratégie BRUTE-FORCE et ses variantes BACKTRACKING ou BRANCH_AND_BOUND. Ces deux dernières, bien qu'exhaustives, restent néanmoins peu efficaces à cause de l'explosion combinatoire des cas à étudier.

Dans nos situations, la taille des rectangles est bornée puisqu'en effet, $1 \leqslant p \leqslant 9$ et $1 \leqslant q \leqslant 4$. Néanmoins la variable concernant la taille est une variable de recherche puisque c'est au sujet de la fixer sur la grille discrète $[[1,9]] \times [[1,4]]$ (VAR_RECHERCHE_RECTANGLE_TAILLE). Pour laisser ce choix aux individus, nous proposons une réglette permettant d'instancier le problème sur des cas particuliers. VAR_DID_REGLETTE concerne la taille de la réglette ainsi que sa coloration sur les bords. Tout d'abord, nous avons choisi de fixer sa taille pour délimiter le plus grand rectangle possible, c'est-à-dire construire un rectangle 4×9. En effet, notre hypothèse est que les sujets vont choisir la plus grande taille du rectangle à paver et cette dernière est pavable ou non suivant les types de rectangles considérés. Ensuite, nous choisissons de construire nos réglettes avec une couleur verte au SUD et bleue à l'EST car suivant les couleurs du NORD et de l'OUEST des rectangles fixées, on va pouvoir construire des rectangles pour les trois types (figure IX.12).

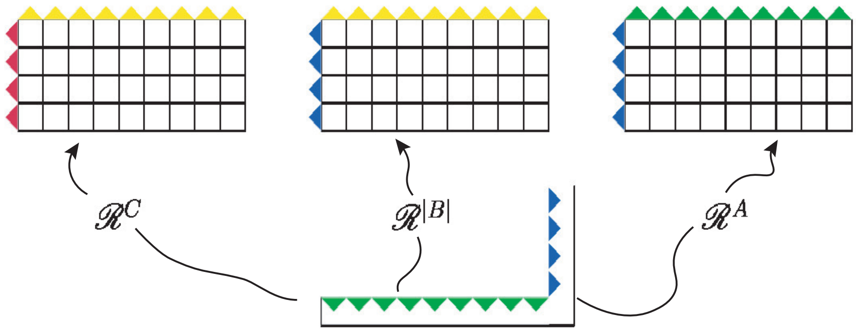


***Figure IX.12** – Construction des trois types de rectangle à partir de la réglette.*

Exemple IX.10

Voici un exemple d'un rectangle de type C et de taille 3×6 construit à partir de la réglette modulable.

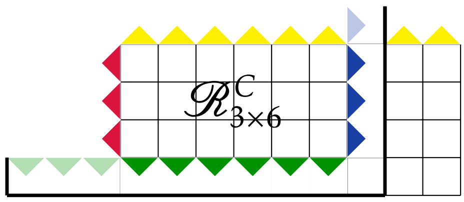


***Figure IX.13** – Construction d'un rectangle à paver de type C et de taille 3×6.*

Le lecteur ou la lectrice remarquera que la coloration des bords des rectangles est constituée de triangles colorés extérieurs à la région à paver. Ce choix se justifie par le fait que nous n'avons pas voulu proposer ces contraintes avec des triangles sur la frontière intérieure du rectangle puisque épistémologiquement le problème consiste à paver avec des tuiles carrées et non des triangles. En outre, si on avait fait le choix de positionner les triangles colorés sur les bords intérieurs de la région à paver, cela aurait pu influencer la procédure FORÇAGE. En revanche, nous avons tout de même conscience qu'en ayant disposé de cette manière les triangles, cela pourrait induire la stratégie DENOMBREMENT lors de l'élaboration d'une preuve d'impossibilité. Néanmoins, ce choix de disposition concernant les triangles colorés sur les bords du rectangle est aussi volontaire de notre part puisque la stratégie DENOMBREMENT est difficilement mise en œuvre.

Il faut en effet penser à déstructurer les tuiles en quatre secteurs triangulaires colorés, pour ensuite dénombrer, de deux manières, le nombre de triangles colorés pour une couleur i choisie avec $i \in \{b, j, v, r\}$.

Choix dans le cas des bandes bi-infinies où la valeur de VAR_DID_NBRE_BORDS vaut deux

VAR_DID_BANDE_TAILLE est une variable didactique caractérisée par le couple : hauteur h de bande bi-infinie considérée et sa « longueur maximale ». Notre analyse mathématique montre la pertinence de fixer les valeurs dans le cas où $h = 1$ et $h = 2$. En effet le fait de fixer la hauteur à $h = 1$ peut favoriser l'usage de la stratégie MOTIF_PERIODIQUE pour démontrer l'existence d'un pavage de la bande bi-infinie pour $h = 1$. Lorsque $h = 2$, on retrouve également cette stratégie, mais pour construire le motif, on peut également avoir recours à la stratégie EMPILEMENT qui vise à construire des blocs verticaux de deux tuiles valides et chercher ensuite un motif périodique par la concaténation de ces blocs. Pour construire ce pavage, il est parfois nécessaire d'avoir recours à une procédure d'élimination de blocs ou de tuiles qui ne peuvent pas avoir de voisins à gauche ou à droite (voir chap. VIII). En outre, comme on veut faire travailler les sujets sur des bandes théoriquement infinies à l'Est et à l'Ouest, il est nécessaire de proposer une longueur assez conséquente pour faire comprendre que ce sont bien des bandes bi-infinies et non des rectangles. Lorsque $h = 1$ (resp. $h = 2$) nous proposons une bande d'une longueur de seize cases (resp. dix-sept cases).

Ces valeurs nous semblent un choix raisonnable. De plus, nous verrons dans le prochain paragraphe comment renforcer le fait que la région à paver soit bi-infinie à l'est et à l'Ouest. Enfin, nous verrons que les choix sur les valeurs de cette variable dépendent aussi des contraintes ergonomiques du matériel que nous évoquerons par la suite.

VAR_DID_BANDE_BORDS concerne les contraintes de coloration sur bords Nord et Sud des bandes. Pour accentuer le caractère bi-infini des bandes, nous allons couper les cases situées sur les bords Est et Ouest pour donner l'impression que les bandes se poursuivent indéfiniment à gauche et à droite. De plus, la règle du jeu concernant le problème de Wang interdit les rotations et les réflexions sur les tuiles, sinon le problème n'a plus d'intérêt (voir exemple VII.1, p. 107). Afin de fixer l'orientation des tuiles nous allons imposer, dans le cas des problèmes WANG-1-BANDE et WANG-2-BANDE, des couleurs sur leurs bords Nord et Sud : pour WANG-1-BANDE, ces bords seront monochromes et de couleurs différentes. En effet, d'une part les couleurs Nord et Sud n'interviennent pas dans la construction du pavage, c'est donc pour cela que l'on choisit des bords monochromes [4], et d'autre part, cela impose une orientation des tuiles afin que le sujet n'effectue pas de rotation sur celles-ci. Effectivement, si les deux bords monochromes sont de la même couleur, il suffit d'une tuile, à rotation près, pour paver la bande de hauteur $h = 1$ (exemple IX.11).

Exemple IX.11

En prenant par exemple des bords NORD et SUD monochromes d'une même couleur, on s'aperçoit qu'il suffit alors d'effectuer une rotation d'une des tuiles, de la collection, τ_1 par exemple, pour construire un motif 2×1 horizontalement périodique.

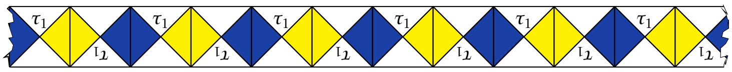


FIGURE IX.14 – Pavage de la bande bi-inifinie $\mathfrak{B}_1$ avec des bords NORD et SUD de la même couleur : une tuile suffit à rotation près pour paver $\mathfrak{B}_1$.

Lorsqu'on impose des couleurs différentes sur les deux bords monochromes, les rotations de tuiles ne sont donc plus permises, puisqu'un sens est imposé.

Pour le problème WANG-2-BANDE, si on impose uniquement le bord monochrome au NORD (resp. SUD) de la première bande (resp. de la deuxième bande), c'est-à-dire sur son axe de réflexion horizontale, alors le problème WANG-2-BANDE revient en réalité à résoudre WANG-1-BANDE pour chacune des bandes (voir propriété VIII.19, p. 198). Nous n'imposerons donc pas de couleur sur cet axe de symétrie. En revanche, nous devons imposer un sens aux tuiles afin d'empêcher les rotations (et donc une résolution triviale). Ainsi, on va là encore imposer des couleurs différentes sur les bords NORD et SUD de la bande de hauteur $h = 2$. Des stratégies comme MOTIF_PERIODIQUE et EMPILEMENT peuvent émerger. Effectivement, on pourra rechercher sur chacune des lignes de la bande de hauteur $h = 2$ deux motifs horizontalement périodiques permettant de paver les deux bandes de hauteur $h = 1$ et ensuite, vérifier par empilement, la validité du pavage construit. Le raisonnement est analogue sur les colonnes grâce à des empilements verticaux de deux tuiles.

Choix dans le cas du plan où la valeur de VAR_DID_NBRE_BORDS est nulle

VAR_DID_PLAN est une variable didactique qui concerne l'environnement décrivant le plan discret $\mathbb{Z}^2$. Dans ce cas, il est toujours important de ne pas

4. Si on avait fait le choix d'avoir des bords de couleurs distinctes mais pas nécessairement monochromes cela aurait influencé le positionnement des tuiles sur la bande et *a fortiori* la construction d'une solution…

autoriser les rotations, sinon le pavage est trivial comme dans le cas des bandes. Ainsi, dans chaque cellule du plan, on va mettre un poinçon qui sera également sur le nord des tuiles afin de les orienter et ainsi éviter les rotations de ces dernières. De plus, paver le plan nécessite en théorie une infinité de tuiles pour recouvrir une infinité de cases... Or, en pratique le matériel contraint le plan à devenir une région finie, il est donc nécessaire de faire comprendre au sujet que la région n'est pas bornée, c'est-à-dire que les cases à l'EST et à l'OUEST puis au NORD et au SUD continuent indéfiniment. Cela nécessite donc, d'un point de vue matériel, un nombre de cases conséquent et un contour non fermé afin d'appréhender le caractère non borné de la région considérée. Nous proposons de considérer la région ci-dessous comme étant une portion du plan de $\mathbb{Z}^2$.

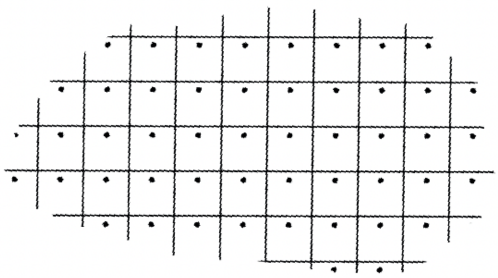


FIGURE IX.15 – Portion du plan discret avec un poinçon sur le NORD de chaque cellule pour imposer l'orientation des tuiles.

Ainsi, nous venons, à travers ces différents paragraphes, d'identifier les variables (et leurs valeurs) relatives aux régions à paver. Il nous reste à déterminer les variables didactiques et leurs valeurs associées en lien avec les collections de tuiles.

Choix sur la forme des tuiles

VAR_DID_TUILE_ASPECT concerne la forme des tuiles dans les différentes collections que nous présenterons ci-après. Ces tuiles pourraient prendre deux aspects différents. Un premier choix serait de construire les tuiles à partir de quatre triangles colorés. Un second serait de donner directement les tuiles sous la forme de carré avec les secteurs triangulaires déjà colorés. Pour nos ingénieries, nous retenons le second choix. En effet, un premier argument de nature épistémologique est que le problème de Wang sur différentes régions est un problème de pavage avec des tuiles carrées et non un problème de pavage avec des triangles. Ensuite, le deuxième argument est davantage de nature didactique car donner des secteurs triangulaires ne permet pas de garantir la structure exacte des tuiles données par une collection. Dans le sens que le sujet peut, lors de la construction d'un pavage, faire une erreur locale dans la structuration de tuiles. Par exemple, doubler une couleur ou construire une autre tuile qui n'est pas dans la collection donnée... Il y a donc là un empêchement didactique correspondant au choix du concepteur qui peut favoriser, dans une certaine mesure, l'erreur locale du sujet sur la structure des tuiles et qui conduit ce dernier à une solution globale erronée. Retenons également que donner des tuiles triangulaires à la place de tuiles carrées favorise la stratégie FORÇAGE comme on pourrait le faire sous la forme « papier-crayon ». En effet, puisque pour poser une tuile carrée sur la région à paver, on décompose cette action par l'ajout de quatre secteurs triangulaires colorés. C'est bien ce que l'on fait aussi lorsqu'on représente les tuiles sous la forme « papier-crayon » [5]. Enfin, le troisième et dernier argument est de nature ergonomique liée au phénomène de *catachrèse* (Rabardel, 1995), c'est-à-dire de détournement de l'artefact de ce pourquoi il est destiné initialement. Le fait de donner des secteurs triangulaires quadruple le nombre d'objets pouvant être manipulés, puisque pour une tuile donnée, il y a quatre secteurs triangulaires. De fait, cela peut entrainer un phénomène de *catachrèse*. Ce détournement pourrait être plus ou moins éloigné de ce pourquoi le matériel est destiné. Par exemple, construire des empilements de triangles ou paver avec des triangles différentes formes géométriques... Pour ces raisons, nous faisons donc le choix de donner des collections de tuiles carrées avec les quatre secteurs triangulaires déjà colorés.

Choix sur la collection de tuiles pour les rectangles

VAR_DID_RECTANGLE_COLLECTION concerne la collection de tuiles pour les situations en lien avec WANG-RECTANGLE-A, WANG-RECTANGLE-B et WANG-RECTANGLE-C. Les valeurs de cette variable didactique sont de différentes natures : choix du type de tuiles, du nombre de couleurs dans la collection, des couleurs sur les tuiles et du nombre de tuiles à disposition. Pour effectuer ces choix, nous avons vu que, de manière générale, le problème de Wang sur des rectangles à bords monochromes est $\mathcal{NP}$-complet (voir théorème VII.10, p. 136). Ainsi, il n'existe actuellement pas de méthode algorithmique efficace permettant de décider de l'existence d'un pavage. Nous avons donc fait un premier choix sur le type de tuiles de la collection en prenant toutes les tuiles possédant exactement quatre couleurs distinctes par tuile parmi un ensemble fini $\mathcal{X}$ de k couleurs pour favoriser l'accessibilité à la preuve et aux différents raisonnements inhérents à ces dernières. Notre analyse épistémologique a montré que tous

5. Dans le prochain paragraphe nous compléterons ces arguments de nature didactique par le fait que cette décomposition en triangles peut influencer également la stratégie DENOMBREMENT pour les situations des rectangles de type A, B et C.

les pavages existaient quels que soient la taille du rectangle et le type dès lors que $\#\mathcal{X} > 4$. De plus, nous souhaitons faire travailler les sujets sur les notions d'existence et d'impossibilité relatives aux CS et CN en mathématiques. Et, notre étude épistémologique a permis de montrer que lorsque $\#\mathcal{X} = 4$ on peut, en particulier, travailler ces notions, puisque suivant le type de rectangle considéré et la taille de ce dernier, il existe ou non des pavages. Ainsi, nous faisons le choix de fixer la collection de tuiles avec $\#\mathcal{X} = 4$, ce qui nous donne au total une collection de vingt-quatre tuiles, qui est le nombre des 4-arrangements possibles. Par rapport à cette taille, nous faisons le choix de donner uniquement six types de tuiles puisqu'ici il n'y a aucune restriction sur les rotations des tuiles car on possède une collection complète de tuiles à quatre couleurs distinctes dans un ensemble $\#\mathcal{X} = 4$. Ainsi, il suffit de ranger les tuiles en fonction de ces six types, ce qui pourra faciliter la recherche de tuiles spécifiques. Cette recherche aurait été plus difficile si on avait proposé, pour chacune des vingt-quatre tuiles, des tas. De fait, le nombre de types de tuiles sera alors réduit, ce qui pourrait aussi atténuer le phénomène de *catachrèse*. A cette occasion, nous observons qu'au mieux, nous pouvons paver des rectangles de taille 4×9. Ainsi, pour chaque type de tuiles nous proposons au plus trente-six tuiles. Notons que si on avait fait le choix d'enlever certains types non nécessaires à la construction de pavages, cela aurait pu influencer les stratégies expertes d'existence telles que MOTIF_PERIODIQUE et (DE)CONSTRUCTION (voir théorème VIII.1, p. 164). Nous faisons ensuite le choix de proposer quatre couleurs bien distinctes et identifiables dans les couleurs de base : le bleu, le jaune, le vert et le rouge [6]. Enfin, si on avait proposé les tuiles sous la formes de triangles colorés cela aurait pu influencer la stratégie DENOMBREMENT puisque la partition de tuiles carrées en quatre secteurs triangulaires est clairement donnée. On voit donc les tuiles comme des triangles et cela peut guider dans la preuve de la CN pour pouvoir paver des rectangles de type A, B ou C puisqu'elle consiste à dénombrer de deux manières différentes le nombre nécessaire de triangles colorés pour une couleur donnée.

La figure IX.16 représente l'ensemble élémentaire pour les rectangles constitué de six tuiles.

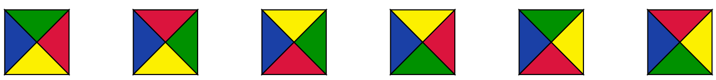


***Figure IX.16** – Les six types de tuiles de Wang pouvant générer la collection complète de vingt-quatre par rotations.*

6. Pour des personnes mal voyantes (daltonien, etc.) ou non voyantes, on aurait pu mettre des formes géométriques sur les secteurs triangulaire à la place des couleurs ou proposer des motifs en relief afin de faciliter l'identification des différences.

Choix sur les collections de tuiles pour les bandes bi-infinies $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$

VAR_DID_BANDE_COLLECTION concerne les collections de tuiles pour les bandes bi-infinies de hauteur $h = 1$ et $h = 2$. Lorsque $h = 1$, nous avons vu qu'il est nécessaire d'avoir des bords NORD et SUD différents afin de pouvoir fixer l'orientation des tuiles. Ainsi pour chaque tuile τ de $\mathcal{T}$, on a $\tau_N \neq \tau_S$ et on fixe une même couleur au nord (*resp.* sud) pour toutes les tuiles de $\mathcal{T}$. En plus, pour chacune des tuiles, les couleurs EST et OUEST seront différentes sinon le problème n'a plus d'intérêt, puisqu'il suffit de translater une tuile.

Par ailleurs, nous avons fait le choix de ne pas mentionner explicitement, lors de la formulation de la question, le fait de devoir utiliser toutes les tuiles ou seulement une partie, ce choix est donc implicite et est ainsi laissé à la charge de celui ou celle qui résout le problème. Nous attacherons donc une importance à confronter les sujets, suivant leurs choix, à des cas d'existence et d'impossibilité. Nous proposerons donc un ensemble de tuiles pour lequel il est possible d'exhiber une solution avec une sous-collection de tuiles de $\mathcal{T}$ mais où il est impossible de construire une solution avec toutes les tuiles par exemple.

Nous donnons ci-après la collection $\mathcal{T}$ de huit tuiles que nous proposerons dans le cas de la situation d'une bande bi-infinie de hauteur $h = 1$ et dont les choix seront justifiés par la suite [7].

FIGURE IX.17 – Collection $\mathcal{T}$ de huit tuiles pour la situation de la bande bi-infinie de hauteur $h = 1$.

Cette collection permet d'exhiber plusieurs circuits de tuiles. Nous en proposons quelques-uns ci-après.

Exemple IX.12
On peut par exemple construire un circuit $\mathcal{C}_1$ de tuiles de longueur $l(\mathcal{C}_1) = 3$ tel que $\mathcal{C}_1 =< \tau_5\tau_3\tau_6 >$.

FIGURE IX.18 – Pavage de $\mathfrak{B}_1$ avec un circuit horizontalement périodique de trois tuiles.

Il aurait été également possible de construire un autre circuit $\mathcal{C}_2$ de longueur $l(\mathcal{C}_2) = 6$ avec prenant $\mathcal{C}_2 =< \tau_1\tau_4\tau_7\tau_2\tau_3\tau_6 >$.

7. Le nom des tuiles τ_i pour $i \in \{1,...,8\}$ ne sera pas mentionné sur le matériel.

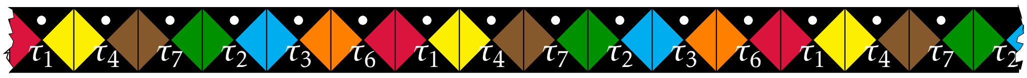


Figure IX.19 – *Pavage de $\mathfrak{B}_1$ avec un circuit horizontalement périodique de six tuiles.*

Nous donnons ci-après la liste exhaustive des circuits de tuiles possibles permettant d'exhiber un pavage valide de $\mathfrak{B}_1$. Cette liste a été mise en avant grâce aux compléments d'analyse mathématique donnés à l'annexe C (p. 327).

Circuit de tuiles de $\mathcal{T}$	Élémentaire
$< \tau_5\tau_3\tau_6 >$	OUI
$< \tau_3\tau_6\tau_5 >$	OUI
$< \tau_6\tau_5\tau_3 >$	OUI
$< \tau_1\tau_4\tau_7\tau_2\tau_3\tau_6 >$	OUI
$< \tau_5\tau_3\tau_6\tau_5\tau_3\tau_6 >$	NON
$< \tau_4\tau_7\tau_2\tau_3\tau_6\tau_1 >$	OUI
$< \tau_3\tau_6\tau_1\tau_4\tau_7\tau_2 >$	OUI
$< \tau_3\tau_6\tau_5\tau_3\tau_6\tau_5 >$	NON
$< \tau_2\tau_3\tau_6\tau_1\tau_4\tau_7 >$	OUI
$< \tau_6\tau_1\tau_4\tau_7\tau_2\tau_3 >$	OUI
$< \tau_6\tau_5\tau_3\tau_6\tau_5\tau_3 >$	NON
$< \tau_7\tau_2\tau_3\tau_6\tau_1\tau_4 >$	OUI

Tableau IX.3 – *Liste exaustive des circuits de tuiles (non nécessairement élémentaires) de longueur trois et six.*

Une façon d'exhiber de manière constructive un circuit de tuiles dans le cadre de nos expérimentations concerne la mise en œuvre de la stratégie MOTIF_PERIODIQUE combinée à la stratégie FORÇAGE ou BRUTE-FORCE par exemple.

De plus, le fait d'avoir choisi des longueurs de circuits raisonnables nous permet de pouvoir observer facilement la répétition des motifs 1×3 et 1×6. Dans le premier cas, le motif pourra, en pratique, être répété cinq fois et dans le deuxième cas, presque trois fois puisque la longueur de la bande est de seize cases.

De plus, nous rappelons que dans notre ingénierie, la formulation de la question ne précise pas si l'on doit utiliser une partie ou toutes les tuiles de la collection. Ce choix est donc à la charge du sujet qui résout le problème. Il est probable que ce dernier veuille paver la bande avec la collection complète.

L'argument de la remarque précédente permet alors de démontrer cette impossibilité. Ainsi, il n'est pas possible de construire un circuit eulérien de tuiles (*i.e.* avec toutes les tuiles de $\mathcal{T}$). De plus, le problème de recherche d'un circuit de tuiles maximal (resp. minimal) est soluble et la longueur maximale (resp. minimale) du circuit élémentaire est de six tuiles (resp. trois tuiles). De surcroît, comme le plus petit circuit de tuiles construit est de longueur trois et comme nous avons seize cases à paver, il faut alors dupliquer chacune des tuiles au moins quatre fois afin de ne pas influencer la longueur du motif à chercher.

Enfin, lors de nos deux dernières expérimentations, nous fixerons la valeur de la taille de la collection de tuiles, non plus à huit, mais à sept (figure IX.20) en supprimant la tuile τ_6 de notre collection initiale (figure IX.17, p. 236). Ici, notre intention didactique est de confronter les individus à la notion d'impossibilité grâce à la mise en œuvre d'arguments qui permettent de prouver l'inexistence d'un pavage de la bande $\mathfrak{B}_1$ dans ce cas. Le lecteur ou la lectrice remarquera que la suppression de cette tuile (τ_6) implique successivement l'élimination des autres jusqu'à ce qu'il ne reste que la tuile τ_8. Or, il est clair que cette tuile ne suffit pas à elle seule pour paver la bande $\mathfrak{B}_1$. Le pavage de cette bande par cette collection dépourvue de la tuile τ_6 est donc impossible.

FIGURE IX.20 – Sous-collection de sept tuiles de $\mathcal{T}$ dépouvue de la tuile τ_6.

Pour prouver l'impossibilité à paver cette bande avec cette sous-collection de $\mathcal{T}$, les individus pourront avoir recours aux stratégies FORCAGE et BRUTE-FORCE permettant d'éliminer des cas et prouver que le pavage s'arrête nécessairement à partir d'une certaine taille de motif. Supposons que les individus tentent d'abord de paver la bande en construisant, pas à pas, des motifs de plus en plus grands jusqu'à atteindre un motif unique de taille maximale 1×5 (figure IX.21, p. 239). C'est la stratégie FORÇAGE, par exemple, qui permettra de démontrer qu'il n'existe aucun autre motif d'une longueur plus grande que cinq. En effet, la seule manière de construire le motif 1×5 est de commencer à gauche avec la tuile τ_1 (resp. à droite avec la tuile τ_3 mais le raisonnement est analogue). Cette tuile impose donc l'ajout de la seconde, la seconde impose l'ajout de la troisième... et on constate que la cinquième tuile ne peut plus avoir de voisin à sa droite [8]. Ainsi, le pavage de $\mathfrak{B}_1$ est impossible.

8. La première tuile ne peut pas non plus avoir de voisin à sa gauche.

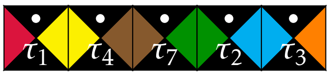


***Figure IX.21** – Unicité du chemin de longueur maximale de cinq tuiles.*

Pour la bande de hauteur $h = 2$, nous proposons, avec des modalités analogues au cas où $h = 1$, une autre collection de tuiles $\mathcal{T}$ (figure IX.22).

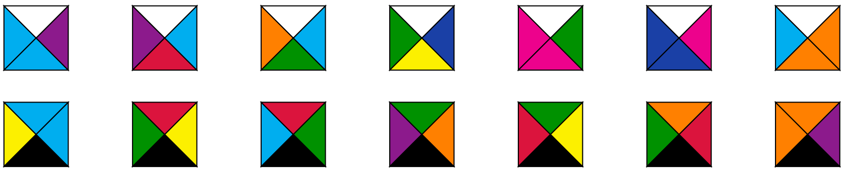


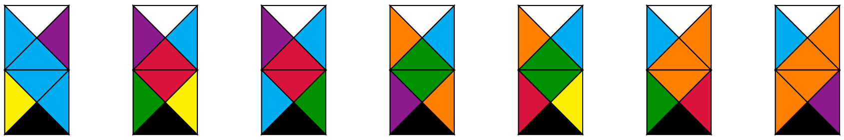
***Figure IX.22** – Collection $\mathcal{T}$ de quatorze tuiles.*

On identifie facilement deux sous-collections $\mathcal{T}_N$ et $\mathcal{T}_S$ de $\mathcal{T}$. La collection $\mathcal{T}_N$ est composée de sept tuiles ayant une couleur blanche au NORD. La collection $\mathcal{T}_S$ est quant à elle composée de sept tuiles ayant une couleur noire au SUD. Ainsi, cela permet d'éviter les rotations des tuiles puisque les tuiles de $\mathcal{T}_N$ (resp. $\mathcal{T}_S$) pourront être déposées uniquement sur la deuxième bande (resp. sur la première bande) qui compose la bande de hauteur $h = 2$. Le fait de proposer une collection de quatorze tuiles partitionnée en deux sous-collections de sept tuiles nous semble suffisant pour mettre en œuvre certaines stratégies sans pour autant que la collection soit de taille trop petite ou trop grande. De plus, la taille de la collection est aussi en lien avec les contraintes ergonomiques du matériel proposé et en particulier liée à la longueur de la bande $\mathcal{B}_2$ fixée par rapport au matériel (voir VAR_DID_BANDE_BORD). Les couleurs ont été choisies de telle sorte qu'elles sont bien différentiables [9]. Enfin, le choix de ces deux sous-collections permet de favoriser la stratégie EMPILEMENT voire de FORÇAGE conduisant à l'élaboration de la stratégie MOTIF_PERIODIQUE.

Nous avons fait également le choix de ne pas pouvoir, avec cette collection, exhiber un pavage de $\mathcal{B}_2$ avec toutes les tuiles de la collection. L'argument principal réside dans le fait qu'il existe des tuiles qui ne possèdent pas de voisin. Par exemple la tuile possédant la couleur jaune au SUD n'a pas de voisin en dessous car aucune tuile ne possède la couleur jaune au NORD.

Pour démontrer l'existence d'un pavage de $\mathcal{B}_2$, on construit tous les empilements possibles de blocs verticaux de deux tuiles. Il y a au plus $14^2 = 144$ possibilités. Bien évident certains blocs sont non valides, ainsi par une procédure d'élimination, on construit exactement sept blocs β valides (figure IX.23).

9. Là encore pour un public non voyant ou mal voyant, il aurait été possible de proposer des tuiles avec des formes géométriques à la place des couleurs ou des reliefs afin d'identifier clairement les couleurs différentes.

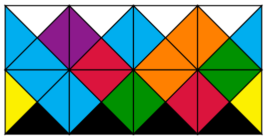


β_1 β_2 β_3 β_4 β_5 β_6 β_7

FIGURE IX.23 – *Énumération de tous les blocs verticaux de deux tuiles valides avec la collection $\mathcal{T}$ de la figure IX.22.*

On cherche, à partir de ces blocs, à construire un circuit permettant de paver $\mathfrak{B}_2$ à l'aide d'un motif horizontalement périodique. Nous en donnons un exemple ci-après.

Exemple IX.13



β_1 β_3 β_6 β_5

FIGURE IX.24 – *Exemple d'un motif rectangulaire horizontalement périodique de taille 2×4 permettant de paver $\mathfrak{B}_2$ par translations.*

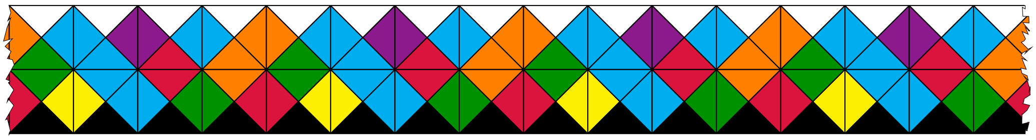


FIGURE IX.25 – *Un exemple de pavage de $\mathfrak{B}_2$ avec le motif précédent.*

Nous donnons ci-après la liste exhaustive des circuits de bloc β possibles pour paver la bande $\mathfrak{B}_2$. La mise en évidence de ces blocs est décrite dans les compléments d'analyse mathématique à l'annexe C (p. 327).

Circuit de blocs β	Élémentaire
$< \beta_7\beta_4 >$	OUI
$< \beta_4\beta_7 >$	OUI
$< \beta_1\beta_3\beta_6\beta_5 >$	OUI
$< \beta_3\beta_6\beta_5\beta_1 >$	OUI
$< \beta_6\beta_5\beta_1\beta_3 >$	OUI
$< \beta_5\beta_1\beta_3\beta_6 >$	OUI
$< \beta_7\beta_4\beta_7\beta_4 >$	NON
$< \beta_4\beta_7\beta_4\beta_7 >$	NON

$< \beta_7\beta_4\beta_7\beta_4\beta_7\beta_4 >$	NON
$< \beta_4\beta_7\beta_4\beta_7\beta_4\beta_7 >$	NON

Tableau IX.5 – *Liste exhaustive des circuits de tuiles (non nécessairement élémentaires) de longueur deux, quatre et six.*

Le tableau IX.5 ci-avant permet de donner toutes les possibilités de circuits élémentaires et non élémentaires d'une longueur maximale de six blocs verticaux de hauteur $h = 2$ pouvant être exhibés lors de nos expérimentations. Par ailleurs, remarquons qu'en réalité certains circuits de longueur $l(\mathcal{C}) = 4$ et $l(\mathcal{C}) = 6$ sont des circuits non élémentaires et peuvent être réduits à des circuits élémentaires de longueur $l(\mathcal{C}) = 2$.

On aurait pu également raisonner ligne par ligne et procéder par concaténation de deux bandes $\mathfrak{B}_1$ pour construire $\mathfrak{B}_2$. D'ailleurs, ce processus permet d'exhiber des motifs horizontalement périodiques au départ sans pour autant que ces motifs sur deux lignes soient rectangulaires. En revanche, en poursuivant le pavage, par ce type de motifs, on forme également un motif rectangulaire horizontalement périodique (voir théorème VII.1 des motifs périodiques, p. 109).

Exemple IX.14

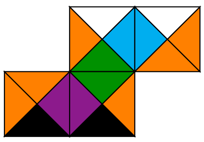


Figure IX.26 – *Motif horizontalement périodique.*

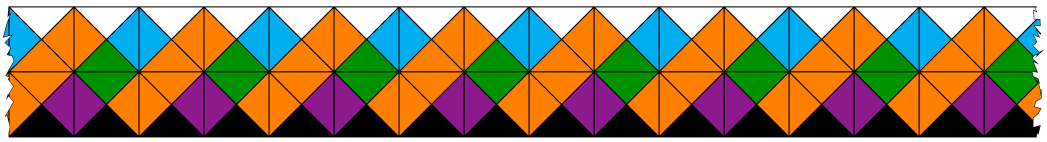


Figure IX.27 – *Pavage de $\mathfrak{B}_2$ par translations horizontales du motif précédent.*

Choix sur la collection de tuiles pour le plan

VAR_DID_PLAN_COLLECTION est une variable didactique qui est constituée d'un triplet : le nombre de tuiles, leurs types et leurs couleurs dans le cas de la situation du plan. Nous présentons ci-après la collection (figure IX.28).

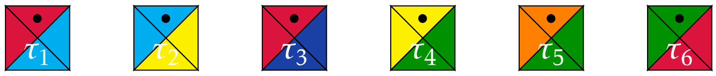


FIGURE IX.28 – Collection de sept tuiles pour la situation du plan.

Le type de tuiles proposé concerne la famille des tuiles coupées en diagonal qui permet d'exhiber, lorsque cela est possible, un pavage périodique du plan par empilements non triviaux (voir p. ex., figure VIII.58, p. 205) contrairement aux autres familles de tuiles étudiées dans notre analyse mathématique. De plus, les couleurs et le nombre de tuiles ont été choisis là encore pour permettre d'une part de bien dissocier les couleurs des tuiles et d'autre part afin de ne pas avoir un nombre trop petit (resp. trop grand) de tuiles pour tenter de paver la région du plan donnée. En outre, rappelons que la propriété VIII.26 (p. 207) nous permet d'affirmer la CS suivante : si $\mathfrak{B}_1$ est pavable par des tuiles de la collection (figure IX.28), alors il existe un pavage périodique du plan discret. A cette occasion, la collection de la figure IX.28 permet d'exhiber un circuit de tuiles. Pour cela, on peut utiliser, par exemple, une procédure d'élimination. En effet, on remarque que la tuile τ_5 possède une couleur orange à l'OUEST et qu'aucune autre tuile ne possède cette couleur à l'EST. Donc, s'il existe un circuit de tuiles, ce dernier ne peut pas contenir cette tuile. Le constat est analogue pour la tuile τ_3 par rapport à sa couleur à l'EST. Ainsi, on peut déjà supprimer ces deux tuiles et cela n'implique pas l'élimination d'autres tuiles. Il reste donc quatre tuiles qui permettent d'exhiber un circuit de tuiles pavant $\mathfrak{B}_1$ et donc un pavage du plan discret (figure IX.29).

Exemple IX.15

Nous donnons ci-dessous un exemple de pavage de $\mathbb{Z}^2$ à partir de quatre tuiles de notre collection.

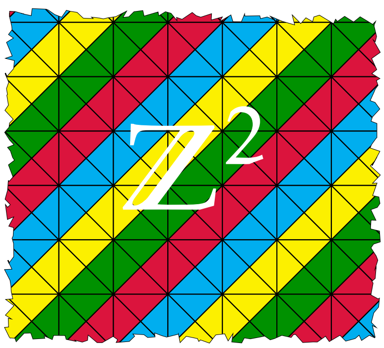


FIGURE IX.29 – Pavage de $\mathbb{Z}^2$ avec la collection de la figure IX.28.

On remarque de plus qu'il n'est pas possible de construire un pavage à partir de seulement une, deux ou trois tuiles. Dans ce contexte quatre tuiles suffisent et sont même nécessaires pour engendrer un pavage du plan. Nous donnons la liste exhaustive des circuits possibles permettant de générer un pavage de $\mathbb{Z}^2$. Ils sont en nombre de quatre et ils sont tous élémentaires.

Circuit de tuiles de $\mathcal{T}$	Élémentaire
$< \tau_1\tau_2\tau_4\tau_6 >$	OUI
$< \tau_2\tau_4\tau_6\tau_1 >$	OUI
$< \tau_4\tau_6\tau_1\tau_2 >$	OUI
$< \tau_6\tau_1\tau_2\tau_4 >$	OUI

***Tableau IX.7** – Liste exaustive des circuits de tuiles élémentaires de longueur quatre.*

Avec ce choix de collection, on retrouve les stratégies précédemment évoquées comme FORÇAGE et EMPILEMENT conduisant à la stratégie de MOTIF_PERIODIQUE.

Choix sur la disposition des situations

VAR_DID_DISPOSITION_SITUATION est une variable didactique concernant la disposition relative des situations qui peuvent influencer certaines stratégies. En effet, pour chaque type de situations nous présentons trois instances différentes (type A, B et C) dans le cas borné et dans le cas de régions non bornées ou semi-bornées (le plan, les bandes de hauteur $h = 1$ et $h = 2$). Pour chacun des types, les stratégies utilisées pour l'une des situations peuvent parfois être réinvesties dans les deux autres situations voire dans les situations d'autres types puisqu'il existe des invariants de preuves utilisés dans les différentes stratégies et valables pour la plupart des situations. D'ailleurs, les relations entre les problèmes ont été établies dans notre analyse mathématique (chap. VIII) et synthétisées à travers l'espace-problème de Wang.

En outre, cette variable ne joue pas qu'un simple rôle sur les stratégies potentiellement adoptées mais permet aussi de renforcer la socialisation lors de l'activité et contribue à des situations de formulation et de validation entre pairs en plus des situations d'action. Cet aspect sera discuté plus loin.

2.5 Validation des critères du modèle des SiRC

Dans cette partie nous allons montrer en quoi ces différentes situations satisfont le modèle des SiRC décrit par Grenier et Payan (2003). L'opérationnalisation du modèle a déjà été en partie explicitée dans les cas des rectangles (p. ex., Da Ronch et Gandit, 2021 ; Da Ronch, Gandit et Gravier, 2020, 2021). Nous en donnons les grandes lignes ici en complétant le cas des bandes bi-infinies et du plan.

Premièrement, les situations doivent faire référence à des problèmes de recherche actuels pouvant être encore ouverts. C'est bien le cas dans nos situations. Les situations proposées découlent en effet d'une analyse épistémologique fine qui a permis de mettre en avant la proximité avec des problèmes de recherche contemporaine de pavages du plan. Ces problèmes sont inhérents à des questions d'(a)périodicité, de calculabilité voire de complexité algorithmique lorsque ces problèmes sont illustrés dans des régions discrètes et semi-bornées de $\mathbb{Z}^2$. Par exemple, le problème EIN STEIN est encore ouvert tout comme la recherche d'un algorithme déterministe polynomial pour résoudre WANG-REC-GEN et WANG-REC-k-MONOCHROME puisque, bien qu'on ait montré leur complétude pour la classe $\mathcal{NP}$, on ne sait toujours pas si un algorithme efficace existe car le problème « $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$? » est encore ouvert et constitue l'un des problèmes du millénaire. De plus, cela semble également le cas pour le problème de Wang sur des régions arbitraires et semi-bornées de Z^2 (outre des résultats connus sur des régions particulières comme les rectangles, les bandes bi-infinies ou les T-snake). Par exemple, existe-il un pavage de polyminos (connexe ou non) de taille arbitraire (non nécessairement bornée de partout) et de forme quelconque avec des tuiles de Wang d'une collection $\mathcal{T}$? Quel serait le besoin en ressources (temps et espace) pour résoudre ce problème ? *A priori* ce problème semble au moins aussi difficile que dans le cas particulier des rectangles...[10]

Deuxièmement, les questions portant sur les différents types de situations sont faciles d'accès et ne nécessitent pas la compréhension de contenus mathématiques très spécifiques, le vocabulaire est simple.

Troisièmement, les analyses épistémologique et didactique nous ont permis de mettre en avant des stratégies initiales sur des cas particuliers qui permettent d'entrer dans le problème sans que des pré-requis trop spécifiques ne soient nécessaires : FORCAGE, EMPILEMENT, MOTIF_PERIODIQUE...

Quatrièmement, comme nous l'avons mentionné au point trois, il existe une variété de stratégies qui peuvent être mobilisées et qui permettent de travailler la preuve avec différents développements en fonction de la situation traitée.

Enfin, il existe une variable de recherche qui concerne la taille des rectangles dont sa valeur est laissée à la charge des sujets.

Ainsi nos différentes situations répondent bien à la nomenclature des SiRC proposée par Grenier et Payan (2003).

10. Par exemple, Derouet-Jourdan, Kaji et Mizoguchi (2019) ont exhibé un algorithme linéaire pour paver des régions arbitraires avec des trous mais avec des conditions particulières sur les collections considérées...

Dans la prochaine partie, nous allons nous intéresser à la conception du milieu de nos situations et faire des liens avec les aspects ergonomiques et didactiques soulevés ci-avant.

3 Construction du milieu, ergonomie et évaluation par inspection

3.1 Milieu du sujet, milieu artefactuel et aspect ergonomique

Le milieu de la situation comprend le milieu artefactuel dans lequel le sujet (ou groupe de sujets) va agir en vue de résoudre les problèmes. Ce milieu est composé de deux tables hautes d'une hauteur adéquate pour des adultes et des enfants à partir de dix ans, ainsi que du matériel manipulable : tuiles, réglette (figure IX.30)[11]. Outre l'aspect matériel, le milieu de la situation comprend également les autres sujets présents (ceci permet de favoriser la socialisation et les dialectiques de formulation et de validation).

Enfin, le milieu du sujet relatif au contexte cognitif est bien pris en compte puisque même si nous n'avons pas accès aux savoirs antérieurs des sujets, nous avons fait le choix de proposer des situations faisant travailler essentiellement des connaissances d'ordre II. Les connaissances d'ordre I qui pourront être éventuellement mobilisées ne sont pas un frein en soi, puisque les contenus n'y sont pas trop spécifiques (voir section 2.1, p. 216).

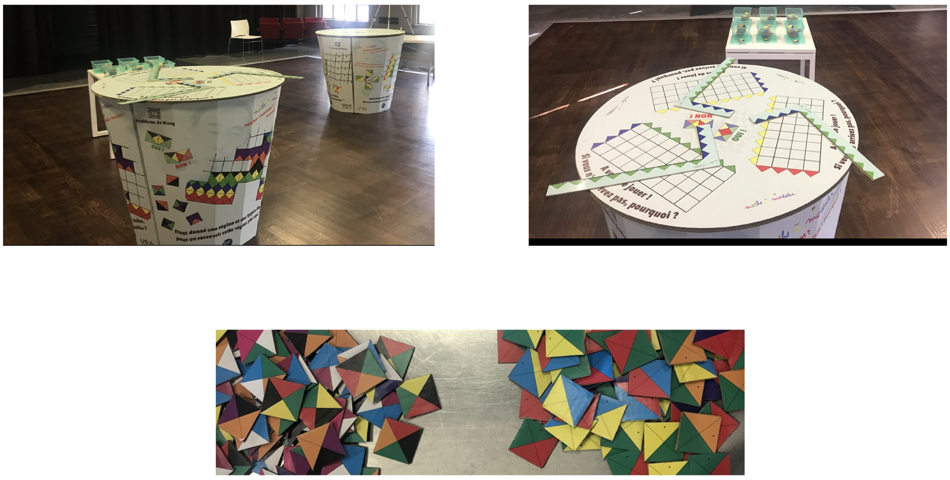


Figure IX.30 – *Une partie du milieu artefactuel.*

11. Tous les artefacts de nos situations ont été conçus avec du carton épais recyclable, sauf la réglette qui utilise un support en bois. A cette occasion, nous remercions la Structure Fédérative de Recherche Maths à Modeler pour le financement de l'impression du matériel.

D'après la partition du milieu artefactuel décrit dans le chapitre IV en zones fonctionnelles, nous avons conçu notre milieu artefactuel en trois zones principales : *la zone de travail* ($\mathcal{Z}_\mathcal{T}$), *la zone d'outillage* ($\mathcal{Z}_\mathcal{O}$) et *la zone d'information* ($\mathcal{Z}_\mathcal{I}$).

La *zone de travail* ($\mathcal{Z}_\mathcal{T}$) possède pour chaque table haute relative aux deux types de situations des « grilles » rectangulaires pour lesquelles chaque cellule carrée a une taille « raisonnable » de cinq centimètres de côté. Cette zone est la zone de modification sur laquelle le sujet va agir en vue d'effectuer des actions pour résoudre les problèmes. Le choix sur les tailles des grilles a été effectué en prenant en considération des éléments d'ordre didactique, comme nous l'avons décrit précédemment, mais aussi ergonomique puisque le matériel et en particulier les plateaux, sur lesquels les sujets vont agir, possèdent une certaine dimension qui contraint à proposer, pour chaque type de situations, trois situations avec des tailles de grilles particulières.

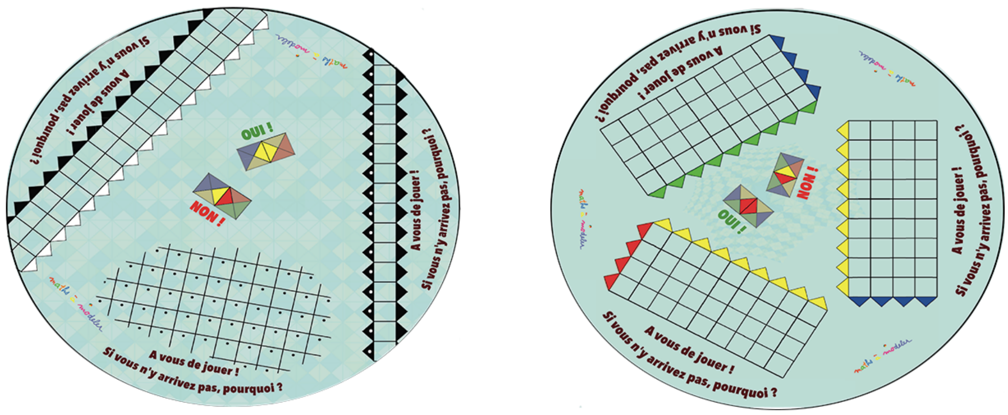


Figure IX.31 – *Plateaux des deux tables hautes représentant les deux types de situations.*

Concernant la *zone d'outillage* ($\mathcal{Z}_\mathcal{O}$) pour chaque type de situations, on retrouve la réglette permettant d'instancier et d'étudier les problèmes sur différents types de rectangles (A, $|B|$ ou C), et ce, suivant une taille choisie par le sujet qui résout le problème. D'un point de vue ergonomique et afin de pouvoir délimiter le contour des rectangles de taille $p \times q$ avec $1 \leqslant p \leqslant 9$ et $1 \leqslant q \leqslant 4$, nous avons proposé une réglette pouvant délimiter le contour maximal des rectangles. Il aurait été également intéressant de proposer une réglette plus grande que la longueur et la largeur maximales des rectangles constructibles mais cela aurait conduit à des soucis ergonomiques : dépassement des réglettes sur le plateau, risque de chevauchement des réglettes lorsque plusieurs sujets résolvent les problèmes en même temps. Nous avons toutefois conscience que le fait d'avoir fait ce choix incite les sujets à partir du rectangle de taille maximale puisque la réglette permet de délimiter la plus grande taille du rectangle. En outre, $\mathcal{Z}_\mathcal{O}$ met à disposition des sujets des tuiles [12] pour chaque situation proposée. Ces tuiles ont la même taille que les cellules des grilles de $\mathcal{Z}_\mathcal{T}$, à savoir que ce sont des tuiles carrées cartonnées de cinq centimètres de côté. Leur épaisseur est de trois millimètres. Ce choix permet afin d'avoir une bonne prise en main, même pour des enfants.

Figure IX.32 – *Exemple de réglette et de tuiles manipulables.*

Enfin, pour chaque type de situations la *zone d'information* ($\mathcal{Z}_\mathcal{I}$) présente la question ; la règle du jeu invite les sujets à réfléchir au cas où l'existence d'un pavage est impossible à l'aide des phrases accrocheuses disposées sur le plateau et le contour de la table haute : « *A vous de jouer, si vous n'y arrivez pas, pourquoi ?* » ou encore « *Possible, comment ? Impossible, pourquoi ?* ». Des exemples de pavages partiels sur d'autres régions sont proposés sur les contours des tables pour favoriser l'appropriation de la règle du jeu. En outre, on retrouve également un QR-code sur chaque table haute qui viserait à donner des éléments historiques sur le problème. Toutefois ce dernier point n'a pas été développé et constitue une perspective possible.

Figure IX.33 – *Contours des tables hautes représentant les zones d'information.*

12. Ces tuiles sont à proximité des sujets et des tables hautes afin que le public y ait accès facilement (figure IX.30, p. 245).

3.2 Évaluation par inspection de l'utilité, l'utilisabilité et l'acceptabilité

Utilité

Dans notre contexte les objectifs sont précisés puisqu'il s'agit de répondre aux questions posées sous la contrainte de la règle du jeu clairement explicitée sur le matériel. La disposition des situations sur les tables hautes et la disposition des tables hautes en elles-mêmes sont cohérentes par rapport à la proximité des problèmes en jeu et des invariants de preuves que l'on retrouve pour les résoudre (voir chap. VIII). De plus, on retrouve bien une adéquation dans le contenu proposé et les objectifs visés puisque notre analyse épistémologique et didactique a montré que les choix effectués sur la nature et les valeurs des variables didactiques ou de recherche influencent certaines stratégies en lien avec les connaissances d'ordre II visées. Enfin, les situations et le matériel proposé permettent une auto-régulation du sujet qui résout le problème grâce à la vérification, par la règle locale, de l'adjacence des couleurs.

Utilisabilité

Le guidage et les incitations sont suffisamment prégnants sans pour autant dénaturer la pratique mathématique en incitant le sujet à l'usage de telle ou telle stratégie. Le guidage ici est plutôt relatif à la règle du jeu et les illustrations de pavages partiels permettent de se l'approprier facilement. Les incitations, quant à elles, sont plutôt relatives à des phrases accrocheuses favorisant l'enrôlement dans la situation : « à vous de jouer ». Les rétroactions sont directement prises en charge par une dialectique milieu du sujet/conscientisation du sujet : existence d'un pavage, sans chevauchement ni dépassement d'une région, respectant la règle locale d'adjacence des couleurs.

Acceptabilité

La volonté des institutions de culture scientifique a clairement évolué prenant le parti pris de promouvoir les mathématiques à travers des activités impliquant le public selon des modalités didactiques de différentes sortes. Notre dispositif s'insère en tout point dans ce paradigme de démocratisation des mathématiques en ciblant en particulier la pratique mathématique en terme de démarche de recherche en résolution de problèmes. Ces situations ont été conçues pour un large public en faisant des choix adéquats de valeurs de variables en fonction de notre analyse épistémologique, des observations réalisées dans le milieu scolaire et universitaire et des contraintes ergonomiques du matériel. Ainsi, l'acceptabilité en terme d'adéquation avec les caractéristiques des sujets a été prise en charge en faisant en sorte, pour le public, de privilégier les connaissances d'ordre II relatives aux raisonnements et processus de preuves au lieu des connaissances d'ordre I pouvant être un frein dans la recherche de stratégies de résolution. Enfin, l'acceptabilité en terme d'organisation du temps et du lieu est respectée puisque ces situations sont dédiées à des dispositifs de médiation sans présence de médiateur, et ce dans des institutions où le temps alloué est suffisamment conséquent pour entrer dans une pratique mathématique de résolution de problème et où le public accepte, *a priori*, de manière volontaire d'y accorder un temps suffisant (puisque volontaire). Enfin, pour chaque situation le matériel nécessaire est proposé.

.

4 Choix des actions et caractérisation des micro-activités

Dans cette partie, nous présentons nos choix des observables retenus sur les actions (resp. micro-activités) afin de pouvoir retranscrire le plus fidèlement possible notre corpus de données audiovisuelles et ainsi faciliter le repérage de traces d'activité mathématique de sujets placés en résolution de problème.

4.1 Actions a_i sur les zones fonctionnelles du milieu

Pour ces situations on va dégager certains invariants au niveau des actions $a_i \in \mathcal{A}$ jugées épistémologiquement et didactiquement pertinentes. Ces actions seront orientées en fonction des zones fonctionnelles caractérisant notre milieu artefactuel. Enfin, pour une meilleure lisibilité des retranscriptions, nous donnerons également les micro-activités potentielles inhérentes à ces actions élémentaires.

Au niveau de $\mathcal{Z}_\mathcal{T}$, on retrouve trois $\mathcal{T}$-actions principales et une $\mathcal{S}_\mathcal{O}$-action monstrative. A noter que les $\mathcal{T}$-actions relatives à l'ajout, au déplacement, ou à la suppression se réalisent sur des objets tangibles (p. ex., tuile et réglette).

- la $\mathcal{T}$-action d'ajout d'un élément dans $\mathcal{Z}_\mathcal{T}$ est encodée par le signe « + » ;
- la $\mathcal{T}$-action de suppression d'un élément dans $\mathcal{Z}_\mathcal{T}$ est encodée par le signe « − » ;
- la $\mathcal{T}$-action de translation d'un élément de $\mathcal{Z}_\mathcal{T}$ est encodée par une flèche horizontale « $\longrightarrow$ » ;
- la $\mathcal{S}_\mathcal{O}$-action monstrative qui permet de pointer un élément de $\mathcal{Z}_\mathcal{T}$ est encodée par une flèche incurvée de l'extérieur vers l'intérieur (de droite à gauche) « $\curvearrowleft$ ».

Au niveau de la $\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$, on retient une $\mathcal{O}$-action.

- La $\mathcal{O}$-action de sélection/recherche d'élément dans $\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$ représentée par une flèche incurvée de l'intérieur vers l'extérieur (de gauche à droite) «  ».

$\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$ étant suffisamment fournie (nombre de tuiles en quantité), il n'est donc pas utile ici de distinguer les $\mathcal{O}_s$-actions de sélection et les $\mathcal{O}_d$-actions de dépôt.

Enfin, au niveau de $\mathcal{Z}_{\mathcal{I}}$, il pourrait y avoir par exemple la lecture de la consigne, l'utilisation du QR-code mais ces dernières seront, soit difficilement identifiables (lecture de la consigne), soit n'apporteront aucune plus-value puisque le site accessible via le QR-code est en cours d'élaboration et sera construit *a posteriori* de ce travail.

4.2 Micro-activités et exemples de retranscription et de résumé

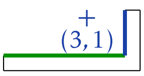
Pour retranscrire le plus fidèlement possible une action sur un objet réalisée par un sujet, c'est-à-dire une micro-activité, nous allons encoder les objets en précisant les coordonnées où l'action est réalisée dans notre repère (grille) ainsi qu'attribuer une couleur à chaque sujet qui réalise l'action.

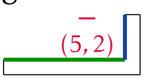
Afin que le lecteur ou la lectrice situe plus facilement ces micro-activités sur la grille, nous proposons une grille avec les coordonnées entières (figure IX.34) [13].

(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)	(7,4)	(8,4)	(9,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)	(7,3)	(8,3)	(9,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)	(7,2)	(8,2)	(9,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)	(7,1)	(8,1)	(9,1)

Figure IX.34 – *Grille 4×9 avec ses coordonnées entières.*

Exemple IX.16

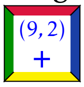
- 

L'angle (le coin) de la réglette, constitué d'une case, est positionné, par le sujet s_1 bleu, sur la case de coordonnées $(3,1)$ délimitant ainsi un rectangle de largeur deux et de hauteur trois (voir rectangle grisé de la figure IX.34, p. 250).
- 

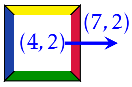
La réglette positionnée en $(5,2)$ est enlevée par le sujet s_1

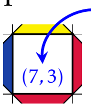
13. Les cases grisées aident à la compréhension du premier item de l'exemple IX.16, p. 250

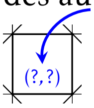
rouge.

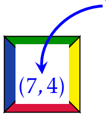
- 

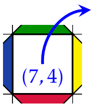
Le sujet s_1 bleu ajoute la tuile ayant la couleur verte à l'OUEST, bleue à l'EST, rouge au NORD et jaune au SUD en position $(9, 2)$ sur la grille.
- 

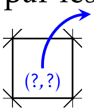
Le sujet s_2 rouge supprime la tuile ayant la couleur verte à l'OUEST, bleue à l'EST, rouge au NORD et jaune au SUD en position $(5, 4)$ sur la grille.
- 

Le sujet s_1 bleu déplace cette tuile de la position $(4, 2)$ à la position $(7, 2)$.
- 

Le sujet s_1 bleu pointe la cellule ayant pour coordonnées $(7, 3)$ et dont l'environnement au voisinage est déterminé par les bords colorés des autres tuiles.
- 

Le sujet s_1 bleu pointe une cellule mais nous n'avons pas le moyen de savoir précisément ses coordonnées ni même son environnement au voisinage de cette cellule.
- 

Le sujet s_1 bleu pointe la tuile dont les coordonnées sont $(7, 4)$.
- 

Le sujet s_1 bleu prend dans $\mathcal{Z}_\mathcal{O}$ la tuile correspondant à la cellule de coordonnées $(7, 4)$ et dont l'environnement au voisinage est déterminé par les bords colorés des autres tuiles.
- 

Le sujet s_1 bleu prend dans $\mathcal{Z}_\mathcal{O}$ une tuile (ou plusieurs tuiles) mais nous ne savons rien de plus sur son futur positionnement et son voisinage.
- [1] Première interaction sociale (dialogue, monologue). Pour un dialogue, le texte transcrit sera coloré en fonction des sujets s_k qui interviennent afin de faciliter l'identification de celui ou celle qui prend la parole. L'exposant servira à donner l'occurrence des interactions sociales.

Nous donnons ci-après un exemple de retranscription[14] et invitons le lecteur

14. Le sens du symbole ⋆ situé au dessus des micro-activités est explicité à la page 253.

ou la lectrice à s'approprier la sémantique des symboles à l'aide des exemples précédemment explicités afin de comprendre son sens.

Exemple IX.17

Cet extrait est issu de la situation des rectangles de type A. Les sujets ont donc à leur disposition du matériel tangible (tuiles et réglette). Dans cet exemple, deux sujets (bleu et rouge) agissent ensemble sur le milieu et tentent de résoudre le problème de pavage du rectangle 4×9 de type A. En effet, la case représentant le coin de la réglette en position $(10, 0)$ sur la grille rectangulaire (voir l'intervalle $[0, 1[$ de la retranscription ci-contre), nous permet de déduire que les individus tentent de résoudre le problème du rectangle 4×9.

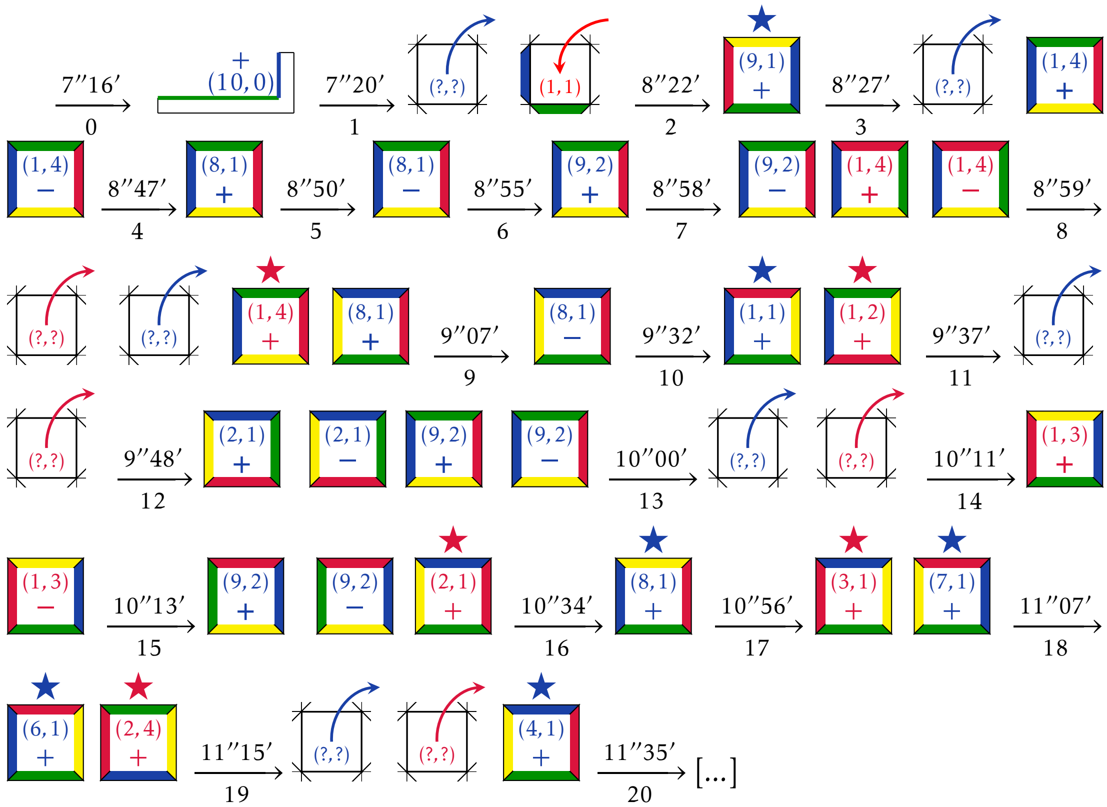


FIGURE IX.35 – Exemple d'une partie de retranscription entre deux sujets agissant sur la même situation (Da Ronch, Gandit et Gravier, 2023).

Rappelons que pour avoir une meilleure visibilité de la situation à un instant t, nous proposons *un résumé* montrant la $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$ dès lors qu'environ vingt-cinq pour-cent de la $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$ a été modifiée. Dans ce résumé, nous proposons de donner pour chaque sujet, le nombre d'occurrences de ses $\mathcal{T}$-actions sachant le nombre d'occurrences des $\mathcal{T}$-actions des autres sujets. Pour ces résumés, nous prendrons en compte uniquement trois $\mathcal{T}$-actions relatives à l'ajout « + », à la suppression « – » et au déplacement « $\longrightarrow$ » car elles modifient explicitement la $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$.

De plus, afin qu'il soit facile d'identifier les $\mathcal{T}$-actions qui apparaissent dans les résumés de celles qui n'apparaissent pas, nous inscrivons au-dessus des micro-activités le symbole ⋆ qui permet d'identifier dans la retranscription les $\mathcal{T}$-actions qui sont présentes dans les résumés (voir aussi exemple V.9, p. 69).

Le lecteur ou la lectrice trouvera ci-dessous l'exemple du résumé concernant le fragment de la retranscription précédente (voir exemple IX.17).

Exemple IX.18

Pour la situation des rectangles de type A, par exemple la tuile de coordonnées $(1,1)$ a été posée par le sujet s_1 bleu lors de sa dixième $\mathcal{T}$-action sachant que le sujet s_2 rouge a réalisé, quant à lui, seulement trois $\mathcal{T}$-actions.

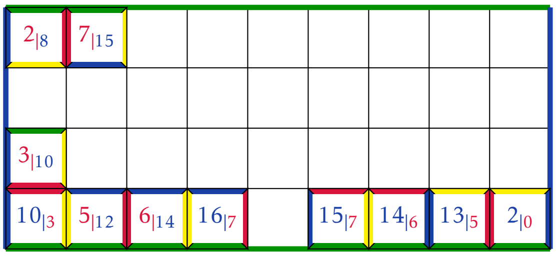


Figure IX.36 – Exemple d'un résumé en rapport avec la retranscription de l'exemple IX.17, p. 252.

5 Conclusion sur l'analyse *a priori*

Notre analyse *a priori* constituée de notre analyse épistémologique, mathématique (chap. VII et VIII) et didactique (présent chapitre) a été construite à partir de notre *modèle du problème transposé*. Son utilisation a permis de décrire, analyser et concevoir nos situations : de l'épistémologie des problèmes vers la transposition didactique de ces problèmes en situations didactiques tout en prenant en considération les aspects ergonomiques. La conception de ces ingénieries s'est donc élaborée dans un tissage de liens avec ces trois étapes.

Notre étude épistémologique et mathématique a permis d'identifier finement les connaissances d'ordre I et II mobilisées et visées à travers les problèmes étudiés. Notre intentionnalité didactique étant clairement de favoriser les connaissances d'ordre II relevant, entre autres, des raisonnements et des processus de preuve inhérents à une véritable pratique de l'activité mathématique, nous avons donc sélectionné, par rapport aux problèmes considérés, les stratégies qui permettent de les mettre en avant et par conséquent d'accéder à cette pratique en situation.

Ainsi, pour que le public puisse faire des mathématiques *in situ*, c'est-à-dire résoudre des problèmes en produisant des stratégies qui nécessitent la mobilisation de connaissances d'ordre II inhérentes à l'activité mathématique, il a fallu, en amont, faire des choix sur la nature et les valeurs des variables didactiques et de recherche permettant de les influencer.

Enfin, pour retranscrire et analyser notre corpus de données, nous avons effectué un choix préalable d'actions jugées épistémologiquement et didactiquement pertinentes par rapport aux analyses menées. Ces actions nous ont permis de préciser les micro-activités pouvant être mises en œuvre lors de la résolution de ces problèmes.

Nous présenterons dans le prochain chapitre le contexte de nos expérimentations, la modalité choisie pour le recueil des données et analyserons ensuite, à partir de notre corpus, les données retranscrites.

Analyse des expérimentations

Chapitre X

Contexte des expérimentations et types de données recueillies

Dans ce chapitre nous présentons le contexte dans lequel les expérimentations ont été réalisées ainsi que les types de données recueillies et leurs modalités de recueil. Ensuite, nous donnons des informations relatives aux transcriptions des entretiens ainsi qu'aux retranscriptions des données issues des enregistrements audiovisuels.

1 Contexte des expérimentations

1.1 En amont des expérimentations

Nous avons pu réaliser quatre expérimentations en 2020 malgré le contexte sanitaire lié à la Covid19. Deux d'entre elles se sont déroulées en juillet 2020 au centre de culture scientifique, *Les Clévos, Cité des savoirs* [1] (Étoile sur Rhône, proche de Valence). Cette structure se veut de « faire comprendre, découvrir, explorer... l'art et la science par l'expérimentation, l'échange et le plaisir ». Les deux autres se sont déroulées dans deux médiathèques de la Drôme et plus précisément à Malataverne et à Savasse en octobre 2020 durant la Fête de la Science organisée par Les Clévos, Cité des savoirs.

A cause du contexte sanitaire mais aussi du format de notre dispositif, la jauge du public était limitée à dix personnes pour chacun de nos deux modules. Il était également nécessaire de porter un masque et des gants pour les manipulations en situation.

Le service de communication de ces différentes institutions a lancé, en amont de nos expérimentations, un appel à la participation grâce à différents canaux de

1. http://www.lesclevos.com/

communication. Ces appels précisaient, la date, l'heure, le format de type ateliers participatifs, l'âge minimum requis (10 ans), un bref descriptif de l'évènement mentionnant les modalités.

Figure X.1 – *Extrait issu du programme de la Fête de La Science concernant l'appel à participation (sur inscription préalable).*

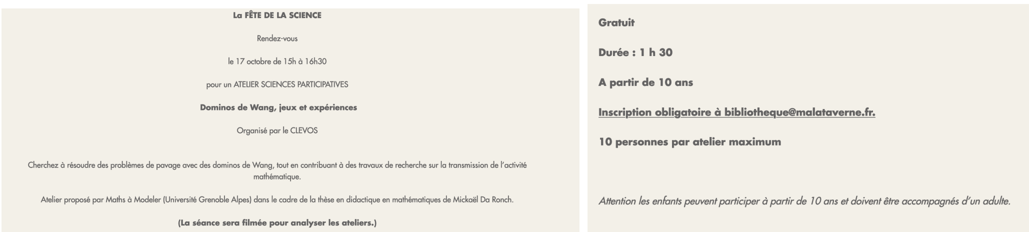


Figure X.2 – *Extraits issus du site de la médiathèque de Malataverne concernant l'appel à participation (sur inscription préalable).*

Il y a eu au total vingt-neuf inscrits pour ces expérimentations dont la répartition est donnée dans le tableau ci-après.

Expérimentation (EXP)	Lieu (date)	Nbre de participants
EXP I	Clévos (8.07.2020)	8
EXP II	Clévos, (22.07.2020)	10
EXP III	Savasse (17.10.2020)	5
EXP IV	Malataverne (17.10. 2020)	6

Tableau X.1 – *Nombre de participants par expérimentation.*

Les participants correspondent à **un public familial** (enfants > 10 ans, adolescents, parents, grands-parents) [2], ils sont **volontaires** (puisque inscrits) et donc **non préalablement choisis** pour nos expérimentations. Une des conséquences est que nous n'avons **aucun** *a priori* sur leurs connaissances mathématiques. *A posteriori*, les entretiens montrent que la plupart des participants se sont inscrits car ils (ou leurs enfants et petits-enfants) ont un goût pour les mathématiques.

1.2 Déroulement général des expérimentations

De manière générale, chacune des expérimentions a duré approximativement une heure et trente minutes. Les deux modules, correspondant aux tables hautes, relatifs d'une part, aux situations des rectangles, et d'autre part, aux situations du plan et des bandes de hauteur $h = 1$ et $h = 2$ étaient présentés dans un vaste espace permettant une bonne circulation du public. Le matériel associé (tuiles et réglettes) était mis à disposition à côté des deux modules. Durant cette période nous avons positionné deux caméras, posées sur des trépieds, permettant d'effectuer des enregistrements audiovisuels, afin de recueillir les traces d'activité des individus agissant sur les situations proposées.

Chacune des expérimentations était conduite sous un même format. Tout d'abord, deux chercheurs étaient présents pour accueillir le public (5 à 8 minutes). À cette occasion, ils ont présenté le dispositif expérimental, notamment par rapport aux caméras, ainsi que les modalités des entretiens dans le cadre de la thèse, mais n'ont pas du tout abordé le contenu mathématique du dispositif.

Le public entrait ensuite en activité en se plaçant de lui-même sur les différents modules. En outre et afin de laisser le public en autonomie et lui donner la possibilité de se saisir de la responsabilité scientifique par rapport à la résolution des problèmes, les deux chercheurs sortaient de la salle d'activité. Ceci, aussi pour recréer la condition des espaces de médiation indirecte, c'est-à-dire une mise en activité sans la présence de médiateur. Par ailleurs, il était convenu, en amont, qu'individuellement le public procéderait à un entretien oral avec un des deux chercheurs en dehors de la salle d'activité, dès qu'il pensait avoir un résultat sur la situation traitée. Ces entretiens ont été enregistrés, puis transcrits en annexe. La fin de la séance permettait de répondre aux questions du public et d'expliciter, à ce moment-là, l'objectif de ces expérimentations.

Cependant, il est nécessaire de préciser certaines modifications locales opérées lors de nos expérimentations.

La première modification est due à une erreur lors de la conception de nos modules. Nous avons omis de fixer l'orientation des tuiles par l'absence de

2. Les transcriptions des entretiens audio en annexes permettent au lecteur ou à la lectrice d'avoir l'âge des participants.

poinçons qui auraient dû être présents sur le bord NORD des tuiles et de la bande de hauteur $h = 1$. Ainsi, lors de notre première expérimentation aux Clévos, l'orientation des tuiles n'était donc pas précisée. Nous avons ainsi corrigé cet écueil lors des expérimentations suivantes.

La deuxième modification, déjà évoquée dans le précédent chapitre, concerne la suppression d'une des tuiles de la collection afin de confronter les sujets à la notion d'impossibilité relative à l'inexistence d'un pavage pour la bande de hauteur $h = 1$. Cette modification concerne uniquement les deuxième et troisième expérimentations.

Enfin, la troisième modification concerne le positionnement de départ des réglettes permettant de délimiter les rectangles à paver. Les choix différents de positionnement avaient pour vocation l'appropriation par le public de la variable de recherche concernant la taille du rectangle à paver. Lors de la première expérimentation nous avons positionné les réglettes sur différentes tailles de rectangle. Dans la deuxième expérimentation, les réglettes étaient disposées n'importe comment sur le module. Enfin, lors des deux dernières expérimentations, nous avons repositionné les réglettes sur différentes tailles de rectangles, en particulier pour la troisième expérimentation, où nous avons ajouté une information supplémentaire décrite sur une fiche, à savoir :

« Utilisez  pour faire des rectangles différents ».

2 Informations liées aux entretiens et aux données

2.1 Entretiens et codage des transcriptions en annexes

Nous avons mené des entretiens qui s'apparentent aux entretiens d'explicitation (Vermersch, 2019) de type semi-directif afin de confirmer ou non la prise de conscience de l'individu sur les stratégies mobilisées lors de son expérience. Cela permet ainsi d'atténuer le biais d'interprétation des stratégies relevées lors de l'analyse des retranscriptions audiovisuelles. Ainsi, nous appuierons l'analyse des retranscriptions audiovisuelles, selon nos besoins, avec des éléments significatifs qui pourraient être relevés dans les transcriptions des entretiens audio.

Pour ces entretiens individuels, nous avons posé plusieurs questions de natures différentes qui concernent l'identité de la personne (prénom, âge, niveau de classe ou métier), les raisons pour lesquelles ces personnes se sont inscrites et des questions relevant de l'activité des individus réalisée durant l'expérimentation.

Nous avons codé chacun des entretiens réalisés en annexe par les abréviations et symboles suivant : ENT-EXP-x-y où « x » correspond à l'expérimentation I, II, III ou IV et « y » correspond au numéro de l'entretien. Par exemple, ENT-EXP-II-5 correspond à la transcription du cinquième entretien de la deuxième expérimentation. L'intégralité des transcriptions est en annexe de ce travail et mentionne également la durée pour chacun des enregistrements audio.

Malheureusement, lors de la deuxième expérimentation l'enregistrement audio d'un des entretiens n'a pas fonctionné et nous n'en avons donc pas la trace.

2.2 Codage des fichiers vidéo et retranscription des données audiovisuelles en annexes

Pour chaque expérimentation, l'extraction des enregistrements audiovisuels a fourni plusieurs fichiers. C'est-à-dire que l'intégralité d'un enregistrement a été automatiquement scindé en plusieurs séquences audiovisuelles.

Pour chacun des fichiers, nous utilisons le codage suivant : VEXPx_My_00z où x correspond à première (I), deuxième (II), troisième (III) ou quatrième (IV) expérimentation ; y correspond au premier (1) ou deuxième module (2) respectivement relatif aux situations des rectangles ou à la situation du plan et bandes bi-infinies ; z correspond au numéro de la séquence vidéo. Par exemple `VEXP2_M1_004` correspond donc à la quatrième séquence vidéo de la deuxième expérimentation du premier module correspondant aux situations des rectangles.

Lors de la retranscription des données audiovisuelles en annexe, nous préciserons le nom du fichier sous la forme VEXPx_My_00z.mp4 à laquelle cette retranscription se réfère.

Enfin, pour notre travail de thèse et au vu de l'importance du corpus de données audiovisuelles, nous réaliserons uniquement les retranscriptions de la première expérimentation. Toutefois, cela ne nous empêchera pas de mentionner, lors de notre analyse, les éléments intéressants relevés dans les fichiers audiovisuels des autres expérimentations . Ainsi, la première expérimentation est constituée de cinq séquences vidéo (tableau X.2). Le tableau X.2 permet, par exemple, d'interpréter que l'enregistrement du module 1 (M1) a duré un peu plus d'une heure et demie et comprend cinq séquences : `VEXP1_ M1_001.mp4`, `VEXP1_ M1_002.mp4`...

Nom des fichiers et format	Durée (en min et s)
VEXP1_ M1_001.mp4	22”40’
VEXP1_ M1_002.mp4	22”40’
VEXP1_ M1_003.mp4	22”40’
VEXP1_ M1_004.mp4	22”39’
VEXP1_ M1_005.mp4	8”14’
VEXP1_ M2_001.mp4	22”40’
VEXP1_ M2_002.mp4	22”40’
VEXP1_ M2_003.mp4	22”40’
VEXP1_ M2_004.mp4	22”40’
VEXP1_ M2_005.mp4	10”07’

Tableau X.2 – *Nom des fichiers, format et durée des enregistrements audiovisuels.*

Chapitre XI

Analyse des expérimentations et résultats

On rappelle que le but de cette expérimentation est de répondre à la question, est-il possible qu'un individu (ou groupe d'individus) fasse des mathématiques, de manière complètement autonome, dans un contexte de diffusion des mathématiques où le médiateur est absent ? L'activité mathématique est caractérisée par des connaissances d'ordre II (voir chap.II). Conformément à notre méthode, nous repérons l'activité mathématique à travers les stratégies de résolution des problèmes proposés qui mettent en œuvre ces connaissances d'ordre II. Le tableau IX.1 (p. 227) pointe toutes les stratégies préalablement identifiées et mentionne les connaissances d'ordre II associées.

Par la suite, nous proposons une analyse des retranscriptions de la première expérimentation dans le cas des deux modules. A cet effet, nous repérons les stratégies mobilisées et préalablement identifiées dans notre analyse *a priori* en donnant des exemples précis permettant d'objectiver les connaissances d'ordre II mises en œuvre. Ces exemples sont issus de l'analyse de nos retranscriptions ou de l'analyse vidéo des autres expérimentations dont les données n'ont pas été retranscrites à cause de la quantité importante du corpus.

Pour rappel, huit individus ont participé à la première expérimentation. Chaque individu sera identifié de manière symbolique par s_k où $k = \{1, \dots, 8\}$. Nous proposons ci-après un tableau permettant d'identifier, pour chaque sujet s_k, son âge (ou tranche d'âge), sa couleur associée dans les retranscriptions des données audiovisuelles et la transcription de l'entretien audio qui lui correspond (tableau XI.1). Ce tableau permet aussi d'identifier les individus qui sont venus ensemble lors de cette expérimentation (un binôme et deux trinômes).

Sujet s_k	Âge	Couleur attribuée	Transcription (annexe I)
s_1	18 ans	Vert	ENT-EXP-I-2, p. 386
s_2	15 ans	Rouge	ENT-EXP-I-1, p. 381
s_3	40-50 ans	bleu	ENT-EXP-I-8, p. 426
s_4	45 ans	Bleu	ENT-EXP-I-7, p. 415
s_5	12 ans	Rouge	ENT-EXP-I-3, p. 393
s_6	12 ans	Bleu	ENT-EXP-I-4, p. 399
s_7	12 ans	Rouge	ENT-EXP-I-5, p. 403
s_8	67 ans	Vert	ENT-EXP-I-6, p. 410

Tableau XI.1 – *Aide pour l'identification des transcriptions par rapport au sujet s_k observé.*

le lecteur ou la lectrice remarquera au cours de ce chapitre que certains sujets ont agi sur plusieurs situations à des temps différents. Ainsi et afin de faciliter la visualisation de la circulation des sujets lors de la première expérimentation, nous proposons de l'illustrer en annexe (voir annexe D, p. 334).

Pour faciliter la lecture de ce chapitre, nous renvoyons le lecteur ou la lectrice au chapitre IX et en particulier à l'exemple IX.16 (p. 250) qui illustre chacune des micro-activités permettant de faciliter la lecture des retranscriptions.

1 Analyse du module 1 : le cas des rectangles

Pour rappel, les individus ont agi sur trois situations relatives aux rectangles de types A, $|B|$ et C. La collection de tuiles est donnée à la page 235.

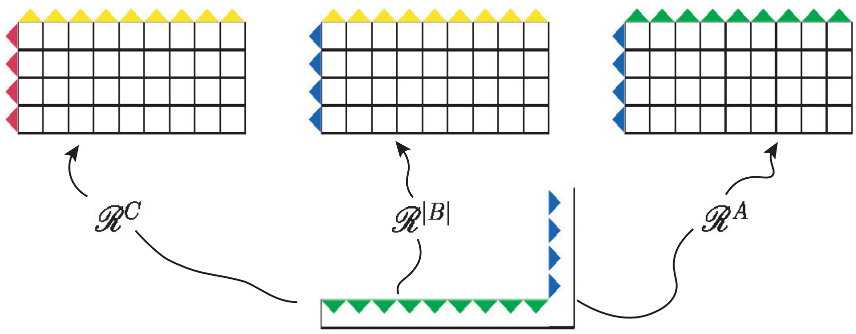


Figure XI.1 – *Rappel des trois types de rectangles construtibles avec la réglette (voir p. 230).*

De manière générale, notre analyse montre dans le cas du module 1 que les individus ne se sont pas réellement appropriés la réglette, qui devait permettre de choisir la taille des rectangles à étudier (variable de recherche). En effet, les trois débuts de retranscription de l'annexe E (p. 335) montrent que les individus ont, soit déplacé la réglette uniquement sur la plus grande taille du rectangle (4×9), qui était par ailleurs notre hypothèse initiale, soit ne l'ont pas déplacée. Ce constat est également partagé dans les autres expérimentations. Par exemple, l'intervalle de temps $[0,1[$ de la première et troisième retranscription de l'annexe E montre que s_6 et s_4 déplacent la réglette seulement une fois durant l'expérience pour former un rectangle de taille maximale 4×9. La deuxième retranscription, quant à elle, n'évoque aucune trace du déplacement de cette réglette, ce qui montre que les individus ne l'ont pas déplacée et ont travaillé seulement sur l'instance proposée (4×9).

Par conséquent, cela montre que le public n'est pas entré dans la résolution du problème par l'étude de petits cas. Ainsi, la connaissance d'ordre II associée au processus d'expérimentation qui consiste justement à étudier au départ des cas de petites tailles, pour s'approprier le problème et pouvoir ensuite donner des premiers résultats, n'a donc pas été mobilisée par le public.

Ensuite, l'analyse des retranscriptions montre dans le cas du module 1 que les individus mettent en œuvre plusieurs des stratégies identifiées dans notre analyse *a priori*. Ces stratégies mobilisent des connaissances d'ordre II. Elles sont en lien avec la notion de CS d'existence voire de CN locale, de raisonnement par implication directe, de raisonnement par CN (forçage), de disjonction des cas, de changement de représentation de l'objet (la tuile est vue comme quatre secteurs triangulaires) et de formulation de conjectures.

Par exemple, la stratégie MOTIF_PERIODIQUE a été explicitement relevée dans la deuxième retranscription de l'annexe E (p. 339). On observe très clairement que le sujet s_7 (enfant) qui essaye de paver le rectangle de type $|B|$ de taille 4×9 met en œuvre la stratégie MOTIF_PERIODIQUE couplée avec la stratégie EMPILEMENT. A cette occasion, on relève le sous-mot extrait de l'intervalle de temps $[13,21[$ et ce sous-mot est périodique puisqu'il apparaît à trois reprises dans la retranscription (voir les intervalles $[21,72[$ et $[29,68[$).

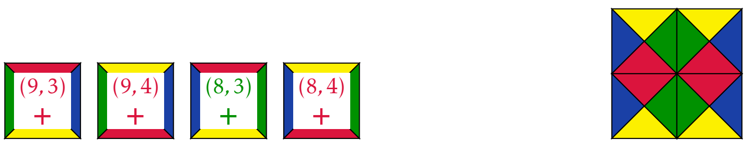


Figure XI.2 – *Sous-mot périodique extrait de la retranscription générant un motif 2×2 périodique.*

D'ailleurs, l'extrait du résumé 2.5 de la figure E.11 (p. 343) montre explicitement que l'individu s_7 recouvre les deux lignes du haut du pavage en répétant trois fois ce motif et en ajoutant, par (DE)CONSTRUCTION, un dernier motif

2×2 de type C (voir intervalle $[83, 94[$) afin d'obtenir dans un premier temps un pavage valide de taille 2×9.

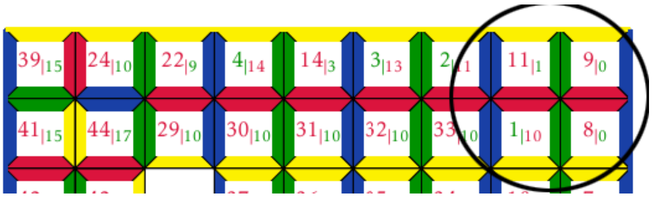


FIGURE XI.3 – *Extrait de pavage du résumé 2.5 (figure E.11, p. 343) montrant la mise en œuvre de la stratégie MOTIF_PERIODIQUE couplée avec (DE)CONSTRUCTION.*

La stratégie MOTIF_PERIODIQUE s'étend également sur les deux lignes du bas du pavage, puisque l'on constate une nouvelle fois la répétition d'un sous-mot générant, à trois reprises, un même motif 2×2. On voit d'ailleurs sur les figures XI.3 et XI.4 que l'individu pose parfois successivement des tuiles en mobilisant ainsi une connaissance d'ordre II relevant du raisonnement par implication directe.

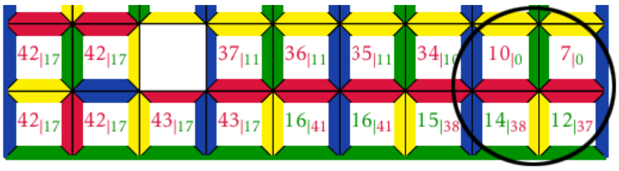


FIGURE XI.4 – *Extrait de pavage du résumé 2.5 (figure E.11, p. 343) montrant encore la mise en œuvre de la stratégie MOTIF_PERIODIQUE à l'aide d'un autre motif 2×2.*

On constate aussi par ailleurs que le sujet s_8 (grand-parent), qui était plutôt dans une posture d'accompagnant de s_6 et s_7, semble prendre conscience de cette répétition puisqu'il l'évoque lors de l'entretien ENT-EXP-I-6.

```
44 [Colette]   - Non, non, oh non non, il fallait
     vraiment euh... connaître la stratégie de... pour
     moi c'était des suites.
45 [Chercheur] - Des suites de couleurs...
46 [Colette]   - Hmm!
47 [Chercheur] - D'accord ?
48 [Colette]   - Des suites, enfin des reproductions !
49 [Chercheur] - Des reproductions...
50 [Colette]   - Des reproductions de... enfin...
51 [Chercheur] - Des reproductions...
52 [Colette]   - De carrés ou de... on a, on a réussi, un
      petit-fils a réussi à le faire, l'autre n'a pas
     réussi parce qu'il y avait un un petit souci après
     de... à la fin quoi! Les deux, deux cases qu'on
     pouvait pas... qu'on pouvait pas remplir.
```

FIGURE XI.5 – *Extrait de l'entretien ENT-EXP-I-6 avec s_8 évoquant la stratégie de périodicité.*

Par ailleurs, on remarque dans les autres expérimentations des productions de pavages périodiques. Néanmoins, on ne peut pas affirmer (sans retranscription) que le processus de construction résulte de la stratégie MOTIF_PERIODIQUE [1].

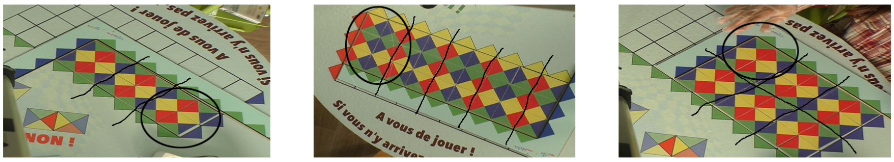


FIGURE XI.6 – Extraits du fichier VEXPIV_M1_003.mp4 où apparaissent des productions périodiques.

Cependant, l'un des entretiens laisse tout de même entendre que l'individu semble avoir mis œuvre la stratégie de périodicité pour montrer l'existence d'un pavage dans le cas d'un rectangle d'aire douze et de type A.

```
28 [Colette]   - Ah oui il y avait des contraintes de
     couleurs et il y en a un pour lequel on est arrivées
      à le remplir.
29 [Chercheur] - Ouais.
30 [Colette]   - En faisant une suite logique.
31 [Chercheur] - Alors quand vous appelez suite logique c
     'est-à-dire ?
32 [Colette]   - Il y avait un motif de quatre carreaux.
33 [Chercheur] - D'accord.
34 [Colette]   - Qu'on pouvait répéter trois fois.
35 [Chercheur] - Trois fois.
36 [Colette]   - Donc ça remplissait l'espace de douze.
37 [Chercheur] - D'accord.
```

FIGURE XI.7 – Extrait de l'entretien ENT-EXP-IV-6 pointant la prise de conscience de l'individu sur la mise en œuvre de la stratégie MOTIF_PERIODIQUE pour paver le rectangle de type A de taille douze (2×6).

A cette occasion, l'entretien ENT-EXP-IV-1 évoque la formulation d'une condition suffisante d'existence de pavage lorsque l'aire de la surface rectangulaire à paver est un multiple de quatre, ce qui montre donc la mobilisation d'une connaissance d'ordre II relative à la formulation de CS d'existence. De plus, on se doute, au vu de l'activité réalisée, que son discours fait référence, selon nous, au rectangle de type A. Cette CS est correcte même si elle n'est pas très affinée puisqu'en réalité il suffit que l'aire soit paire pour avoir un tel pavage. Cependant, la suite de l'entretien ne permet pas réellement de faire émerger le processus de preuve qui aboutit à la production de ce résultat général.

1. Nous avons ajouté des lignes sur l'extrait vidéo afin d'identifier clairement ces motifs.

```
25 [Lena]      - Oui et peut-être parce que euh...après
     avec maman et Ambre on s'est dit que c'était peut-
     être possible que ça fonctionne qu'on puisse remplir
      les rectangles de cubes, de carrés que si c'était
     des multiples de quatre.
26 [Chercheur] - Ah tu es allée directement à un résultat
     , tu es allée un peu vite pour moi. Donc, au début
     tu m'as dit que tu avais des carrés découpés en
     triangles mais tu ne m'as pas dit ce que tu faisais
     avec ces carrés, tu peux...
```

Figure XI.8 – *Extrait de l'entretien ENT-EXP-IV-1 évoquant la formulation d'une CS d'existence.*

Enfin, au niveau des retranscriptions, on relève aussi à plusieurs reprises l'existence de motifs ayant la propriété d'être (horizontalement) périodiques sans pour autant constater leurs répétions dans la construction des pavages. Ce qui montre que les individus ont cherché à paver, sans prendre conscience que certains motifs pouvaient être répétés. Par exemple, l'analyse de la première retranscription de l'annexe E (p. 335) montre au niveau des intervalles $[4,5[$ et $[21,31[$, un sous-mot relatif à l'existence d'un motif 2×2 qu'on pourrait répéter horizontalement dans la suite du pavage.

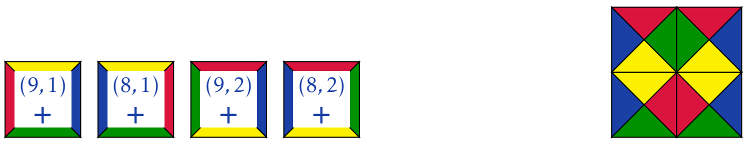


Figure XI.9 – *Exemple d'un sous-mot générant un motif 2×2 horizontalement périodique.*

Les intervalles $[23,25[$ et $[31,37[$ permettent aussi de détecter la présence d'un autre sous-mot relatif à l'existence d'un motif périodique 2×2 qui pourrait également servir de base dans la construction du pavage de $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$ utilisant la stratégie MOTIF_PERIODIQUE.

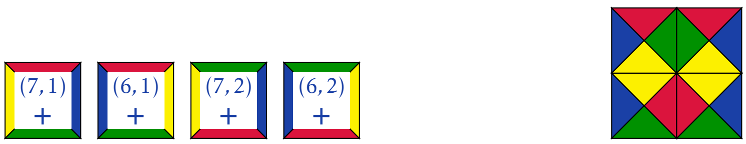


Figure XI.10 – *Autre exemple de sous-mot générant un motif 2×2 périodique.*

Toutefois, la retranscription montre que ces sous-mots ne sont pas périodiques puisque les $\mathcal{T}$-actions d'ajout de s_6 relatives à ces derniers ne sont pas réitérées dans la suite du pavage. Le résumé 1.5, qui illustre par la même occasion l'existence d'un pavage pour le rectangle 4×9 de type A construit principalement par s_6, le montre.

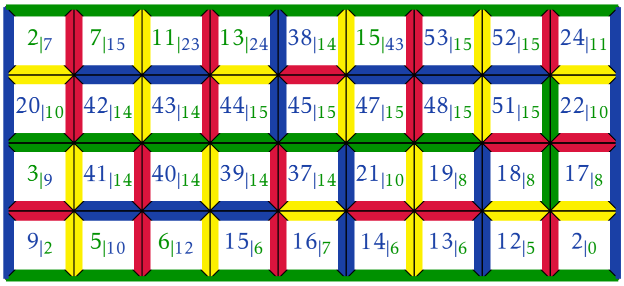


Figure XI.11 – *Résumé 1.5 issu de la figure E.6, p. 339.*

Ce constat est également relevé au niveau de la troisième retranscription de l'annexe E (p. 343) concernant la situation des rectangles de type *C*. L'extrait de dialogue transcrit ci-dessous de l'intervalle $[68,71[$ laisse entendre que s_4 a l'intention de poursuivre son pavage en reproduisant les deux dernières colonnes du résumé 3.4 de la figure E.16 : « tu vois faut reproduire ça et ça ».

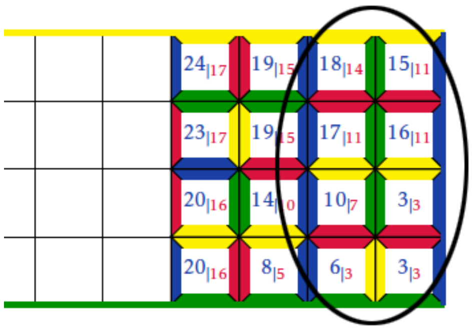


Figure XI.12 – *Extrait du résumé 3.4 de la figure E.16 (p. 347).*

Néanmoins, cette volonté de reproduire des motifs n'a visiblement pas été mise en œuvre. En effet, l'analyse permet d'extraire des sous-mots relatifs à des motifs de différentes tailles ayant la propriété d'être horizontalement périodiques, mais ces sous-mots ne sont pour autant pas répétés de manière significative dans la construction du pavage.

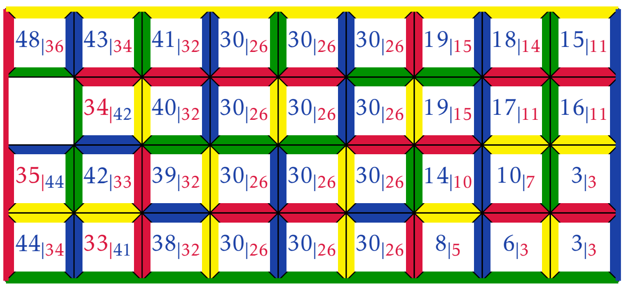


Figure XI.13 – *Extrait du résumé 3.7 de la figure E.19, p. 348 n'évoquant pas explicitement la stratégie MOTIF_PERIODIQUE.*

Par ailleurs, nous avons aussi repéré à plusieurs reprises la mise en œuvre de la stratégie BRUTE-FORCE de type BACKTRACKING couplée parfois à celle de FORÇAGE. L'analyse de la première retranscription de l'annexe E relève des $\mathcal{T}$-actions d'ajout conditionnées, par rapport à l'environnement extérieur existant, qui impose alors, nécessairement, l'ajout de certaines tuiles (voir intervalle [68, 73[).

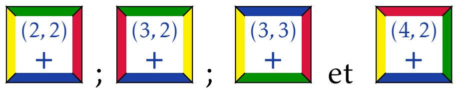


***Figure XI.14** – $\mathcal{T}$-actions d'ajout conditionnées par rapport à l'environnement de la $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$ à cet instant t.*

En effet, on observe lors de la vingt-sixième $\mathcal{T}$-action de l'individu s_6, que ce dernier est obligé d'ajouter à la cellule (2, 2) la tuile ayant du jaune à l'OUEST, du rouge à EST, du vert au NORD et du bleu au SUD car l'environnement extérieur impose nécessairement ces couleurs. Ensuite, lors de sa vingt-septième $\mathcal{T}$-action, s_6 est aussi obligé d'ajouter la tuile ayant la couleur rouge à l'OUEST, jaune à l'EST, bleue au SUD et verte au NORD au niveau de la cellule (3, 2) car là encore l'environnement extérieur impose du rouge à l'OUEST, du bleu au SUD et on observe que la tuile en coordonnées (3, 2) ne pourra pas avoir de couleur jaune au NORD car sinon il y aurait deux fois la couleur jaune au niveau de la cellule (3, 3). Ainsi, la tuile de coordonnées (3, 2) doit nécessairement avoir la couleur jaune à l'EST et par conséquent du vert au NORD puisque les trois autres couleurs sont déjà imposées. Enfin, l'environnement extérieur impose nécessairement l'ajout de tuiles spécifiques relatif à la vingt-huitième et vingt-neuvième $\mathcal{T}$-action.

Dans ce cas, on constate donc que s_6 a mobilisé des connaissances d'ordre II liées en particulier au raisonnement par conditions nécessaires (forçage) qui impose successivement l'ajout de tuiles spécifiques.

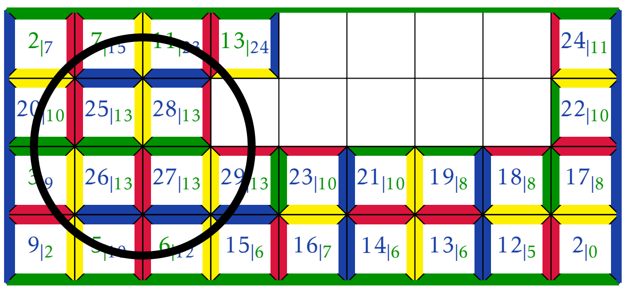


***Figure XI.15** – Résumé 1.3 issu de la figure E.4, 337.*

Par la suite, on remarque que s_6 pointe les deux tuiles ayant pour coordonnées (3, 3) et (4, 2) afin de montrer à s_8 la cellule vide (4, 3) qui devrait, *a priori*, contenir une tuile avec deux fois la couleur rouge (figure XI.15). L'individu semble alors prendre conscience que cette cellule contiendra nécessairement deux fois cette même couleur, ce qui bien entendu est impossible avec la collection de tuiles donnée puisqu'il n'y a pas deux fois la même couleur sur une tuile.

Ces faits conduisent s_6 à enlever chacune des tuiles précédemment ajoutées jusqu'à pouvoir en ajouter une nouvelle, par disjonction de cas, et prouver ensuite l'existence d'un pavage du rectangle de type A et de taille 4×9. En fait, une des connaissances d'ordre II mobilisées relève implicitement du raisonnement par l'absurde, puisque l'individu pave, il suppose donc au départ que ce pavage existe, jusqu'à aboutir à une impossibilité qui l'oblige à déconstruire partiellement son pavage afin de pouvoir potentiellement débloquer la situation...

Ainsi, cela relève de la stratégie BRUTE-FORCE et en particulier du BACKTRACKING couplée à celle de FORÇAGE (voir l'intervalle $[58, 66[$) qui mobilisent des connaissances d'ordre II relevant du raisonnement par l'absurde, du raisonnement par conditions nécessaires et par disjonction des cas.

Au niveau de la deuxième retranscription, on note également la mise en œuvre, par le sujet s_8, de la stratégie FORCAGE. On constate par exemple que la tuile posée lors de la douzième $\mathcal{T}$-action de s_8 ne peut être que celle-ci, puisque les couleurs NORD (rouge), SUD (vert) et EST (bleu) sont déjà imposées et impliquent nécessairement d'avoir une couleur rouge à l'OUEST. De fait, cela implique nécessairement l'ajout des autres tuiles spécifiques liées à sa quatorzième, quinzième et seizième $\mathcal{T}$-action. On retrouve là aussi la mise en œuvre d'un raisonnement par conditions nécessaires (forçage) comme connaissance d'ordre II mobilisée.

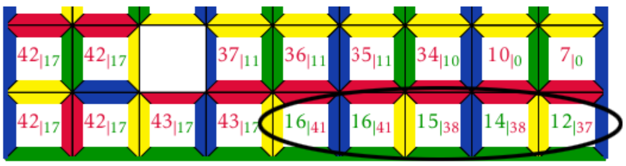


FIGURE XI.16 – *Stratégie FORÇAGE repérée dans la deuxième retranscription.*

La troisième retranscription de l'annexe E (p. 343) montre également la mise en œuvre de ces stratégies. Par exemple, on remarque que s_5 essaye de paver la première colonne 4×1 mais qu'il arrive à une contradiction. Effectivement, il montre dans ces conditions que la dernière tuile du motif aura nécessairement deux fois la couleur jaune au nord et au sud, ce qui est impossible. A cette occasion, l'intervalle $[13, 14[$ permet en effet d'extraire la séquence montrant que s_5 semble vérifier, par ses actions monstratives, la validité des tuiles posées sur la première colonne de la $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$ jusqu'à ce qu'il pointe l'absurdité dont il est question (deux fois la même couleur).

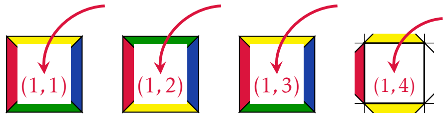


Figure XI.17 – *Repérage de l'absurdité.*

Ainsi, on peut supposer que s_5 tente de paver implicitement un motif 4×1 de type C ayant la couleur bleue à l'EST et sa construction conduit à une absurdité (deux fois la même couleur). Cette impossibilité à paver un tel motif peut être affirmée grâce à la stratégie FORÇAGE qu'il semble avoir mise en avant dans le cas où l'on suppose que s_5 pave en imposant la couleur bleue à l'EST du rectangle 4×1 (figure XI.18, à gauche).

Dès lors que ce dernier prend conscience qu'il n'y a aucune raison d'avoir la couleur bleue à l'est du motif 4×1, on observe qu'il utilise la stratégie BRUTE-FORCE et en particulier la stratégie BACKTRACKING, puisqu'au niveau de l'intervalle $[16, 19[$, on remarque qu'il déconstruit son motif, puis en construit un nouveau au niveau de l'intervalle $[20, 35[$ sans la contrainte de bord monochrome à l'est (figure XI.18, à droite). Là encore des connaissances d'ordre II, relevant des raisonnements comme l'implication directe et la disjonction de cas, sont mobilisées.

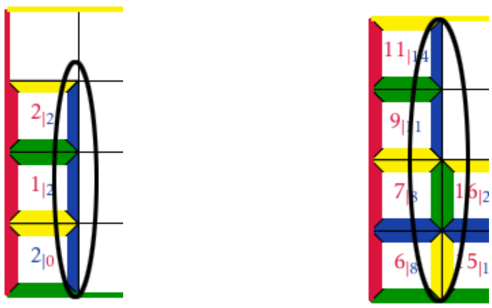


Figure XI.18 – *Extrait des résumés 3.1 et 3.3 des figures E.13 et E.15 (p. 344 et 346).*

En outre, on observe à partir du marqueur « 71 » que s_4 réalise presque l'intégralité des $\mathcal{T}$-actions d'ajout effectives sur la $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$. Le sujet s_4 développe la stratégie BRUTE-FORCE de type BACKTRACKING comme le montre l'intervalle $[102, 106[$ sans toutefois savoir explicitement dans quel ordre ces $\mathcal{T}$-actions d'ajout ont été réalisées, puisque certaines de ces $\mathcal{T}$-actions sont situées entre deux marqueurs, ce qui fait que nous n'avons pas pu les extraire de la vidéo les unes à la suite des autres [2].

2. Nous rappelons que le symbole ⋆ correspond aux $\mathcal{T}$-actions effectives représentées sur la $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$.

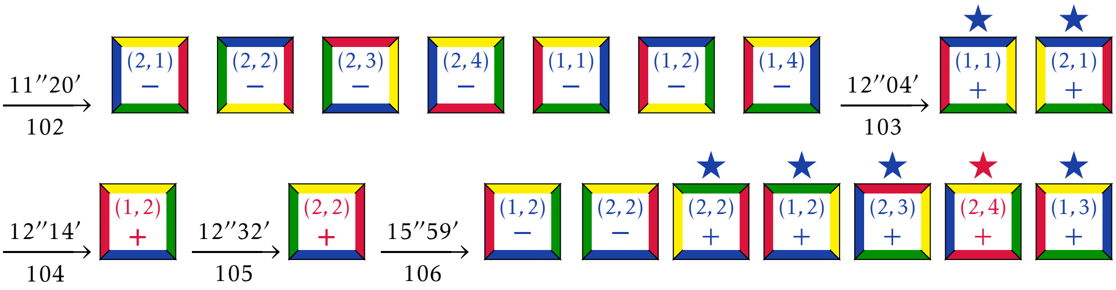


Figure XI.19 – *Extrait de l'intervalle* [102,106] *de la troisième retranscription de l'annexe* E.

Par ailleurs, cette retranscription montre, du moins au départ, que les individus utilisent aussi la stratégie EMPILEMENT dans la progression de leur pavage (voir p. ex., figure XI.18, p. 272). D'ailleurs, l'entretien ENT-EXP-I-7 réalisé avec s_4 (parent) évoque explicitement la prise de conscience de cette stratégie, ainsi que la suppression de tuiles lorsqu'il se retrouvait bloqué dans sa progression.

```
82 [Chercheur] - Euh... du coup donc il restait une tuile
     ...
83 [Isabelle]  - Oui.
84 [Chercheur] - Et qu'est-ce-que vous avez fait...
85 [Isabelle]  - Alors on a...
86 [Chercheur] - Quand il restait une tuile ?
87 [Isabelle]  - On... a enlevé les lignes quand... parce
      que on travaillait par colonne...
88 [Chercheur] - D'accord.
89 [Isabelle]  - Donc on a enlevé les colonnes...
90 [Chercheur] - Donc votre stratégie c'était...
91 [Isabelle]  - Et on recommençait.
92 [Chercheur] - D'accord.
93 [Isabelle]  - Et on recommençait une colonne en
     laissant ce qu'on venait de faire pour ne pas
     reproduire la même chose.
94 [Chercheur] - D'accord, et du coup quoi que vous
     fassiez...
95 [Isabelle]  - Et on est encore retombé sur un trou,
     ouais.
```

Figure XI.20 – *Extrait de l'entretien ENT-EXP-I-7 évoquant la prise de conscience de* s_4 *sur les stratégies mises en œuvre dans les tentatives de pavage du rectangle.*

Enfin, l'individu formule la conjecture selon laquelle le rectangle de type C, sur lequel il a travaillé (de taille 4×9), n'est pas pavable car toutes ses tentatives ont été infructueuses. Ceci relève donc d'une connaissance d'ordre II liée à la formulation de conjecture quant à la non-existence d'un pavage pour une taille fixée. Nous avons tout de même conscience que la formulation de cette conjecture a certainement été induite par le discours du chercheur (*effet topaze*).

```
99  [Isabelle]  - Euh... ben si sur cent pour cent des
       essais euh, cent pour cent d'échecs euh, on pourrait
        penser que euh...
100 [Chercheur] - Alors est-ce-que du coup vous l'avez
       prouvé ? c'est-à-dire est-ce-que vous avez un
       argument infaillible qui permettrait de dire que ça
       ne marche jamais ?
101 [Isabelle]  - Euh non.
102 [Chercheur] - Ça se serait plutôt...
105 [Isabelle]  - Une constatation. Enfin...
106 [Chercheur] - Une constatation, d'accord.
107 [Isabelle]  - Mais pas une vérification.
108 [Chercheur] - D'accord, donc qui serait plutôt une
       constatation ou vous pensez que sur le plus grand
       rectangle...
109 [Isabelle]  - Ouais...
110 [Chercheur] - On ne peut pas avec quatre couleurs
       différentes...
111 [Isabelle]  - Ouais.
112 [Chercheur] - On ne peut pas arriver à trouver le...
113 [Isabelle]  - Hmm.
114 [Chercheur] - Une possibilité, donc c'est pas prouvé,
       mais c'est une hypothèse que vous faîtes.
115 [Isabelle]  - C'est ça !
```

***Figure XI.21** – Extrait de l'entretien ENT-EXP-I-7 montrant s_4 formuler une conjecture sur l'impossibilité de paver le rectangle.*

Par contre, nous notons un tout autre avis chez s_5 , puisqu'il n'est pas convaincu de l'impossibilité de paver ce rectangle. Pour lui, il existe une solution mais il faut y accorder davantage de temps... Cela tient sans doute au fait qu'à partir du marqueur « 71 » ce dernier était plutôt dans une posture de spectateur qui ne lui a pas permis de s'en convaincre...

```
117 [Arnaud]    - Non il manquait une case. Ça ne marchait
        pas.
118 [Chercheur] - D'accord. Et à ton avis, est-ce-que tu
       penses que ça... tu n'as pas trouvé ou bien ça va
       jamais marcher ?
119 [Arnaud]    - Non c'est que j'ai pas trouvé ça... euh
       c'est possible mais...
120 [Chercheur] - Mais comment tu peux savoir que c'est
       possible ?
121 [Arnaud]    - Ben... c'est... je pense que c'est
       possible oui.
122 [Chercheur] - Tu penses que c'est possible.
123 [Arnaud]    - Faudrait mettre plus de temps... et bien
        réfléchir et puis le rythme je sais pas.
```

***Figure XI.22** – Extrait de l'entretien ENT-EXP-I-3 montrant s_5 qui formule la conjecture d'existence d'un pavage pour ce rectangle.*

L'analyse des retranscriptions révèle aussi que nous n'avons pas été en mesure de repérer explicitement la stratégie PARTITION dans les preuves d'existence de pavage. Il en est de même concernant la stratégie DENOMBREMENT permettant de prouver une impossibilité à paver dès lors que les stratégies FORÇAGE et BRUTE-FORCE s'avèrent être trop coûteuses en temps d'exécution. En effet, PARTITION et DENOMBREMENT sont des stratégies plus difficilement repérables car elles utilisent une part importante d'abstraction et d'implicite qu'il est complexe de relever dans nos conditions d'expérimentation.

Toutefois, lors de la quatrième expérimentation on retrouve les traces d'un argument expliquant pourquoi avec un rectangle de type A et de quinze cases cela ne fonctionne pas. Cet argument est toutefois est incorrect.

```
47 [Lena]       - Oui et douze.
48 [Chercheur] - Et douze, d'accord et t'as essayé d'
     autres tailles, je sais plus la troisième taille que
      tu as mentionnée.
49 [Lena]       - C'était quinze.
50 [Chercheur] - Quinze, t'y es arrivée ?
51 [Lena]       - Non.
52 [Chercheur] - D'accord et tu as une idée pourquoi tu n
     'y es pas arrivée ?
53 [Lena]       - Après on pense que c'est parce que comme

      il y a quatre triangles sur les carrés...
54 [Chercheur] - Oui.
55 [Lena]       - Et que quinze c'est pas un multiple de
     quatre on peut pas mettre euh... on peut pas faire
     rentrer tous les carrés dedans sans qu'il y ait deux
      couleurs qui se touchent.
56 [Chercheur] - Hmm d'accord intéressant ce que tu dis,
     euh ok. Et donc tu penses que c'est pas possible à
     cause de cette histoire de parité...
57 [Lena]       - Oui.
```

***Figure XI.23** – Autre extrait de l'entretien ENT-EXP-IV-1 mentionnant un argument d'impossibilité*

En effet, on observe ici l'idée de la stratégie DENOMBREMENT où l'on « casse » en quelque sorte la structure de la tuile en la voyant non plus comme un carré, mais comme quatre secteurs triangulaires colorés (changement de représentation de l'objet). En revanche, l'argument sur le fait que quinze n'est pas un multiple de quatre ne suffit pas à convaincre de cette impossibilité. Il aurait fallu remarquer par exemple, pour le rectangle de type A et de taille 3×5 bien pavé, que la couleur bleue apparaît nécessairement six fois sur les bords extérieurs est-ouest du rectangle. Ainsi, si le rectangle 3×5 est bien pavé, il est nécessaire que la couleur bleue apparaisse encore neuf fois à l'intérieur du pavé (bords extérieurs exclus). Ceci est impossible car chaque triangle de couleur bleue doit être adjacent à un autre triangle de couleur bleue et doit donc apparaitre nécessairement un nombre pair de fois à l'intérieur de ce pavage...

Le lecteur ou la lectrice remarquera d'après le schéma de circulation de l'annexe D (p. 334) que d'autres individus, en particulier s_1 et s_3 ont agi sur le premier module. Néanmoins, la plupart des micro-activités réalisées relevaient de $\mathcal{O}$-actions, comme la sélection ou le dépôt de tuiles dans $\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$ permettant de les classer. Les individus ont passé un long moment à réfléchir sur ces situations avec très peu de $\mathcal{T}$-actions effectives sur la $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$. Malheureusement les données audiovisuelles ne nous permettent pas d'avoir accès à ces réflexions personnelles, il ne nous est donc pas possible de les objectiver. Par ces faits, nous avons donc fait le choix de ne pas réaliser leur retranscription.

Dans la prochaine section nous réalisons une analyse concernant les situations liées aux bandes bi-infinies $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$ ainsi que celle du plan.

2 Analyse du module 2 : le cas des bandes et du plan

Nous rappelons qu'au niveau de la première expérimentation, nous avions omis, lors de la conception de notre matériel, d'ajouter des poinçons sur les bords NORD des tuiles et de la bande afin de fixer l'orientation des tuiles. Nous sommes donc dans le cas où les bords NORD et SUD de la bande sont identiques.

Pour la troisième et quatrième expérience, nous rappelons également que nous avons ôté la tuile τ_6 afin de confronter les sujets à la notion d'impossibilité (i.e. inexistence de pavage de la bande $\mathfrak{B}_1$ avec cette nouvelle collection). Ce choix a été discuté lors de l'analyse des situations, p. 238.

Le lecteur ou la lectrice trouvera les collections de tuiles proposées pour chaque situation dans le chapitre IX.

Dans le cas du module 2, notre analyse révèle de manière significative la mobilisation de stratégies liées à la stratégie MOTIF_PERIODIQUE couplée la plupart du temps aux stratégies EMPILEMENT et FORÇAGE. Ces stratégies mobilisent des connaissances d'ordre II en lien avec la notion de CS d'existence (voire de CN), de raisonnement par implication directe, de raisonnement par CN (forçage), de disjonction des cas, de prémisses de modélisation par changement de représentation de l'objet (notion de cycle, degré entrant, degré sortant) et de la formulation de conjectures.

Par exemple, on relève explicitement lors de la première retranscription de l'annexe F (p. 351) que c'est le joueur s_2 qui poursuit la construction de ce pavage. La suite de cette construction est structurée puisqu'elle montre clairement l'existence d'un sous-mot périodique (figure XI.24) décrivant un motif 2×1 se répétant à plusieurs reprises dans la séquence de l'intervalle $[8, 16]$.

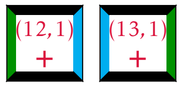


Figure XI.24 – *Existence d'un sous-mot périodique permettant de paver* $\mathfrak{B}_1$.

L'extrait du résumé 1.3 issu de la figureF.4 (p. 352) le montre explicitement. A cette occasion, on voit que s_2 mobilise une connaissance d'ordre II liée au raisonnement par implication directe.

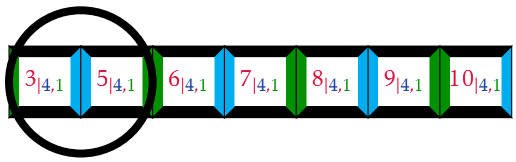


Figure XI.25 – *Extrait du résumé 3.1 de la figure F.8, p.354 montrant la répétition d'un motif* 1×2.

L'extrait ci-dessous issu de l'entretien ENT-EXP-I-1 réalisé avec s_2, mentionne, même s'il concerne la situation du plan [3], qu'il prend conscience de sa stratégie MOTIF_PERIODIQUE et qu'il est nécessaire d'avoir un « cycle » de tuiles (*i.e.* motif horizontalement périodique) pour paver une bande (CN qui est aussi une CS). Ici, on a clairement la formulation d'une CN, qui relève d'une connaissance d'ordre II.

```
40 [Victor]     - Ce que j'ai obtenu, c'est qu'il fallait
      impérativement pouvoir faire un cycle avec ces
      tuiles, c'est-à-dire que... imaginons si la... euh
      le coté de la tuile avec un pinçon c'est un... un
      degré sortant, il faudrait impérativement qu'une au
      ... qu'un autre type de tuile ait un... ait une
      couleur, ait la même couleur que le degré sortant...
41 [Chercheur] - Hmm d'accord .
42 [Victor]     - Mais en degré rentrant.
43 [Chercheur] - Oui.
44 [Victor]     - Parce que déjà sinon on peut... on
      pourrait jamais l'utiliser dans un cycle , et en
      même temps du coup il faut réaliser à faire une
      séquence de tuiles euh... comme ça qui permet d'
      avoir un degré sortant d'une couleur et un... et le,
       et le degré rentrant d'une même couleur à la fin de
      ... à la fin et au début de la séquence.
45 [Chercheur] - Alors quand tu parles de séquence, une
      séquence c'est un bande...
46 [Victor]     - Une bande de tuiles.
47 [Chercheur] - D'accord, et donc là du coup tu
      arriverais si tu as le... la même couleur... au
      début et la même couleur à la fin...
48 [Victor]     - Ça permet déjà de répliquer cette
      séquence autant de fois qu'on veut...
```

Figure XI.26 – *Extrait de l'entretien ENT-EXP-I-1 de l'annexe I, p. 381.*

3. Le joueur s_2 s'est ensuite intéressé à la situation du plan et son entretien a été conduit par rapport à cette dernière. Toutefois cet entretien est révélateur de la prise de conscience de la stratégie développée.

De plus, cet entretien relève aussi un aspect sur la modélisation puisque s_2 évoque le terme de « cycle » tout en mentionnant les termes de « degré entrant » et de « degré sortant ». On remarque donc qu'un travail de modélisation sur le changement de représentation des tuiles a été réalisé par s_2. Les tuiles sont vues ici comme un graphe orienté. Cette prémisse de modélisation par changement de registre de représentation de l'objet en jeu est aussi une connaissance d'ordre II.

Par ailleurs, dans les autres expérimentations des exemples périodiques ont également été produits.

Figure XI.27 – *Exemple de répétition de motifs rectangulaires lors de la deuxième expérimentation.*

L'entretien ENT-EXP-II-5 de l'annexe J, en lien avec l'extrait vidéo ci-avant, nous fait remarquer que l'individu a compris le problème et que pour le résoudre il suffisait de « répliquer » des motifs. Cet entretien laisse donc entendre que la stratégie MOTIF_PERIODIQUE a été mise en évidence ici. Par ailleurs, l'individu mentionne bien que la suite du pavage se décline par rapport à la couleur de droite de la tuile posée, qui implique la pause d'une tuile ayant un bord commun de la même couleur, ce que l'individu appelle « en miroir ». Ainsi, on remarque en quelque sorte un début d'explicitation de la stratégie FORÇAGE, qui mobilise ici une connaissance d'ordre II liée au raisonnement par conditions nécessaires.

Enfin, on observe que l'individu formule clairement le résultat d'existence (CS) d'un pavage de la bande bi-infinie de hauteur $h = 1$ en évoquant le fait qu'il est théoriquement possible de poursuivre le pavage indépendamment des contraintes liées au matériel. Ce dernier conscientise alors d'une part, l'existence de pavage de la bande, d'autre part, que ce pavage n'est ni borné à gauche ni borné à droite (voir ENT-EXP-II-5 de l'annexe J). Ceci relève donc d'une connaissance d'ordre II relative à la formulation de CS d'existence.

45 [Chercheur] - Bon et alors sur cette ligne là avec le noir en haut vous avez... vous avez fait quoi en fait ? Qu'est-ce que vous av...
46 [Anne] - On a cherché à retrouver... enfin on avait compris que sur les trois activités de cet ilot là euh on avait une consigne de positionnement et qu'en fait il fallait la répliquer...
47 [Chercheur] - Hmm hmm.
48 [Anne] - A partir de ces... pavés qui nous étaient proposés...
49 [Chercheur] - Oui.
50 [Anne] - Voilà donc on a re... on a repéré que certains carrés avaient un triangle noir donc faut le mettre en place, et puis à partir de là on a décliner euh sur la couleur de droite on a mis euh quelque chose qui venait euh de manière euh... euh comment dire euh... euh... en miroir.
51 [Chercheur] - Hmm hmm.
52 [Anne] - Voilà et puis... euh une fois qu'on a compris que ça ça marchait on a donc décliné jusqu'au bout et ça fonctionnait donc voilà.
53 [Chercheur] - Et alors qu'est-ce que c'est qui fonctionne ? Est-ce que vous pourriez résumer finalement...
54 [Anne] - Ben c'était une suite.
55 [Chercheur] - Quel est le résultat que vous avez obtenu ?
56 [Anne] - C'était une suite.
57 [Chercheur] - Une suite...
58 [Anne] - Une suite de couleurs... sans qu'il y ait... une suite de couleurs.
59 [Chercheur] - Une suite de couleurs qui se...
60 [Anne] - Et de formes et qui sont et qui se...
61 [Chercheur] - Qui s'agençait bien ?
62 [Anne] - Oui.
63 [Chercheur] - Eeeeet ça s'arrête quelque part ou pas ?
64 [Anne] - Non qui pourrait continuer infiniment.
65 [Chercheur] - D'accord.
66 [Anne] - Donc y avait... y avait pas de raison là que ça s'arrête.
67 [Chercheur] - D'accord...ok.
68 [Anne] - Sauf le nombre de pièces où les emplacements.
69 [Chercheur] - Oui...
70 [Anne] - Voilà.
71 [Chercheur] - Oui d'accord et donc vous avez obtenu un résultat ?
72 [Anne] - Oui.
73 [Chercheur] - Un résultat que vous arriviez à paver cette ligne infinie ?
74 [Anne] - Oui.

Figure XI.28 – *Extrait de l'entretien ENT-EXP-II-5 de l'annexe J, p. 435.*

La stratégie MOTIF_PERIODIQUE couplée parfois à EMPILEMENT et FORÇAGE se retrouve également à de nombreuses reprises au niveau des retranscriptions dans le cas de la bande $\mathcal{B}_2$ et du plan. Elles mobilisent les mêmes connaissances d'ordre II que nous avons évoquées précédemment.

L'analyse de la première retranscription dans le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$ (voir annexe G, p. 357) montre au départ que le sujet s_1 exhibe ensuite un motif horizontalement périodique. En effet, la séquence entre les marqueurs occuro-temporels de l'intervalle $[8,12[$ permet de repérer les sous-mots suivants.

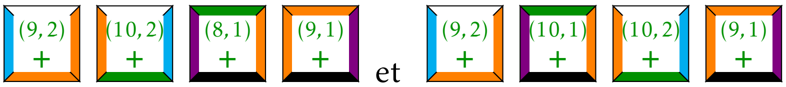


FIGURE XI.29 – Sous-mots extraits de l'intervalle $[8,12[$ *de la première retranscription de l'annexe G.*

Ces sous-mot permettent de constituer les deux motifs ci-après.

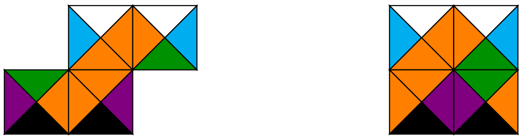


FIGURE XI.30 – Exemples de motifs horizontalement périodiques exhibés.

De plus, on remarque dans l'intervalle $[11,16]$ que s_1 poursuit son pavage sur chacune des lignes en répétant le motif 2×1 de la première et de la deuxième ligne décalé d'un carreau vers la gauche, jusqu'à obtenir la copie du motif initialement construit. Ainsi, même si les deux sous-mots précédents sont une nouvelle fois identifiables, nous retenons plutôt la répétition du premier sous-mots de la figure XI.29 (p. 280) puisque c'est exactement celui-ci que s_1 répète pour poursuivre son pavage.

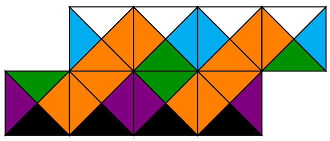


FIGURE XI.31 – Répétion du premier sous-mot permettant de générer deux motifs identiques.

A cette occasion, l'intervalle $[17,18[$ montre que s_1 translate une partie du motif précédent en le séparant en deux motifs identiques (résumé 1.4 de la figure G.5, p. 359).

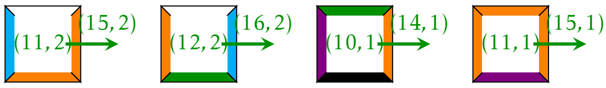


FIGURE XI.32 – Sous-mot d'ajout de tuiles par translation extrait de l'intervalle $[17,18[$.

Ainsi, le sous-mot correspondant à l'ajout des tuiles par déplacement de ce motif montre une répétition de motif et il semble donc que s_1 ait compris qu'il suffisait de le translater pour paver la bande $\mathfrak{B}_2$ (même si l'intégralité de la bande n'a pas été pavée).

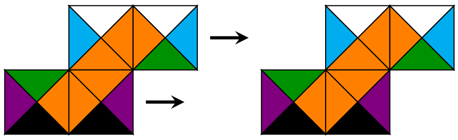


Figure XI.33 – *Motif déplacé par translation horizontale à partir du sous-mot précédent.*

Ainsi les sous-mots relevés dans la retranscription permettent de suggérer que l'individu a mis en avant des stratégies identifiées dans l'analyse *a priori* liées à MOTIF_PERIODIQUE et EMPILEMENT. De plus, l'extrait de la transcription issu de l'entretien ENT-EXP-I-2 de l'annexe I confirme la prise de conscience de s_1 sur ses propres stratégies. Ainsi, des connaissances d'ordre II, relatives au raisonnement par implication directe ou à celle relevant de la CS d'existence de pavage pour la bande $\mathfrak{B}_2$, ont été mobilisées.

```
37 [Jean]      - Avec deux lignes distinctes, c'est-à-
      dire en gros il y avait des dominos qui pouvaient
      aller que sur la première ligne, des dominos qui
      pouvaient aller que sur la seconde ligne, du coup ça
       revient un peu au premier cas. On imposait un sens
      total, on regardait les cycles sur chaque ligne.
      Puis après fallait vraiment s'intéresser à tous les
      cycles, comment... si ils peuvent s'emboiter entre-
      eux...
38 [Chercheur] - D'accord...
39 [Jean]      - Sur des lignes différentes...
40 [Chercheur] - D'accord.
```

Figure XI.34 – *Extrait de l'entretien ENT-EXP-I-2 de l'annexe I, p. 381.*

La deuxième retranscription de l'annexe G (p. 359), permet d'identifier un sous-mot périodique générant la construction à six reprises du motif 2×2 présenté ci-après. Ce sous-mot est présent dans l'intervalle $[13,16[$ et on le retrouve aussi dans l'intervalle $[17,21[$ et $[21,38[$ par exemple.

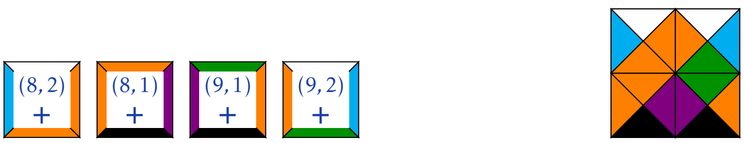


Figure XI.35 – *Exemple du sous-mot correspondant au motif 2×2 extrait de l'intervalle* $[13,16[$.

L'extrait du résumé 2.4 de la figure G.9 (p. 361) montre explicitement un résultat d'existence de pavage de la bande $\mathfrak{B}_2$ par répétition d'un même motif de taille 2×2 (CS d'existence).

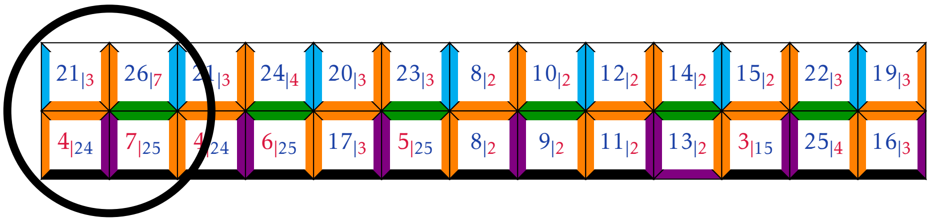


FIGURE XI.36 – Extrait du résumé 2.4 de la figure G.9 (p. 361) montrant la répétion du motif 2×2 dans le pavage de la bande et leur structuration partiellement ordonnée.

De plus, l'extrait de l'entretien ENT-EXP-I-7 permet de confirmer la prise de conscience de s_4 sur la mise en œuvre de la stratégie MOTIF_PERIODIQUE.

194 [Chercheur] - Il y avait les mêmes couleurs...
195 [Isabelle] - C'est ça.
196 [Chercheur] - Sur chaque... sur les bords du motif.
197 [Isabelle] - Ça se retrouvait oui.
198 [Chercheur] - D'accord. Ok,
199 [Isabelle] - Ouais.
200 [Chercheur] - Euh... donc, ce que vous avez fait, c'est que finalement vous avez d'abord construit euh un carré de type deux...
201 [Isabelle] - Oui, c'est ça.
202 [Chercheur] - Deux fois deux...
203 [Isabelle] - deux, Quatre, oui voilà.
204 [Chercheur] - Et vous avez regardé qu'il y ait la même couleur à gauche...
205 [Isabelle] - Oui.
206 [Chercheur] - Et à droite et vous avez répété le motif ...
207 [Isabelle] - C'est ça.

FIGURE XI.37 – Prise de conscience de s_4 sur sa mise en œuvre de la stratégie MOTIF_PERIODIQUE.

On constate également, à certains moments, que les individus ont pu utiliser localement la stratégie FORÇAGE puisque l'environnement extérieur de certaines cases vides possédait déjà des contraintes de couleurs liées au bord de la bande et aux tuiles voisines déjà déposées. C'est le cas par exemple lorsque la tuile de coordonnées $(5,2)$ a été ajoutée (voir $[34,35[$). En effet, la couleur NORD de la bande impose du blanc au NORD de la tuile, et les bords EST et OUEST devaient, par rapport aux tuiles voisines, avoir la couleur orange à l'OUEST et bleue à l'EST. Ainsi, la seule tuile de la collection possédant ces contraintes est la tuile ayant, en plus de ces couleurs, la couleur verte au SUD. A cet effet, un raisonnement par CN relatif aux connaissances d'ordre II a été mobilisé dans cette stratégie, bien que cette dernière soit limitée.

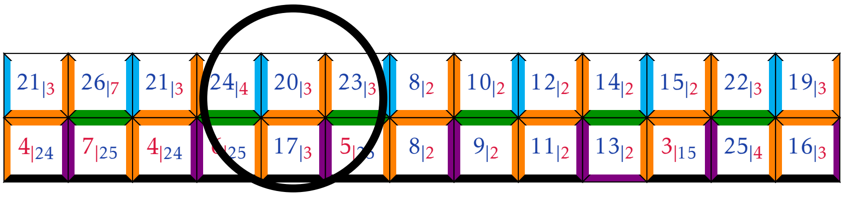


FIGURE XI.38 – *Extrait du résumé 2.4 de la figure G.9 (p. 361) montrant que la stratégie FORÇAGE est mobilisée localement par s_4.*

Enfin, on remarque également la mise en œuvre partielle de la stratégie EMPILEMENT dans la réalisation de $\mathcal{T}$-actions d'ajout successives qui mobilise une connaissance d'ordre II relative à un raisonnement par implication directe.

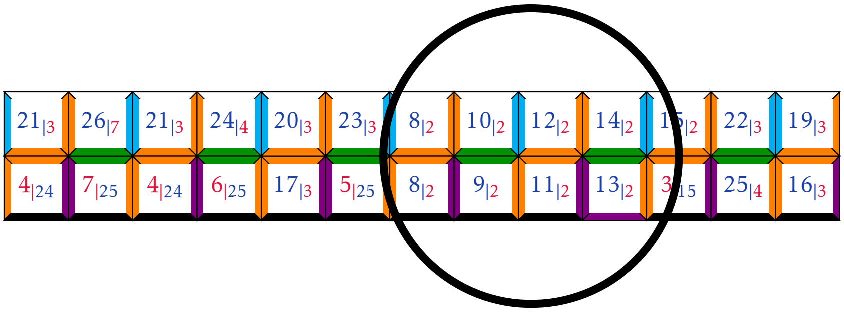


FIGURE XI.39 – *Extrait du résumé 2.4 de la figure G.9 (p. 361) montrant que la stratégie EMPILEMENT est mobilisée partiellement par s_4.*

La stratégie EMPILEMENT impose parfois, lors du pavage, l'ajout d'une tuile spécifique de la collection. Par exemple, lors de la deuxième retranscription de l'annexe H (p. 370) concernant la situation du plan, les tuiles ajoutées par s_7 lors de sa treizième, quatorzième et quinzième $\mathcal{T}$-action sont conditionnées par l'environnement extérieur qui l'oblige à ajouter ces trois tuiles spécifiques, puisque aucune autre tuile de la collection ne peut être positionnée sur cette colonne avec un tel environnement (voir intervalle [32, 26[). On retrouve ici la mobilisation d'une connaissance d'ordre II relative au raisonnement par CN.

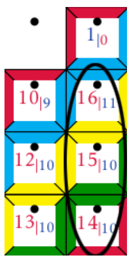


FIGURE XI.40 – *Extrait du résumé 2.2 de la figure H.6 (p.372) montrant FORÇAGE pour la quatorzième, quinzième et seizième $\mathcal{T}$-action de s_7.*

De plus, on remarque une autre procédure liée à la stratégie EMPILEMENT. Celle-ci relève davantage d'un empilement de tuiles en diagonale qu'en colonne. L'intervalle [94, 95[montre que s_6 réalise un geste afin de montrer à s_7 le « caractère » diagonal du pavage. Nous faisons l'hypothèse raisonnable que cette remarque « gestuelle » implique alors, dans la suite de la retranscription, une autre structuration dans les $\mathcal{T}$-actions d'ajout.

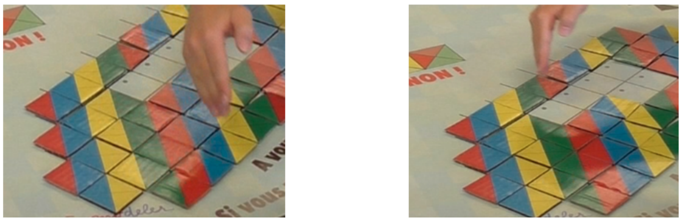


Figure XI.41 – *Extrait du fichier* VEXP1_M2_003.mp4 *montrant s_6 faire un geste en diagonale pour montrer à s_7 la structure du pavage.*

En effet, on observe à partir du marqueur « 109 » des $\mathcal{T}$-actions qui consistent à paver en ajoutant diagonalement la même tuile (voir p. ex., [112, 121[, [127, 129[et [157, 161[). Nous donnons l'exemple de l'intervalle [112, 121[relatif à la figure XI.42). Cette structuration dans la manière de paver la surface fait référence à la stratégie EMPILEMENT puisqu'en poursuivant ces ajouts, les individus empilent en quelque sorte des fragments de lignes de plus en plus grands.

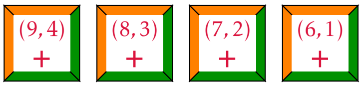


Figure XI.42 – *Exemples du sous-mot de l'intervalle* [112, 121[*montrant explicitement l'empilement diagonal d'une même tuile dans la construction du pavage.*

L'extrait du résumé 2.5 de la figure H.9 (p. 375) permet de montrer explicitement la structuration de ces $\mathcal{T}$-actions.

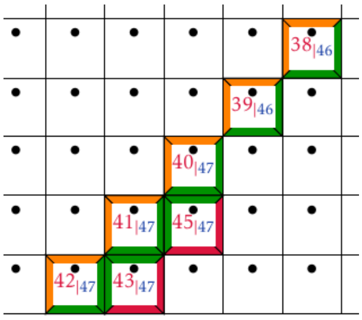


Figure XI.43 – *Extrait du résumé 2.5 de la figure H.9 (p.375) montrant la structuration « diagonale » d'une de ces $\mathcal{T}$-actions.*

Par ailleurs, la répétition de ces empilements diagonaux implique dans la suite de la retranscription l'existence de sous-mot périodique formant un motif 1×4 que l'on peut répéter horizontalement, puis décaler autant une infinité de fois la bande ainsi construite d'un carreau en diagonale vers le haut et vers le bas pour paver le plan. Toutefois il n'est pas clair que ces individus aient identifié le motif de base 1×4 suffisant pour engendrer un pavage du plan grâce à la stratégie MOTIF_PERIODIQUE. De plus, nous avons l'impression qu'ils essaient de paver une surface bornée. Par exemple, le dialogue de l'intervalle $[124, 127[$ montre que les sujets prennent conscience que la tuile possédant la couleur orange à l'OUEST n'aura jamais de voisin à l'EST puisque comme le dit s_6 : « il n'y a pas d'autre tuile qui contient du orange ». Cependant, ils les déplacent quand même tout à gauche de la surface à paver afin de commencer à partir de ces tuiles. Ceci montre que pour eux la surface à paver est bornée car sinon ils les auraient éliminées du pavage... D'ailleurs, les résumés 2.5 et 2.6 montrent explicitement le déplacement de ces tuiles vers l'extrémité de la $\mathcal{Z}_T$ (figure XI.44).

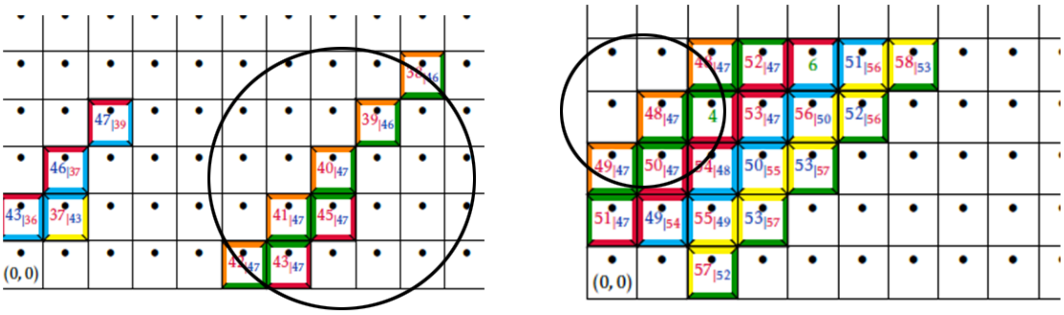


FIGURE XI.44 – Extrait des résumés 2.5 et 2.6 des figures H.9 et H.10 (p. 375 et 376) montrant le déplacement des tuiles (avec du orange) sur le bord de la $\mathcal{Z}_T$.

Enfin, l'analyse de la première et troisième retranscription de l'annexe H (p. 368 et p. 378) permet de relever la présence d'un sous-mot périodique inhérent au motif 1×4 permettant de générer un pavage du plan.

Par exemple, s_3 semble avoir compris qu'il suffit d'utiliser la stratégie MOTIF_PERIODIQUE couplée à EMPILEMENT pour paver la surface considérée (figure XI.45, figure XI.46 et extrait du résumé 1.2 de la figure H.4, p. 370 de l'annexe H).

FIGURE XI.45 – Sous-mot répété à plusieurs reprises générant un motif 1×4 horizontalement périodique permettant de paver le plan par décalage d'un carreau en diagonale.

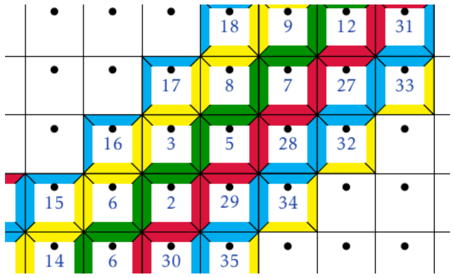


FIGURE XI.46 – Extrait du résumé 1.2 de la figure H.4, p. 370 montrant la répétition du motif 1×4 *pour paver le plan.*

D'ailleurs l'extrait de l'entretien ENT-EXP-I-8 ci-après semble le confirmer.

```
47 [Dame]       - Avec un sens, donc il fallait que j'ai
     une bande de quatre qui...qui s'enchaîne...
48 [Chercheur] - Oui.
49 [Dame]       - C'était ceux-là que j'allais dupliquer
     voilà.
50 [Chercheur] - D'accord.
```

FIGURE XI.47 – Extrait de l'entretien ENT-EXP-I-8 de l'annexe I, p. 381.

De plus, nous remarquons aussi que s_3 semble avoir compris que la surface à paver est théoriquement non bornée.

```
99 [Dame]       - Voilà le but c'était ça moi j'étais un
     carreleur et il fallait que je fasse ça et me dire
     est-ce que... dans quelle... quelle est la
     configuration, qu'est-ce que je dois faire pour que
     j'arrive à carreler le plus possible... en surface ?
100 [Chercheur] -  Donc une surface euh... une surface euh
     ...
101 [Dame]       - Oui une surface...
102 [Chercheur] - Avec des limites ou pas ?
103 [Dame]       - Alors euh... pour moi toute seule euh...
     pour moi c'était euh quand j'arrive sur le stand de
     jeux, c'était il faut que j'utilise tout ça, c'
     était avec des limites de mes carreaux et de mon...
     et peut-être du dessin mais comme le dessin il avait
     ... il avait des bords qui pouvaient partir moi j'
     avais tendance...
104 [Chercheur] - Exactement.
105 [Dame]       - A vouloir carreler les bords partis mais
     par contre j'aurais été satisfaite si j'avais fait
     toutes mes... si j'avais utilisé tous mes carreaux
     là...
```

FIGURE XI.48 – Extrait de l'entretien ENT-EXP-I-8 de l'annexe I, p. 381.

Enfin, nous ajoutons un dernier point concernant la confrontation des sujets à l'impossibilité de paver la bande $\mathfrak{B}_1$ lors des deux dernières expérimentations.

L'extrait de l'entretien ENT-EXP-IV-5 mené lors de la quatrième expérimentation (annexe L) mentionne clairement que l'individu arrive à paver des motifs constitués de quatre et cinq tuiles, mais n'arrive pas à poursuivre le pavage malgré plusieurs tentatives.

```
49 [Chercheur] - Alors sur la bande qu'est-ce que vous
      avez obtenu ? Est-ce que vous pensez déjà avoir
      obtenu un résultat sur la bande ?
50 [Katia]      - Alors honnêtement je pense que ce
      problème n'est pas faisable.

51 [Chercheur] - Alors ce problème n'est pas faisable...
      donc vous pensez qu'il n'est pas faisable ?
52 [Katia]      - Personnellement non j'ai pas la bosse
      des maths ou de rien donc mais personnellement j'ai
      beau essayé toutes les techniques euh...
53 [Chercheur] - Alors justement est-ce que vous avez mis
      en place des stratégies, c'est-à-dire un moyen pour
      montrer que ça ne marchait pas ?
54 [Katia]      - Ben j'ai réussi à voir une suite de
      quatre ou cinq.
55 [Chercheur] - Ouais.
56 [Katia]      - Et ça s'arrête là.
57 [Chercheur] - Donc quatre ou cinq dominos.
58 [Katia]      - Quatre ou cinq oui je crois et après ça
      s'arrête là, pareil avec le point en haut le noir en
      bas, la couleur qui se suit, les couleurs qui se
      touchent et après on se retrouve bloqué, il y en a
      encore deux à côté qui vont ensemble.
59 [Chercheur] - Ouais.
60 [Katia]      - On a une pièce ou deux je crois que c'
      est carrément des intrus.
61 [Chercheur] - Ouais.
62 [Katia]      - On sait pas ce qui font là mais bon ils
      sont là après voilà.
63 [Chercheur] - Et donc ça marche pas ?
64 [Katia]      - Ben pour moi ça ne fonctionne pas.
65 [Chercheur] - Vous avez essayé... alors c'est une
      hypothèse ou vous êtes sûre que ça ne marche pas ?
66 [Katia]      - Non c'est une hypothèse.
67 [Chercheur] - C'est une hypothèse d'accord.
```

***Figure XI.49** – Extrait de l'entretien ENT-EXP-IV-5 de l'annexe L, p. 521.*

Le statut de ce résultat semble, pour cet individu, relever de la conjecture (nommée « hypothèse » dans la transcription) et non d'un résultat irréfutable. Cela permet d'interpréter que les tentatives de construction du pavage n'ont peut-être pas été assez structurées au point de convaincre l'individu de cette impossibilité.

L'individu remarque tout de même que le pavage aurait été possible si « on ne tient pas comptes des points » et donc de l'orientation des tuiles...

```
81 [Chercheur] - Alors justement maintenant c'est la
     question inverse à quelle condition vous pensez qu'
     on peut arriver à recourir cette bande ? Quand est-
     ce que c'est possible par exemple ?
82 [Katia]     - Ça pourrait être possible si on ne tient
      pas compte des points.
83 [Chercheur] - Ouais.
84 [Katia]     - Alors je n'ai pas essayé de les faire à
     l'envers...
85 [Chercheur] - D'accord.
```

FIGURE XI.50 – Extrait de l'entretien ENT-EXP-IV-5 de l'annexe L, p. 521.

Il est aussi intéressant de remarquer que le résultat d'impossibilité, énoncé sous la forme d'une « hypothèse », ne semble pas convenir à l'individu. Le fait de ne pas pouvoir exhiber un pavage complet de la bande, *a contrario* de pouvoir le faire, ne relève pas, pour lui, réellement d'un résultat.

```
101 [Chercheur] - Ok et donc est-ce que vous pensez que c'
     est un résultat ce que vous me dites ?
102 [Katia]     - Ah non je n'aime pas quand c'est pas
     fini mais cinq me dit que j'ai donné tout ce que je
     pouvais pour y arriver donc pourquoi pas, on va
     partir du principe que c'est un résultat.
103 [Chercheur] - D'accord donc vous n'êtes pas convaincue
     , pour vous c'est un peu un résultat partiel.
104 [Katia]     - Ouais c'est un résultat partiel.
105 [Chercheur] - Si vous étiez arrivée à trouver un
     pavage complet, pour vous c'est un résultat ça ? Le
     fait de montrer que ça marche
106 [Katia]     - Oui.
107 [Chercheur] - Oui.
108 [Katia]     - Parce que finalement on a un début et
     une fin ça doit commencer et ça doit finir.
```

FIGURE XI.51 – Extrait de l'entretien ENT-EXP-IV-5 de l'annexe L, p. 521.

3 Résultats de l'analyse des expérimentations

Nous avons réalisé quatre expérimentations dans des conditions cliniques proches du réel : réalisation de ces dernières dans des centres de culture scientifique, public volontaire et familial, autonomie et responsabilité données au public, absence du chercheur (médiateur), temps alloué suffisant.

En outre, l'importance du corpus de données audiovisuelles nous a contraints à retranscrire uniquement les données de la première expérimentation, dans le but de les analyser finement par la suite. En revanche, l'accès aux fichiers vidéo des trois autres expérimentations, ainsi que les transcriptions des entretiens associés nous ont quand même permis de relever des traces jugées significativement intéressantes.

3.1 Dévolution des situations et utilisation effective du matériel disponible

Les résultats de nos expérimentations montrent de manière générale que la dévolution et l'enrôlement des situations construites se sont la plupart du temps bien réalisés. En effet, les sujets sont rapidement entrés dans la résolution des problèmes proposés en utilisant les artefacts à disposition. De plus, la règle locale d'adjacence des couleurs proposée au niveau de la $\mathcal{Z}_{\mathcal{I}}$ a bien été comprise et respectée même si l'on retrouve, par moment, des erreurs locales lors de la réalisation des pavages. D'ailleurs, pour diminuer ces erreurs notamment dans le cas de la bande $\mathcal{B}_1$, nous aurions dû proposer, par exemple, des couleurs distinctes sur les bords nord et sud de cette bande à la place des poinçons. Ceci afin de faciliter aux individus le repérage des rétroactions renvoyées par le milieu artefactuel.

Par ailleurs, nous avons constaté que la recherche de tuiles dans $\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$ concernant la situation des rectangles était assez complexe, même si les six types de tuiles étaient bien compartimentés dans des boites. Cette difficulté relève de l'identification précise d'une tuile sachant que celle-ci existe, parfois, en effectuant une rotation sur un des six types proposés. A cet instant, la seule manière possible, selon nous, de diminuer cette difficulté serait de proposer des triangles colorés. Néanmoins, notre analyse didactique a montré, pour des raisons épistémologiques, didactiques et ergonomiques que ce choix n'est pas non plus approprié... Actuellement et sans autre moyen à disposition (p. ex., numérique, distributeur...) nous n'avons pas de solution plus efficace.

De plus, l'artefact « réglette » a été proposé afin que les individus fixent eux-même la taille des rectangles à paver. C'était l'occasion d'observer l'appropriation de la variable de recherche concernant la taille des rectangles par les individus agissant sur ces situations. Malheureusement, les quatre expérimentations ont montré que quel que soit le positionnement de cette réglette, disposée par le chercheur en amont de l'expérience, le public ne s'est pas réellement saisi de cette variable de recherche puisqu'il n'a pas fixé lui-même ses propres tailles de rectangle à étudier. Les individus l'ont toujours positionnée au niveau de la taille maximale du rectangle (qui était par ailleurs l'une de nos hypothèses), ou ne l'ont pas déplacée de la zone rectangulaire déjà délimitée. C'est seulement à la suite des entretiens qu'ils ont réellement compris sa fonctionnalité... Nous faisons l'hypothèse que la taille maximale du rectangle proposée n'était peut-être pas assez conséquente pour que le public comprenne l'intérêt de travailler, en réduisant alors la $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$, sur des cas particuliers plus petits. Par conséquent, la connaissance d'ordre II, liée au processus d'expérimentation, relative à l'entrée dans la résolution du problème par l'étude de petits cas, n'a pas été mobilisée dans le cadre de nos expérimentations.

Enfin, les illustrations réalisées sur la $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$ du module 2 (situation des bandes et du plan) semblent avoir permis la prise de conscience de certains sujets sur le fait que les régions à paver étaient théoriquement non bornées (plan) ou semi-bornées ($\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$).

3.2 Traces d'activité mathématique relevées chez les individus

Notre intentionnalité didactique était de proposer des situations afin que le public fasse des mathématiques dans des espaces de médiation où le médiateur est totalement exclu des situations (médiation indirecte).

A cette occasion, l'analyse des expérimentations montre qu'il est possible qu'un individu fasse des mathématiques dans ces conditions particulières. En effet, par rapport à la caractérisation donnée de l'activité mathématique, nous avons alors cherché à identifier au niveau des retranscriptions, des traces de stratégies qui mobilisent des connaissances d'ordre II, comme celles déjà relevées dans l'analyse *a priori*. Pour ce faire, nous avons extrait des sous-mots, parfois périodiques, correspondant à ces stratégies permettant ainsi d'objectiver les connaissances d'ordre II mises en œuvre et donc l'activité mathématique des individus observés.

Dans le cas des situations des rectangles (module 1), notre analyse a montré de manière effective la non appropriation de la variable de recherche concernant la taille de ces rectangles. Ainsi, les sujets n'ont pas, en amont des entretiens, expérimenté d'autres tailles, ce qui les a empêchés d'appréhender le problème dans sa généralité. D'abord, on a constaté que dans la plupart des entretiens les individus se cantonnent à donner explicitement des résultats d'existence lorsqu'ils sont arrivés à recouvrir intégralement un cas particulier de rectangle en expliquant, pour certains, leur processus de construction amenant à une preuve d'existence (CS).

Cependant, aucune conjecture globale d'existence donnant des conditions sur la longueur et la largeur du rectangle n'a été formulée puisque aucun autre cas n'a été étudié... Toutefois, nous avons quand même relevé lors d'un entretien, la formulation explicite d'une conjecture de portée générale donnant une CS (faible) sur la taille des rectangles :« [...] on s'est dit que c'était peut-être possible que ça fonctionne qu'on puisse remplir les rectangles [...] de carrés que si c'était des multiples de 4. », mais sans donner un véritable argument de preuve.

Ensuite, concernant les individus qui ont traité des cas particuliers où il était impossible d'exhiber un tel pavage nous avons relevé deux points de vue différents. Le premier où les individus formulent une conjecture locale selon laquelle il est impossible de trouver une solution valide concernant ce rectangle. Le second où les individus formulent plutôt une conjecture locale d'existence de cet objet. Ainsi, bien que dans ces deux cas, les individus reconnaissent que le statut de leur résultat relève de la conjecture, cela révèle quand même au niveau de leurs conceptions que l'impossibilité n'est, pour certains, pas perçue comme quelque chose d'envisageable.

Les connaissances d'ordre II mobilisées relèvent principalement du concept de condition suffisante (CS) et de condition nécessaire (CN locale), du raisonnement par implication directe, du raisonnement par CN (forçage), de la disjonction de cas et de la formulation de conjectures.

Dans le cas des situations des bandes bi-infinies et du plan (module 2), nous pouvons dire de manière générale que la procédure d'exclusion des tuiles inutiles a été réalisée presque systématiquement et ce de manière implicite. C'est-à-dire sans la nécessité d'ajouter les tuiles sur la $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$ qui ne possédaient, ni de voisin à gauche et/ou ni de voisin à droite. Par exemple, les retranscriptions de la première expérimentation ont montré que très peu de ces tuiles apparaissaient dans les $\mathcal{T}$-actions d'ajout ou de retrait. Par ailleurs, certains entretiens ont mis en évidence la formulation de résultats d'existence de pavage de bandes bi-infinies ou du plan avec les collections données. A cette occasion, on a retrouvé des traces explicitant les processus de construction établissant des CS de pavabilité sur les régions considérées. D'autres ont même formulé des CN, par exemple pour la bande de hauteur $h = 1$: « il fallait impérativement pourvoir faire un cycle avec ces tuiles » en expliquant dans la suite de l'entretien la raison. La notion de cycle est vue dans ce cas comme une prémisse de modélisation intra-mathématique entre une tuile et son graphe associé puisque les relations entre les tuiles ne sont pas données par le matériel.

Les connaissances d'ordre II mobilisées dans ce cas relèvent principalement du concept de condition suffisante (CS) et de condition nécessaire (CN), du raisonnement par implication directe, du raisonnement par CN (forçage), de la formulation de conjectures et d'un début de modélisation par changement de registre de représentation.

Dans le cas du module 2, bien que le matériel contraigne à « borner » la $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$ sur laquelle le sujet (ou groupe de sujets) agit, certains ont bien compris que d'un point de vue théorique leur pavage pouvait recouvrir une surface infiniment grande. Néanmoins, chez certains la contrainte matérielle a provoqué des difficultés dans la conceptualisation de la non finitude théorique des régions à paver. En outre, lorsque nous avons proposé une collection de tuiles qui ne permettait pas de recouvrir la bande bi-infinie $\mathfrak{B}_1$, nous avons relevé, comme dans le cas des rectangles, une certaine difficulté dans l'acceptation de cette impossibilité.

En conclusion, pour chacun des modules on a repéré des traces d'activité mathématique relevant de stratégies précises qui ont nécessité la mobilisation de connaissances d'ordre II. Ces stratégies ont été identifiées et extraites des retranscriptions. Par ailleurs, elles ont parfois réussi à être explicitées par le public lors des entretiens menés. Ces stratégies ont servi à établir des CS d'existence de pavage mais les arguments de preuve de CN, notamment lorsque les sujets ont été confrontés à l'impossible, n'ont pas été clairement repérés. Ceci tient au fait que les arguments de preuve d'impossibilité demandent aux individus une part d'abstraction importante. Notamment, lorsque les cas à étudier sont de tailles relativement conséquentes puisqu'ils ne permettent pas, de manière efficiente, d'utiliser les stratégies de type forçage ou brute-forte plus facilement identifiables dans notre contexte d'expérimentation. Par ailleurs, les stratégies mobilisées dans les preuves d'existence de CS relèvent de stratégies de périodicité où l'individu répète un motif de base permettant de générer un pavage. On observe également la mise en avant de la stratégie forçage où l'individu est obligé de poser des tuiles spécifiques, car l'environnement extérieur impose des contraintes. La stratégie de forçage a surtout été utilisée localement et n'a pas vraiment servi à établir des résultats d'impossibilité sur les cas traités. On a également relevé à de nombreuses reprises la stratégie brute-force, plus structurée que le simple jeu essais-erreurs, puisqu'elle relève du *backtracking* où le sujet avance pas à pas dans la construction et revient en arrière dès lors qu'il est bloqué.

Il se peut que la prise de conscience de ces stratégies lors des entretiens aurait été plus flagrante si les entretiens avaient été menés après l'expérimentation de plusieurs situations, car cela aurait amené au réinvestissement des stratégies et donc des invariants de preuve pour résoudre les problèmes.

Ce chapitre montre donc qu'il est possible de faire des mathématiques dans des espaces de médiation où les situations sont complètement adidactiques, c'est-à-dire excluant la présence de médiateur. Par conséquent, ces résultats permettent de répondre à notre problématique et confirment ainsi notre hypothèse de recherche, formulée dans un chapitre précédent (chap. IV), sur le fait qu'il est possible qu'un individu (ou groupe d'individus) fasse des mathématiques, de manière autonome, dans des institutions de culture scientifique, à condition que les ressources proposées répondent aux exigences de notre modèle du problème transposé.

Conclusion générale

Chapitre XII

Conclusion et perspectives de recherche

1 Un manque constaté au niveau de l'existant

Dans cette thèse nous avons montré que les institutions de culture scientifique proposent des conditions favorables à la pratique de l'activité mathématique. En effet, certains espaces accueillant un public, *a priori* volontaire, allouent en général un temps suffisant tout en laissant une place importante à l'autonomie du public. Ce sont précisément les espaces de médiation indirecte où le médiateur est totalement absent. Cette autonomisation permet au public de se saisir de la responsabilité scientifique par rapport aux contenus de certaines ressources où il est autorisé à agir.

Ces conditions, bien que favorables à une telle pratique, ne sont pas suffisantes. Elles doivent être complétées par un contenu pertinent des ressources mises à disposition. Or, notre étude écologique montre que les ressources mathématiques proposées dans des institutions françaises — reconnues comme étant des acteurs incontournables de la diffusion mathématique — n'ont pas le potentiel à engager le public dans la pratique mathématique. Les raisons que nous avons identifiées sont de nature épistémologique, didactique et ergonomique.

La suite de notre travail montre qu'il est pourtant possible de développer des ressources permettant l'accès à une véritable activité mathématique.

2 La pratique de l'activité mathématique est possible dans ces espaces de médiation

Dans cette thèse nous avons développé des ressources. Nous les avons testées dans le cadre d'expérimentations menées dans des conditions réelles. Une des spécificités, originale, est la composition du public. En effet, celui-ci est constitué de volontaires, sans contrainte d'âge ni de niveau scolaire. La seule condition est d'avoir eu accès à l'information (zone géographique de la Drôme et l'Ardèche).

Ces ressources ont permis de mettre en évidence une pratique réelle de l'activité mathématique de la part du public. Les individus ont en effet développé des stratégies de résolution, similaires à celles relevées dans notre analyse mathématique, qui ont nécessité la mobilisation de connaissances spécifiques à cette pratique (condition suffisante, condition nécessaire, formulation de conjectures, raisonnements, modélisation...) tout en dépassant le simple jeu essais-erreurs.

À cette occasion, notre travail prouve la mise en œuvre de plusieurs stratégies traitant la question de la condition suffisante de pavabilité des régions considérées. Notre analyse montre en effet des stratégies mobilisant des connaissances en lien avec le raisonnement par implication directe, comme celle de la périodicité, de l'empilement ou encore du « brute-forte » (*backtraking*) couplé parfois avec la stratégie de forçage permettant d'exhiber un pavage du rectangle, des bandes bi-infinies et du plan discret.

En revanche, les conditions nécessaires sont plus difficilement accessibles car elles se formulent parfois comme une impossibilité et nécessitent, par ailleurs, un degré d'abstraction plus important. On se heurte alors à la conception du public qui, par son rapport personnel, pense que ce qui lui est proposé est toujours possible. Toutefois, certains formulent cette impossibilité sous la forme d'une conjecture et donnent parfois des éléments de preuve. On retrouve aussi dans les entretiens la formulation de conditions nécessaires avec des éléments de preuve mentionnant un changement de registre de représentation de l'objet en jeu. Ceci est vu comme les prémisses d'une modélisation intra-mathématique (p. ex., existence d'un cycle, degré entrant, degré sortant). Ces éléments permettent soit de produire des solutions d'existence dans un contexte non limité par le matériel, soit de donner des éléments de preuve de non-existence. Certains de ces éléments peuvent être repérés, surtout à un niveau local, lorsqu'il s'agit d'argument de forçage.

Cependant, nos résultats montrent que les individus n'appréhendent pas la résolution du problème par l'étude de petits cas, ils en restent à l'étude d'un cas particulier. En effet, le matériel disponible (réglette), en lien avec la variable de recherche permettant de fixer et d'étudier différentes tailles de rectangle, n'a pas été investi alors qu'il aurait pu permettre de générer d'autres types de preuves comme les preuves ostensives (CS) ou d'impossibilité (CN) notamment dans l'étude de cas de petite taille. L'appropriation de cette variable de recherche par le public permettrait aussi de formuler des conjectures globales d'existence (CNS) pour traiter le problème dans sa généralité.

Afin de permettre la mobilisation de connaissances spécifiques liées à la pratique de l'activité mathématique (entrée dans la résolution du problème par l'étude de cas de petite taille, formulation de conjectures, condition nécessaire, condition suffisante, raisonnements, modélisation...), la conception de ces ressources doit prendre en compte les dimensions épistémologique, didactique et ergonomique. Le modèle du *problème transposé* que nous proposons répond à cette condition.

3 Modèle didactique pour concevoir ces ressources

Pour concevoir ces ressources, nous avons développé le modèle du problème transposé qui se scinde en trois étapes : épistémologique, didactique et ergonomique.

La première étape relève de l'épistémologie du problème. Elle concerne d'abord l'*aspect syntaxique* dans la formulation du problème. Ce dernier doit avoir une structuration qui permette d'identifier la question et l'ensemble de ses instances. Elle concerne ensuite l'*aspect sémantique* du problème. Celui-ci doit détenir une *quantité épistémologique* significative, c'est-à-dire entretenir des relations de voisinage avec d'autres problèmes. Ces relations sont établies par la proximité de leurs questions, de leurs instances et des invariants de preuve pour les résoudre. Ainsi, plus un problème est riche de relations dans son univers, plus ce problème est sémantiquement intéressant à résoudre. En nous appuyant sur la notion de *concept-problème* et en particulier d'*espace-problème*, nous avons développé la notion de *zoom* qui permet, à partir d'un problème de recherche donné, de zoomer sur son espace-problème à différents degrés de granularité afin d'en construire son analyse mathématique. Le facteur zoom peut être déterminé par rapport à l'intentionnalité didactique initiale. Dans notre cas, le public peut être un public spécialisé, une analyse mathématique poussée est alors nécessaire.

La seconde étape relève de la transposition du problème. Nous utilisons la caractérisation du modèle des Situations de Recherche pour la Classe (SiRC) à ce niveau qui se révèle être en adéquation avec notre intentionnalité didactique au niveau du développement des connaissances liées à la pratique de l'activité mathématique.

Enfin, la troisième et dernière étape relève de l'ergonomie puisqu'il n'est pas envisageable de proposer dans ces espaces des situations dépourvues de matériel. Cette étape relève de l'utilité, l'utilisabilité et l'acceptabilité des artefacts construits pour ces situations tout en discutant des effets potentiels de détournement des artefacts de ce pourquoi ils ont été construits initialement.

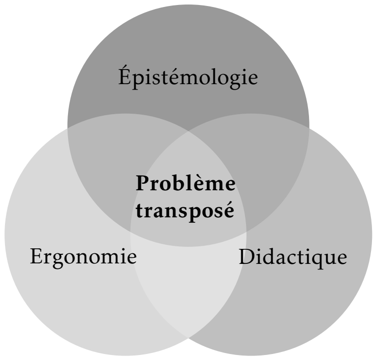


Figure XII.1 – *Modèle du problème transposé décrit selon trois composantes : (i) épistémologie, (ii) didactique, (iii) ergonomie.*

Ce modèle a été ensuite investi lors de notre analyse *a priori* dans la conception de nos ingénieries en prenant appui sur un problème de pavage issu de la recherche contemporaine en mathématiques discrètes, le problème de Wang.

Les résultats des expérimentations de ces ingénieries permettent donc de répondre à notre problématique de recherche en démontrant le fait qu'il est possible de faire des mathématiques dans ces espaces de médiation, de manière complètement autonome, si les ressources proposées sont construites en adéquation avec les conditions épistémologiques, didactiques et ergonomiques de notre modèle.

Par ailleurs, pour repérer les traces d'activé mathématique d'individus placés en résolution de problème dans ce contexte et inférer sur leur pratique mathématique, nous proposons un *modèle de traitement et d'analyse de données audiovisuelles*.

4 Modèle didactique pour décrire et objectiver les traces d'activité mathématique en situation

Notre modèle repose sur une caractérisation précise du milieu de la situation en fonction des actions qui pourraient être réalisées par les individus. Nous l'avons caractérisé en différentes *zones fonctionnelles* : la *zone de travail* ($\mathcal{Z}_\mathcal{T}$) ; la *zone d'outillage* ($\mathcal{Z}_\mathcal{O}$) et la *zone d'information* ($\mathcal{Z}_\mathcal{I}$) en prenant aussi en compte la sphère sociale.

Ce point de vue sur le milieu est nouveau et a montré son efficacité pour étudier l'activité mathématique du public.

Pour décrire, repérer et objectiver les traces d'activité mathématique des individus observés dans ce contexte spécifique, nous avons développé un modèle de traitement et d'analyse de données audiovisuelles décrit en trois étapes et nommé ORA (Observable-Retranscription-Analyse).

La première étape se situe au niveau du choix des observables : typologie et choix d'actions élémentaires, description des stratégies vues comme une concaténation ordonnée de ces actions a_i réalisées sur des objets o_j caractérisant des *mots*.

La deuxième étape relève du traitement du corpus de données en lien avec la retranscription et ses *résumés*. Ici, nous proposons un encodage des actions préalablement choisies, pour des raisons épistémologiques et didactiques, en un format symbolique intelligible permettant de retranscrire le plus fidèlement possible les actions des sujets observés. Cette étape est complètement déterministe et permet lors de la lecture de rejouer chacune des actions réalisées par les sujets.

Enfin, la troisième et dernière étape consiste à analyser cette retranscription en extrayant des mots relevés comme étant similaires ou proches des stratégies identifiées dans l'analyse mathématique du problème. Par ailleurs, ces stratégies nécessitent, lors de leur mise en œuvre, de mobiliser des connaissances spécifiques à la pratique de l'activité mathématique et permettent donc d'induire si les sujets sont entrés dans une telle pratique. Par conséquent, cela permet de qualifier, ou non, l'activité d'un individu (ou groupe d'individus) d'activité mathématique.

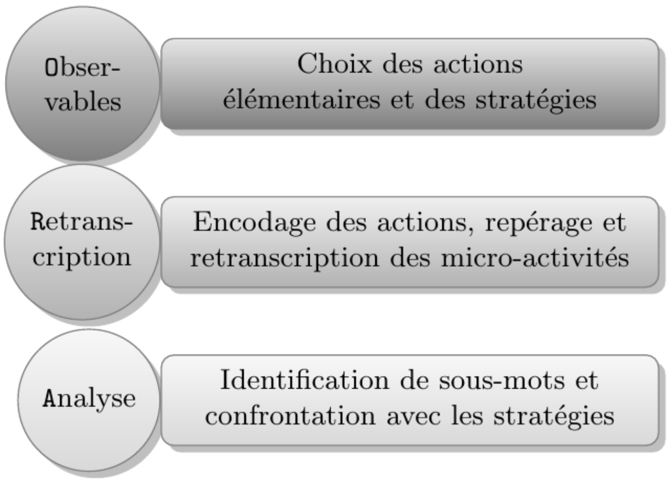


FIGURE XII.2 – *Modèle ORA de traitement et d'analyse de données audiovisuelles.*

5 Perspectives de recherche

Une première perspective de recherche intéressante serait de poursuivre le développement de notre dispositif vers d'autres ingénieries didactiques autour de problématiques de pavage. A cet effet, la notion de *zoom* introduite dans ce travail offre des perspectives pertinentes dans la conception d'une exposition composée de ressources fondées sur la description de l'espace problème. De plus, d'un point de vue didactique elle peut être un outil pour la conception des situations fondamentales pour l'apprentissage de l'activité mathématique. Par ailleurs, la notion de *zoom* pourrait être enrichie par le développement de la notion de *distance* entre les problèmes mathématiques décrits dans l'univers. En effet, ces problèmes n'ont pas tous la même proximité et il serait intéressant de pouvoir la décrire. Enfin, le développement de ce dispositif vers d'autres ingénieries permettrait l'utilisation, dans différentes situations, d'un même artefact, comme par exemple « la réglette », jouant ainsi un rôle facilitateur dans son appropriation et donc dans la mobilisation de la connaissance relative à l'entrée dans la résolution du problème par l'étude de cas particuliers de petite taille. En outre, il semblerait que certains raisonnements, qui ont difficilement été mobilisés lors de ces expérimentations, soient davantage suscités s'il existait d'autres ressources permettant de les mobiliser.

Une deuxième perspective, liée à notre modèle de description et d'objectivation des traces d'activité mathématique, serait d'automatiser le processus de retranscription et d'analyse par une machine déterministe. En effet, la réalisation de ce travail par une machine permettrait de recueillir un nombre important de traces, pour un nombre conséquent d'utilisateurs et pour une durée potentiellement grande, dont les données ne sont, dans les faits, pas traitables humainement. Ainsi, on pourrait imaginer traiter et analyser ces données de manière quantitative. Par exemple, pour un nombre conséquent d'utilisateurs, on serait capable de repérer combien de fois telle ou telle stratégie a été mobilisée ou encore de statuer finement sur l'écart entre les stratégies produites et celles relevées au niveau de l'analyse mathématique. Des perspectives intéressantes sont donc à développer d'un point de vue informatique et en particulier au niveau de l'intelligence artificielle et du Big Data par exemple. Enfin, on pourrait imaginer un assistant virtuel en réalité augmentée qui permettrait d'analyser en situation les actions produites par les individus et ainsi fournir des rétroactions non intrusives, adéquates et pertinentes au regard de l'avancée des individus dans la résolution des problèmes proposés. A cette occasion, ceci permettrait de proposer une institutionnalisation personnalisée des connaissances mobilisées lors de l'activité de l'individu tout en alliant l'injonction de la non divulgation des réponses.

Une troisième perspective serait, dans ces conditions d'expérimentation, de concevoir un étayage spécifique permettant l'usage adéquat de la réglette et ainsi favoriser son appropriation. Ceci permettrait, sans pour autant développer d'autres ingénieries, d'entrer dans la résolution du problème par l'étude de petits cas et donc la mise en œuvre de preuves locales d'existence ou d'impossibilité amenant à la formulation de conjectures de portée générale.

Enfin, d'un point de vue mathématique, les résultats de nature algorithmique sur les problèmes de décision relevant de l'existence de pavage (rectangle et bande bi-infinie de hauteur $h > 0$ fixée) sont nouveaux et devraient être valorisés.

Bibliographie

Abdallah, E. (2020). *Les mathématiques discrètes dans l'enseignement supérieur : une approche épistémologique et didactique* (thèse de doct.). Reims.

AlPaGe. (2018a). Regards sur les ateliers récréatifs. In M. Abboud (Éd.), *Mathématiques en scène des ponts entre les disciplines – Actes du colloque EMF 2018* (p. 1298-1309).

AlPaGe. (2018b). Un avenant au contrat didactique : la vulgarisation en classe. In M. Abboud (Éd.), *Mathématiques en scène des ponts entre les disciplines – Actes du colloque EMF 2018* (p. 1310-1324).

Ammann, R., Grünbaum, B. & Shephard, G. C. (1992). Aperiodic tiles. *Discrete & Computational Geometry*, *8*(1), 1-25.

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *9*(3), 281-308.

Attal, R., Audin, P., Jamet, R. & Reuiller, G. (2012). La vulgarisation des mathématiques par la médiation humaine — Exemple du Palais de la Découverte. In J.-L. Dorier & S. Coutat (Éd.), *Enseignement des mathématiques et contrat social, Enjeux et défis pour le 21ème siècle – Actes du colloque EMF 2012* (p. 1914-1925).

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational studies in mathematics*, *18*(2), 147-176.

Barbeau, E. J. & Taylor, P. J. (2009). *Challenging mathematics in and beyond the classroom : The 16th ICMI study* (T. 12). Springer Science & Business Media.

Belaën, F. & Blet, M. (2007). La médiation présencielle dans un musée des sciences. *La Lettre de l'OCIM. Musées, Patrimoine et Culture scientifiques et techniques*, (114), 30-38.

Belbachir, H. (2012). Vers un Palais des Sciences en Algérie : une impulsion des mathématiques. In J.-L. Dorier & S. Coutat (Éd.), *Enseignement des mathématiques et contrat social, Enjeux et défis pour le 21ème siècle – Actes du colloque EMF 2012* (p. 1873-1882).

Bensaude-Vincent, B. (2010). Splendeur et décadence de la vulgarisation scientifique. *Questions de communication*, (17), 19-32.

Berger, R. (1964). *The undecidability of the domino problem* (thèse de doct.). Université d'Harvard.

Berger, R. (1966). *The undecidability of the domino problem*. American Mathematical Soc.

Bernat, J. (2014). Coloriages sous contraintes. *Découverte*, *394*, 44-47.

Berthelot, R. & Salin, M. H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire* (Theses). Université Sciences et Technologies - Bordeaux I. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00414065

Bertoni, M., Häusler, M., Floris, R. & Weiss, L. (2006). Catégorisation didactique de séquences vidéo pour l'analyse de pratiques d'enseignement des mathématiques. *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés. Actes du colloque EMF 006*.

Blandin, M. & Renar, Y. (2003). La culture scientifique et technique, une priorité nationale. *Paris, Rapport Sénat*.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational studies in mathematics*, *17*(2), 125-141.

Bouveresse, J. (2001). Mathématiques et logique chez Leibniz. *Revue d'histoire des sciences*, 223-246.

Bouvier, A., George, M. & Le Lionnais, F. (2005). Dictionnaire des mathématiques (7e éd.) *Paris : Presses universitaires de France (1ère éd. 1979)*.

Bouznif, M., Moncel, J. & Preissmann, M. (2016). A constant time algorithm for some optimization problems in rotagraphs and fasciagraphs. *Discrete Applied Mathematics*, *208*, 27-40.

Bronner, A., Bellard, N., Girmens, Y., Larguier, M., Pellequer, S., Roche, M., Seco, M. & Vergne, C. (2003). Faire ou ne pas faire des mathématiques, des outils d'étude, exemple dans le cas de l'étude du signe du binôme. *J, Coulomb ; J, Douaire & R, Noirfalise (Eds). Faire des maths en classe*.

Brousseau, G. (1983). Etude de questions d'enseignement, un exemple : la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, *45*, 183-226.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, *9*(9.3), 309-336.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. La pensée sauvage Grenoble.

Brun, J. (1990). La résolution de problèmes arithmétiques : bilan et perspectives. *Math école*, *141*, 3-14.

Cartier, L. (2008). A propos du théorème d'Euler et des parcours eulériens dans les graphes. *Petit x*, (76.), 27-53.

Cavagnaro, C., Haight, W. T. *et al.* (2001). *Dictionary of classical and theoretical mathematics* (T. 3). CRC Press.

Chanudet, M., Coppé, S., Gandit, M. & Moulin, M. (2017). Analyse des interactions didactiques dans une perspective d'évaluation formative. *19 ème école d'été de didactique des mathématiques*. https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-02021853

Chavot, P. & Masseran, A. (2010). (Re) penser les sciences et les techniques en Europe. *Questions de communication*, (17), 7-18.

Chen, H.-H., Hu, W.-G., Lai, D.-J. & Lin, S.-S. (2014). Nonemptiness problems of Wang tiles with three colors. *Theoretical Computer Science*, *547*, 34-45.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Actes de l'UE de la Rochelle*, 91-118.

Chevallard, Y. (2010). La didactique, dites-vous ? *Éducation et didactique*, *4*(1), 139-148.

Church, A. (1936). A note on the Entscheidungsproblem. *The journal of symbolic logic*, *1*(1), 40-41.

Contenot, F. (2011). La médiation au service de la confluence du musée et de la bibliothèque.

Cook, S. A. (1971). The complexity of theorem-proving procedures. *Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing*, 151-158.

Culik, K. & Kari, J. (1996). An aperiodic set of Wang cubes. *J. UCS The Journal of Universal Computer Science* (p. 675-686). Springer.

Culik II, K. (1996). An aperiodic set of 13 Wang tiles. *Discrete Mathematics*, *160*(1-3), 245-251.

Da Ronch, M. (2018a). Activité mathématique dans un contexte d'exposition avec manipulations d'objets : utopie ou réalité ? In M. Abboud (Éd.), *Mathématiques en scène des ponts entre les disciplines – Actes du colloque EMF 2018* (p. 1368-1376).

Da Ronch, M. (2018b). *Activité mathématique dans un contexte d'exposition avec manipulations d'objets : utopie ou réalité* (mém. de mast.). Université Grenoble Alpes.

Da Ronch, M. (2019a). Fait-on des mathématiques en résolvant des "casse-têtes" ? L'exemple des Tours de Hanoï dans un dispositif d'exposition. *Petit x*, *109*, 49-73. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02984756

Da Ronch, M. (2019b). Un problème de pavage : entre jeu et activité mathématique. *Revue de Mathématiques pour l'école*, *231*, 46-55. https://doi.org/https://doi.org/10.26034/vd.rm.2019.1765

Da Ronch, M. (2020a). Activité mathématique dans des dispositifs de médiation : le cas des “ problèmes ” issus de mathématiques discrètes. *Séminaire de Recherche en Didactique et Épistémologie des Mathématiques, Institut* *montpelliérain Alexander Grothendieck*. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03694792

Da Ronch, M. (2020b). Atelier - Du problème de Wang vers une nouvelle situation de recherche. *GT Cognition et apprentissages mathématiques, Institut montpelliérain Alexander Grothendieck*. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03694800

Da Ronch, M. (2020c). *Épistémologie et histoire des pavages apériodiques à partir du problème de Wang.* (Rapport interne). Institut Fourier, Université Grenoble Alpes. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03251099

Da Ronch, M. (2020d). Le problème de Wang, expérimentation dans les classes. *Séminaire de l'IREM de l'Université Grenoble Alpes, du 2 au 3 octobre 2020, Autrans*.

Da Ronch, M. (2021). Activité mathématique : étude des conditions et des contraintes de viabilité en contexte d'exposition. *Nouvelles perspectives en didactique : le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure. Actes de la 20e école d'été de didactique des mathématiques Autrans – du 13 au 19 octobre 2019* (p. 497-507). La pensée Sauvage : Grenoble. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03416682

Da Ronch, M. & Gandit, M. (2021). Expérimenter, questionner et prouver en mathématiques : le cas du problème de Wang. *XXVIIe Colloque CORFEM pour les professeurs et formateurs de mathématiques*. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03261634

Da Ronch, M., Gandit, M. & Gravier, S. (2020). Du problème de Wang vers une nouvelle situation de recherche pour la classe. *Repères IREM*, *121*, 77-105. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03030861

Da Ronch, M., Gandit, M. & Gravier, S. (2021). Learning of the scientific approach at university : the case of research situations from problems of discrete mathematics. *14th International Congress on Mathematical Education, July 11 to 18, 2021, Shanghai, China (ICME14)*. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03285073

Da Ronch, M., Gandit, M. & Gravier, S. (2023). Modèle pour repérer l'activité de sujets en résolution de problème. *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques : la preuve, la modélisation et les technologies numériques. Actes de la XXIe école d'été de didactique des mathématiques, Saint Marie De Ré, 18 au 24 Octobre 2021* (p. 60-69). https://hal.science/hal-03416749

Dasgupta, S., Papadimitriou, C. H. & Vazirani, U. V. (2008). *Algorithms*. McGraw-Hill Higher Education New York.

Debrabant, P. & Busser, A. (2018). Du carreau de Truchet au carreau de Wang : atteindre l'atome de l'apériodique et du calculable. *Images des Mathématiques, CNRS*.

Derouet-Jourdan, A., Kaji, S. & Mizoguchi, Y. (2019). A linear algorithm for Brick Wang tiling. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, *36*(3), 749-761.

Dias, T. (2008). *La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage* (thèse de doct.). Université Claude Bernard - Lyon I. https://theses.hal.science/tel-00635724

Durand-Guerrier, V. (1996). *Logique et raisonnement mathématique : défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication* (thèse de doct.). Université Claude Bernard Lyon.

Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one ? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in mathematics*, *53*, 5-34.

Ebbinghaus, H.-D. (1982). Undecidability of some domino connectability problems. *Mathematical Logic Quarterly*, *28*(22-24), 331-336.

Eidelman, J. & Schiele, B. (1992). Culture scientifique et musées. *Sociétés contemporaines*, *11*(1), 189-215.

Eigen, S., Navarro, J. & Prasad, V. S. (2007). An aperiodic tiling using a dynamical system and Beatty sequences. *Dynamics, ergodic theory, and geometry*, *54*, 223-241.

Esclafit, P. (2020). *Approche didactique d'une situation de médiation entre mathématiques et informatique. Approche didactique d'une situation de médiation entre mathématiques et informatique Analyse d'un dispositif pour aborder l'apprentissage par renforcement et l'intelligence artificielle* (Mémoire de Master de Didactique des Sciences). Université de Montpellier, Université de Lyon 1 et ENS de Lyon.

Etzion-Petruschka, Y., Harel, D. & Myers, D. [Dale]. (1994). On the solvability of domino snake problems. *Theoretical Computer Science*, *131*(2), 243-269.

Euler, L. (1741). Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 128-140.

Favier, S. (2022). *Étude des processus de résolution de problèmes par essais et ajustements en classe de mathématiques à Genève* (thèse de doct.) [ID : unige :159466]. https://archive-ouverte.unige.ch/unige:159466

Ferrez, E., Floris, R. & De Marcellus, O. (2004). L'enseignement des mathématiques en 8e année dans sept pays. *Résumé des résultats de l'enquête internationale" TIMSS 1999 Video Study*.

Fiorelli, S., Audin, P., Belbachir, H., Cherix, P.-A. & Rittaud, B. (2015). Évaluer une action de vulgarisation des mathématiques. In L. Theis (Éd.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur* *enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF 2015* (p. 909-917).

Floris, R., Bertoni, M., Aymon, E., Ferrez, E. & Weiss, L. (2010). Analyse d'un dispositif expérimental de formation de formateurs d'enseignants de mathématiques. *Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation. Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone EMF2009.(Numéro spécial de la Revue Internationale Francophone), http ://fastef. ucad. sn/EMF2009/colloque. htm GT5*, 344-356.

Forest, D. (2013). Recueil de données vidéo en situation didactique : quelques éléments méthodologiques et techniques. *Recherches en didactiques*, (2), 101-119.

Frank, M. L. (1988). Problem solving and mathematical beliefs. *The Arithmetic Teacher*, *35*(5), 32-34.

Front, M. (2015). *Émergence et évolution des objets mathématiques en Situation Didactique de Recherche de Problème : le cas des pavages archimédiens du plan* (Theses 2015LYO10250). Université Claude Bernard - Lyon I. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01312266

Gálvez, G. (1985). El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria. *Unpublished doctoral dissertation. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Mexico*.

Gandit, M. (2008). *Étude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement : une ingénierie en formation* (thèse de doct.). Grenoble 1.

Gandit, M., Balicco, M.-P., Gravier, S. & Modeste, S. (2013). Petits cubes et baguettes, Instruments de compensation du handicap ou inducteurs de résolution. *Jouer ou apprendre*. https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-02021342

Gandit, M., Giroud, N. & Godot, K. (2011). Les situations de recherche en classe : un modèle pour travailler la démarche scientifique en mathématiques. *Les démarches d'investigation dans l'enseignement scientifique. Pratiques de classe, travail collectif enseignant, acquisition des élèves*, 38-51.

Gardes, M.-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres* (thèse de doct.). Université Claude Bernard - Lyon I. https://theses.hal.science/tel-00948332

Gardes, M.-L. & Durand-Guerrier, V. (2016). Designation at the core of the dialectic between experimentation and proving : a study in number theory. *First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics*. https://hal.science/hal-01337922

Garey, M. R. & Johnson, D. S. (1979). *Computers and intractability* (T. 174). freeman San Francisco.

Ghys, E. (2012). Qu'est-ce qu'un bon problème ? *Pour La Science*, (74).

Giroud, N. (2011). *Etude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe* (thèse de doct.). Université de Grenoble.

Glaeser, G. (1971). *Mathématiques pour l'élève professeur* (T. 1342). Hermann.

Glenn, J. A. & Littler, G. H. (1984). *Dictionary of mathematics*. Barnes & Noble Imports.

Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für mathematik und physik*, *38*(1), 173-198.

Godot, K. (2005). *Situations recherche et jeux mathematiques pour la formation et la vulgarisation. Exemple de la roue aux couleurs.* (thèse de doct.). Université Joseph-Fourier-Grenoble I.

Godot, K. (2012). Maths et Malice, un projet pour faire découvrir les mathématiques sur le temps du loisir. In J.-L. Dorier & S. Coutat (Éd.), *Enseignement des mathématiques et contrat social. Enjeux et défis pour le XXIe siècle – Actes du colloque EMF 2012* (p. 1895-1904).

Godot, K. (2015). Maths à modeler, des jeux pour apprendre à chercher en mathématiques. In L. Theis (Éd.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage– Actes du colloque EMF2015* (p. 918-925).

Gondran, M. (1975). Path algebra and algorithms. *Combinatorial programming : methods and applications* (p. 137-148). Springer.

Gravier, S., Payan, C. & Colliard, M. (2008). Maths à modeler. Pavages par des dominos. *Grand N*, *82*(53-68).

Grenier, D. (2012). Rôle des situations de recherche dans la vulgarisation des mathématiques. In J.-L. Dorier & S. Coutat (Éd.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (p. 1905-1913).

Grenier, D. & Payan, C. (1998). Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *RDM*, *18*(1), 59-100.

Grenier, D. & Payan, C. (2003). Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation, cahiers du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques.

Grünbaum, B. & Shephard, G. C. (1986). *Tilings and patterns*. WH Freeman & Co.

Gurevich, Y., Koryakov, I. *et al.* (1972). Remarks on Berger's paper on the domino problem. *Siberian Mathematical Journal*, *13*(2), 319-321.

Halmos, P. R. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, *87*(7), 519-524.

Hamelin, E. (2003). Développement et diffusion de la culture scientifique et technique : un enjeu national.

Hierholzer, C. & Wiener, C. (1873). Über die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren. *Mathematische Annalen*, *6*(1), 30-32.

Hilbert, D. (1902). Sur les problèmes futurs des mathématiques. *Compte rendu du deuxieme congres international des mathématiciens*, 58-114.

Hoosain, E. (2004). What are Mathematical Problems ? *Humanistic mathematics network journal*, *1*(27), 12.

Howson, A. & Kahane, J.-P. (1990). *The popularization of mathematics* (T. 5). Cambridge University Press.

Hu, W.-G. & Lin, S.-S. (2011). Nonemptiness problems of plane square tiling with two colors. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *139*(3), 1045-1059.

Itai, A. & Rodeh, M. (1978). Finding a minimum circuit in a graph. *SIAM Journal on Computing*, *7*(4), 413-423.

Itō, K. (1993). *Encyclopedic dictionary of mathematics* (T. 1). MIT press.

Jeandel, E. & Rao, M. (2015). An aperiodic set of 11 Wang tiles. *arXiv preprint arXiv :1506.06492*.

Kahr, A. S., Moore, E. F. & Wang, H. (1962). Entscheidungsproblem reduced to the AEA case. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, *48*(3), 365.

Kari, J. (1996). A small aperiodic set of Wang tiles. *Discrete Mathematics*, *160*(1-3), 259-264.

Kari, J. (2019). Lecture notes on Tilings and Patterns.

Karp, R. (1972). Reducibility among combinatorial problems. *Complexity of computer computations* (p. 85-103). Springer.

Klavžar, S. & Žerovnik, J. (1996). Algebraic approach to fasciagraphs and rotagraphs. *Discrete Applied Mathematics*, *68*(1-2), 93-100.

Knuth, D. E. (1968). Fundamental Algorithms, volume 1 of The Art of Computer Programming. *Addision Wesley, first edition*, 382-285.

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations*. Hermann.

Lévy, J.-J. (2011). Les dominos de Wang. *Quadrature*, (82), 42-46.

Lewis, H. R. (1978). Complexity of solvable cases of the decision problem for the predicate calculus. *19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (sfcs 1978)*, 35-47.

Lewis, H. R. & Papadimitriou, C. H. (1997). *Elements of the Theory of Computation*. Prentice Hall.

Margolinas, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations.

Monnier, A., Weiss, L., de Marcellus, O., Erard, S. & Staeger, P. (2008). Les observations vidéo peuvent-elles renforcer les liens entre théorie et pratique ? Une expérience dans la formation initiale des maîtresses de l'enseignement secondaire genevois (IFMES). *Revue des HEP de Suisse romande et du Tessin*, *10*, 175-193.

Mottet, G. (1997). *La vidéo-formation : autres regards, autres pratiques : la vidéo, outil de construction des compétences professionnelles des enseignants*. Editions L'Harmattan.

Myers, D. (1979). Decidability of the tiling connectivity problem. Abstract 79T-E42. *Notices Amer. Math. Soc*, *195*(26), 177-209.

Nimier, J. (1989). *Entretiens avec des mathématiciens : A. Lichnérowicz, C. Berge, A. Joyal, N. Kuiper, B. Malgrange, C. Pisot, J. Riguet, R. Thom :(l'heuristique mathématique)*. Institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques, Lyon.

Ouvrier-Buffet, C. (2003). *Construction de définitions/construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques* (thèse de doct.). Université Joseph-Fourier-Grenoble I.

Ouvrier-Buffet, C. (2006). Exploring mathematical definition construction processes. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(3), 259-282.

Pelay, N. (2011). *Jeu et apprentissages mathématiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique* (Theses). Université Claude Bernard - Lyon I. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00665076

Pelay, N. (2018). Esquisse d'un modèle d'analyse pour les actions de diffusion des mathématiques. In M. Abboud (Éd.), *Mathématiques en scène des ponts entre les disciplines – Actes du colloque EMF 2018* (p. 1317-1324).

Pelay, N. & Artigue, M. (2016). Vers une approche didactique des activités de diffusion et vulgarisation des mathématiques, et de leurs synergies possibles avec les activités scolaires. *Actes du séminaire national de l'ARDM*.

Pelay, N. & Boissiere, A. (2015). Vulgarisation et enseignement des mathématiques dans le jeu Dobble. In L. Theis (Éd.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015* (p. 944-956).

Pelay, N. & Mercat, C. (2012). Quelle modélisation didactique de la vulgarisation des mathématiques ? In J.-L. Dorier & S. Coutat (Éd.), *Enseignement des mathématiques et contrat social, Enjeux et défis pour le 21ème siècle – Actes du colloque EMF 2012* (p. 1914-1925).

Perrin, D. (2007). L'expérimentation en mathématiques. *Petit x*, *73*(6), 34.

Poisard, C. (2005). *Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques, le cas des instruments à calculer* (thèse de doct.). Université de Provence-Aix-Marseille I.

Poisard, C. (2018). La didactique des mathématiques pour décrire et analyser des activités d'animation scientifique. In M. Abboud (Éd.), *Actes du colloque EMF 2018* (p. 1325-1332).

Poizat, B. (1980). Une théorie finiement axiomatisable et superstable. *Groupe d'étude de théories stables*, *3*, 1-9.

Pólya, G. (1967). *La découverte des mathématiques*. Dunod.

Priolet, M. (2008). *Enseignement et apprentissage de la résolution de problèmes mathématiques. Le cas des problèmes numériques au cycle 3 de l'école primaire en France. Approches didactique et ergonomique.* (thèse de doct.).

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies ; approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

Radford, L. (1996). La resolution de problemes : comprendre puis resoudre ? *Bulletin AMQ*, *36*(3), 19.

Rey, A. (2011). *Dictionnaire historique de la langue française*. Le robert.

Rigo, M. (2009). Théorie des graphes. *Université de Liège*.

Rittaud, B. (2015). Pour une «vulgaristique» des mathématiques. In L. Theis (Éd.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage–Actes du colloque EMF2015* (p. 957-962).

Rittaud, B. & AlPaGe. (2018). La Tour de Hanoï. In M. Abboud (Éd.), *Mathématiques en scène des ponts entre les disciplines – Actes du colloque EMF 2018* (p. 1334-1342).

Robert, A. & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, *2*(4), 505-528.

Robert, A. & Vivier, L. (2013). Analyser des vidéos sur les pratiques des enseignants du second degré en mathématiques : des utilisations contrastées en recherche en didactique et en formation de formateurs–quelle transposition ? *Éducation et didactique*, *7*(7-2), 115-144.

Robinson, R. (1967). Seven polygons which permit only nonperiodic tilings of the plane. *Notices Amer. Math. Soc*, *14*, 835.

Robinson, R. (1971). Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane. *Inventiones mathematicae*, *12*(3), 177-209.

Robinson, R. (1978). Undecidable tiling problems in the hyperbolic plane. *Inventiones mathematicae*, *44*(3), 259-264.

Sackur, C., Drouhard, J.-P., Assude, T., Paquelier, Y. & Maurel, M. (2005). L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *25*(1), 57-90.

Savelsbergh, M. W. & van Emde Boas, P. (1984). *BOUNDED TILING, an alternative to SATISFIABILITY ?* Centrum voor Wiskunde en Informatica.

Savitch, W. J. (1970). Relationships between nondeterministic and deterministic tape complexities. *Journal of computer and system sciences*, *4*(2), 177-192.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically : Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics.

Schwartzman, S. (1994). *The words of mathematics : An etymological dictionary of mathematical terms used in English*. MAA.

Schwarzentruber, F. (2019). The Complexity of Tiling Problems. https://doi.org/10.48550/ARXIV.1907.00102

Semri, A. (2012). Les mathématiques discrètes comme moyen d'apprentissage et de vulgarisation des mathématiques. In J.-L. Dorier & S. Coutat (Éd.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (p. 1939-1952).

Sensevy, G. & Mercier, A. (2007). *Agir ensemble : l'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. Presses universitaires de Rennes.

SNCSTI. (2017). *Stratégie nationale de culture scientifique, technique et industrielle*. https://cache.media.enseignementsup-recherche.gouv.fr/file/CSTI/57/3/SNCSTSI_728573.pdf

Thompson, A. G. (1989). Learning to teach mathematical problem solving : Changes in teachers' conceptions and beliefs. *The teaching and assessing of mathematical problem solving*, *3*, 232-243.

Thurston, W. P. (1995). On proof and progress in mathematics. *For the learning of mathematics*, *15*(1), 29-37.

Tiberghien, A. (2015). L'usage de la vidéo en formation : une approche didactique. In L. Ria (Éd.), *Former les enseignants au XXIe siècle*. de Boeck.

Tricot, A., Plégat-Soutjis, F., Camps, J.-F., Amiel, A., Lutz, G. & Morcillo, A. (2003). Utilité, utilisabilité, acceptabilité : interpréter les relations entre trois dimensions de l'évaluation des EIAH.

Trouvé, T. (2021). *Autour de la didactique des pavages de Wang* (Mémoire de magistère). Université de Grenoble Alpes.

Turing, A. M. (1936). On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *J. of Math*, *58*(345-363), 5.

Vermersch, P. (2019). *L'entretien d'explicitation*. ESF Sciences humaines.

Villani, C., Torossian, C. & Dias, T. [Thierry]. (2018). 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques.

Wang, H. (1961). Proving theorems by pattern recognition—II. *Bell system technical journal*, *40*(1), 1-41.

Wang, H. (1962). An unsolvable problem on dominoes. *Harvard Computation Laboratory, Technical Report BL30 (II-15)*.

Wang, H. (1975). Notes on a class of tiling problems. *Fundamenta Mathematicae*, *82*(4), 295-305. http://eudml.org/doc/214668

Wang, H. (1990). Computation, Logic, Philosophy A Collection of Essays.

Wantzel, P.-L. (1837). Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, *2*(1), 366-372.

Xenofontos, C. & Andrews, P. (2014). Defining mathematical problems and problem solving : Prospective primary teachers' beliefs in Cyprus and England. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 279-299.

Žerovnik, J. (1999). Deriving formulas for domination numbers of fasciagraphs and rotagraphs. *International Symposium on Fundamentals of Computation Theory*, 559-568.

Annexes

Annexe A

Annexe du chapitre VI

1 État des lieux rétrospectif et réactualisé autour des acteurs indirects de la diffusion mathématique

Les *acteurs indirects* de la diffusion scientifique sont en nombre et pourtant la place occupée par les mathématiques à travers les différents médias de masse est quasi-inexistante dans certains secteurs. Godot (2005) a par exemple montré que les différentes émissions télévisuelles concernant la diffusion scientifique [1] auprès du grand public étaient pour la plupart axées sur le domaine de la santé, de la médecine et des « sciences expérimentales » comme la biologie. Cette enquête a permis de montrer qu'aucune émission télévisuelle n'était, au début des années deux mille, réellement dédiée aux mathématiques.

> Au regard de cette étude, nous pouvons conclure que même si la télévision propose plusieurs programmes autour des sciences, qu'elle a pour mission de diffuser la culture scientifique, très peu voire aucun programme n'aborde les mathématiques (*ibid.*, p. 260).

Ce fait est d'ailleurs confirmé par Pelay (2011) et semble être encore une réalité de nos jours. En effet d'après nos recherches, actuellement, il ne semble pas exister d'émission de télévision consacrée exclusivement à cette discipline. Seul un documentaire sur « le grand mystère des mathématiques » a été proposé en 2016 par Arté [2]. D'ailleurs, la plupart des programmes axés de nos jours sur la diffusion scientifique mettent en avant plutôt les domaines déjà évoqués, comme la santé et la biologie, auxquelles viennent s'agréger des émissions liées à l'environnement, à la nature et plus récemment à l'enseignement disciplinaire.

1. 14 émissions télévisuelles sur la diffusion scientifique ont été recensées dans son travail de thèse, la plupart ne sont plus diffusées ou ont été remplacées par d'autres.
2. https ://www.youtube.com/watch ?v=A2vL7JCeetc

Effectivement, nous pouvons noter des initiatives sporadiques dues au contexte sanitaire actuel, comme par exemple la mise en place par le groupe de France Télévision d'une émission, le *club Lumni* [3], diffusée sur les chaînes du groupe. Sa vocation première est d'aider les élèves — du primaire au lycée — dans leurs apprentissages scolaires en cette période particulière, et les mathématiques y sont présentes.

En outre, Godot (2005) a également montré que les mathématiques occupaient une place très discrète dans les émissions de radiophonie française au début des années 2000. En s'appuyant sur la programmation régulière d'émissions scientifiques de France Culture, l'auteure a montré que sur les 321 émissions diffusées entre 2002 et 2005, seules 16 portaient initialement sur les mathématiques, soit moins de 5% des émissions scientifiques diffusées par le groupe durant cette période. En 2021, France Culture propose 6 émissions régulières autour des sciences [4]. Afin de comparer et de réactualiser l'étude menée par Godot (*ibid.*), nous avons alors relevé à travers les différents titres ou résumés d'émissions, ceux qui semblent avoir un lien étroit avec les mathématiques. Notre choix s'est porté sur 4 émissions — les autres ont été exclues car elles relevaient de domaines très spécifiques. Dans le tableau A.1 nous rapportons sur une période de trois, voire quatre années, le nombre d'émissions sur chacun des programmes ainsi que le nombre d'émissions et leur pourcentage, axés sur la diffusion des mathématiques. Les résultats montrent que même si les offres autour de la diffusion scientifique ont augmenté de manière certaine, passant de 321 émissions entre 2002 et 2005 à plus de 1029 émissions entre 2016 et 2020 [5], la place occupée par les mathématiques en est amoindrie. Le tableau A.1 montre en effet que la plupart des émissions qui existent actuellement [6] — *Le journal des sciences*, *La Méthode scientifique*, *La conversion scientifique* — proposent une offre quasiment inexistante pour les mathématiques ($\leqslant 3\%$). Nous renvoyons la lectrice ou le lecteur à prochaine section de cette annexe.

3. https://www.lumni.fr/dossier/le-club-lumni

4. *Carbone 14, le magazine de l'archéologie*, *La Conversation scientifique*, *Dernières nouvelles de l'univers*, *Les idées claires*, *Le Journal des sciences et pour finir La Méthode scientifique*.

5. En effet, comme nous n'avons pas pris en compte certaines émissions, considérant qu'elles étaient trop éloignées du domaine des mathématiques, le nombre d'émissions scientifiques diffusées par France Culture est donc supérieur aux 1029 émissions recensées.

6. Nous n'avons pas la prétention d'être exhaustif, il existe bien entendu d'autres émissions comme par exemple *La Terre au carré* diffusée sur France Inter...

Période	Émission	Nbre total (**Maths**)	%
2017-2020	Le Journal des sciences	241 (**0**)	0%
2016-2020	La Méthode scientifique	660(**15**)	2%
2017-2020	La conversion scientifique	128(**4**)	3%
2013-2016	Continent science	145(**9**)	6%

Tableau A.1 – *Emissions radiophoniques diffusées par France Culture traitant des sciences et leur pourcentage d'émissions sur les mathématiques.*

Dès le début des années 2000, Godot (*ibid.*) a en outre pointé, à partir d'une étude sur la publication des sciences dans la presse généraliste, les mathématiques comme étant l'une des disciplines les moins représentées.

> Les thèmes les moins présents, à l'intérieur des discours médiatiques portant sur la science, sont les mathématiques [...] (Bushs, 2004 citée par *ibid.*, p. 267).

À l'époque, l'auteure affirmait tout de même que les mathématiques y étaient présentes sous forme de jeux en prenant exemple sur la rubrique *Affaire de logique* éditée dans le journal *Le Monde*. Actuellement, outre la diffusion de cette rubrique qui semble perdurer depuis une vingtaine d'années, ce même journal recense pas moins de 60 articles sur les mathématiques entre 2018 et le début de l'année 2021. Ce nombre peut sembler dérisoire au regard du nombre d'articles publiés dans ce journal mais il a tout de même le mérite d'exister.

Au-delà de la presse généraliste, on retrouve également des journaux spécialisés dans la diffusion des sciences et en particulier des mathématiques pour le grand public comme les revues *Cosinus* et *Tangente* déjà mentionnées par Godot (*ibid.*) et Pelay (2011). D'autres revues existaient également à l'époque et sont encore présentes de nos jours comme par exemple la revue *Pour la science* qui existe depuis 1996 et qui publie chaque année une dizaine de numéros. Cette revue a pour vocation première la diffusion de l'information scientifique internationale claire et accessible à tous, écrite par les chercheurs eux-mêmes [7]. En particulier certains de ces numéros traitent entièrement ou en partie des mathématiques ou de disciplines connexes telles que l'informatique et la logique. On trouve également des revues à destination de publics plus spécifiques comme les étudiants ou les enseignants mais qui se destinent également à tout amateur de mathématiques, la revue *Quadrature* [8] en est un exemple. Toutefois, comme il est spécifié sur le site de la revue, la plupart des articles requièrent des connaissances en mathématiques, ce qui suggère que certains de ces articles

7. https ://www.pourlascience.fr
8. https ://www.quadrature.info/

sont difficilement abordables *ex nihilo*. Au début du XXIe siècle, le rapport Hamelin (2003) qui portait, rappelons-le, sur le développement et la diffusion de la culture scientifique et technique, mentionnait explicitement le fait que le marché des éditeurs français sur les sciences était orienté « essentiellement sur les ouvrages d'enseignement [...] et, dans une moindre mesure, sur les ouvrages à destination du monde professionnel » (p. 20). En revanche, on note tout de même, à l'instar de Godot (2005), une variété d'ouvrages de différents types portant sur les mathématiques à destination du grand public comme

- *Le grand roman des maths* de Mickaël Launay (livre) ;
- *Théorème Vivant* de Cédric Villani (livre) ;
- Les oscillations de Joseph Fourier de Emmanuel Cerisier et Emmanuel Marie sous la direction d'Hervé Pajot (docu-bande dessinée) ;
- et bien d'autres...

Il faut également remarquer que les *acteurs indirects* de la diffusion scientifique ne s'arrêtent pas au paysage audiovisuel français, ni même à la presse généraliste ou spécialisée, mais s'étend également à travers les réseaux actuels de communication et plus particulièrement via Internet. Pour Godot (*ibid.*), Internet est un vecteur de diffusion de connaissances et les mathématiques, comme tout autre discipline, y sont présentées sous des formes diverses et variées. Son étude, bien que non exhaustive face à la multiplicité des sources d'information, montre tout de même un invariant autour des jeux mathématiques, qu'elle illustre dans son travail à l'aide d'exemples explicites extraits de nombreux sites (voir *ibid.*, pp. 263–266). Actuellement, par exemple, la Structure Fédérative de Recherche (SFR) *Maths à Modeler* met à disposition du plus grand nombre une valise virtuelle de jeux combinatoires issus de différentes situations de recherche analysées par les membres de son équipe dans un souci de démocratisation et de dissémination de leurs travaux à plus grande échelle [9]. Pelay (2011), quant à lui, distingue principalement trois sites particuliers « car destinés spécifiquement à la diffusion d'une culture mathématique [...] » (p. 26) : *CultureMath*, *Image des Maths* et *Sesamath*.

On pourrait également citer les expositions virtuelles et interactives proposées par *IMAGINARY* [10] ou encore l'exposition virtuelle et interactive s'intitulant *Mathématiques expérimentales* [11] qui participe, elle aussi, à la diffusion de cette culture mathématique.

- *IMAGINARY.* Cet organisme à but non lucratif vise depuis 2007 à promouvoir les mathématiques contemporaines dans leur diversité en proposant une variété de contenus : galeries d'images, expositions interactives. Ceci

9. https://projet.liris.cnrs.fr/~mam/valise/
10. https://imaginary.org/fr/
11. https://www.experiencingmaths.org/

dans le but d'enrichir les ressources proposées auprès du grand public, que cela soit pour les scolaires, les musées ou d'autres événements médiatiques.

- *Mathématiques expérimentales.* Suite à l'exposition universelle *Pourquoi les mathématiques ?* réalisée en 2004 par Centre Science grâce au soutien de l'UNESCO, on retrouve en complément depuis 2010, une exposition virtuelle et interactive intitulée *Mathématiques expérimentales*. Cette exposition virtuelle propose plus de 200 situations mathématiques autour de 10 thèmes. Elle s'adresse en particulier au public scolaire mais aussi à toutes celles et tous ceux qui s'intéressent aux mathématiques et aux sciences en général.

Outre les différentes sources mentionnées ci-avant, on peut également mettre en évidence des initiatives pilotées par l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP) et le réseau des Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) qui, grâce à l'enrichissement des ressources mises à disposition sur leur site Internet, permettent une large diffusion, même si ces ressources sont, *a priori*, destinées à une même communauté d'intérêt et de pratique. Bien entendu ce ne sont pas les seules, puisque la plupart des institutions possèdent de nos jours un site qui leur est dédié. Notons tout de même que dans la mission des IREM, il y a une mission vulgarisation et diffusion des mathématiques, qui se retrouve spécifiquement dans les derniers rapports d'activités du réseau. En outre, on retrouve également d'autres formes de canaux de diffusion à travers des initiatives personnelles de vulgarisateurs et de mathématiciens. [12] Il s'agit par exemple de pages personnelles académiques, de blogs , ou encore de chaînes Youtube. Récemment, à l'initiative d'*Animath* — que nous présenterons dans la prochaine section — une nouvelle émission sur les mathématiques intitulée *Parlons Maths* [13] est diffusée en direct via son site Internet. Des étudiants, enseignants et chercheurs sont invités à faire découvrir le monde des mathématiques telles qu'elles sont pratiquées, et cela, pour un large public (scolaire ou non) [14].

La prochaine section présente les données recueillies en lien avec le tableau A.1 de cette annexe.

12. Par exemple, Jean-Paul Delaye, Etienne Ghys et Cédric Villani du côté de la recherche, Mickaël Launay et Yvan Monca du côté des vulgarisateurs mathématiques.

13. https ://parlons-maths.fr/

14. Notons également qu'il existe un site français, https://www.florilege-maths.fr/, lancé en 2018 qui regroupe « toutes » les actions de diffusion autour des mathématiques dans un souci de faciliter leur accessibilité (expositions, conférences, films, défis, blog, web tv, site web, etc.).

2 Données récoltées pour l'étude (voir tableau A.1, p. 319)

2.1 Continent science

De 2013 à 2016, cette émission se déroule chaque lundi, de 14h à 15h pour comprendre les sciences à travers les femmes et les hommes qui les font.

Quel est le fondement de la démarche scientifique, quels sont ses ressorts, ses motivations, quelle que soit la discipline : chaque semaine un entretien avec un chercheur différent. Comment commence-t-on et construit-on une carrière scientifique ? Il existe un fond commun dans l'attitude scientifique. Mais si l'on passe d'une discipline à l'autre, alors, qu'est-ce qui fait le spécifique d'un biologiste ? D'un spécialiste des volcans, d'un paléontologue, ou d'un physicien théoricien ? Tous ceux qui précèdent sont des découvreurs.Mais il y a l'immense corps de ceux qui s'activent dans les applications de la Science, qui prennent des brevets pour certains procédés, conçoivent les trains à grande vitesse, les fusées ou les plantes transgéniques. Quelles sont leurs opinions, leurs convictions sur les conséquences sociales de leur travail ?

Il y a environ 45 émissions par saison et la saison 2016 a été de 6 émissions, soit un total de 141 en un peu plus de 3 ans avec seulement 9 traitant des mathématiques.

- Etienne Ghys, mathématicien et François Sauvageot, professeur de mathématiques
- Le « mouvement brownien » et les mathématiques
- Prépa bac : Les mathématiques
- Andreï Kolmogorov, l'Euclide du XXe siècle
- La préparation au bac blanc en mathématiques
- Maths dialoguées, maths exemplifiées (vulgarisation)
- Des Bosses et des maths
- Le goût des mathématiques (semaine Bac Blanc)
- Les mathématiques et l'expérience

2.2 Le Journal des sciences

Depuis 2016 cette émission est proposée tous les vendredis de 16h à 16h10. Nous nous sommes focalisés sur la période 2017 à décembre 2020. Le cadence des émissions a augmenté à partir de 2019. Chaque vendredi, Zoé Sfez nous livre un journal couvrant l'actualité des sciences et de la recherche. Découvertes, publications… il balaye l'essentiel de ce qu'il faut retenir.
De 2017-2018 : 45 émissions avec 0 émission de mathématiques.
De 2018-2019 : 45 émissions avec 0 émission de mathématiques.

De 2019-2020 151 émissions avec 0 de mathématiques.

2.3 La Méthode scientifique

Cette émission se déroule du lundi au vendredi de 16h à17h. Elle commence en 2016 avec une interruption de l'été 2017 à l'été 2018. Nous avons regardé les saisons 2016-2017, 2018-2019 et 2019-2020.

Chaque jour, une heure de savoir autour des sciences, toutes les sciences, et sur les problématiques éthiques, politiques, économiques et sociales qui font l'actualité de la recherche. De l'astrophysique à la paléontologie, de la médecine à l'épistémologie, la Méthode Scientifique enfile sa blouse, remonte ses manches et vous propose chaque jour une heure de savoir autour des sciences, toutes les sciences, et sur les problématiques éthiques, politiques, économiques et sociales qui font l'actualité la recherche. Avec du lundi au vendredi des grandes thématiques pour séquencer la semaine : Humain/s, Planète/s, Futur/s, Histoire/s et une table ronde consacrée à l'actualité scientifique et au dialogue entre culture et fiction. Jusqu'à preuve du contraire.

De 2016 à 2017 : 220 émissions avec 6 émission concernant les mathématiques.

- Echecs et maths
- Mathématiques, mention France Culture : concerne l'enseignement
- Statistiques : la loi des grands de ce nombre
- Claire Voisin : la géométrie dans toutes ses dimensions
- Peut-on calculer le hasard ?
- L'héritage d'Alexandre Grothendieck

De 2018 à 2019 : 202 émissions avec 3 émissions concernant les mathématiques.

- Bac Mathématiques, mention France Culture
- L'odyssée de Pi
- Bourbaki, le centre des mathématiciens disparus

De 2019 à 2020 : 220 émissions avec 5 émissions concernant les mathématiques.

- Infini, quand l'homme apprit à compter au-delà
- l'odyssée de Pi
- La déraisonnable efficacité des mathématiques
- Sophie Germain, la boss des maths
- Sommeil unihémishérique, saut quantique et mathématiques symboliques.

Au total, on retrouve de 2016 à 2020, 642 émissions dont 14 concernant les mathématiques.

2.4 La conversion scientifique

Cette émission se déroule le samedi de 16h à 17h depuis 2012, nous nous sommes focalisés sur la période de 2017 à 2020.

Un scientifique s'entretient avec un autre scientifique, ou avec un philosophe, un artiste, un historien, un géographe, un marcheur, un alpiniste, un écrivain, etc. Qu'est-ce qu'une conversation scientifique ? Elle advient bien sûr dès qu'un scientifique parle avec un autre scientifique. Mais aussi et surtout lorsque, en vertu d'une politesse de l'esprit, il s'entretient avec un philosophe, un artiste, un historien, un géographe, un marcheur, un alpiniste, un écrivain, plus généralement avec un homme ou avec une femme.

De 2017 à 2018 : 43 émissions avec 1 émission concernant les mathématiques.

- Les mathématiques font-elles partie du monde réel ?

De 2018 à 2019 : 43 émissions avec 0 émission sur les mathématiques.

De 2019 à 2020 : 42 émissions avec 3 émissions concernant les mathématiques dont une qui a été répétée 2 fois.

- La mathématique et ses vestiges
- La mathématique et ses vestiges
- Quelle est cette langue que parlent les mathématiciens ?

Au total, on retrouve durant la période de 2017 à 2020, 128 émissions dont 4 émissions sur les mathématiques.

Une synthèse de ce travail est donnée dans la première section de cette annexe et les résultats sont présentés dans le tableau A.1, p. 319.

Annexe B

Annexe du chapitre V

1 Transcription relatif à l'exemple V.7, p. 66

[1]

— [s_1] On va essayer de positionner le trou ici.
— [s_2] D'accord.

[2]

— [s_1] On est obligé de positionner ce domino comme ça pour recouvrir cette case.

[3]

— [s_1] Non, tu vois bien que pour recouvrir la case en bas à gauche le domino doit être dans l'autre sens.
— [s_2] Oui tu as raison je n'avais pas vu. Il faut que je l'enlève alors ?
— [s_1] Oui sinon on ne pourra pas recouvrir la case du coin.
— [s_2] D'accord.

[4]

— [s_2] Là aussi on est obligé de mettre le domino ici... non ?
— [s_1] Oui comme avant.
— [s_2] D'accord.
— [s_1] Mets le horizontalement.
— [s_2] Oui.

[5]

— [s_1] C'est fini.

— [s_2] Ah bon mais on n'a pas recouvert toutes les cases.
— [s_1] Oui, mais c'est impossible dans cette configuration.
— [s_2] Mais pourquoi ? Je suis sûr qu'on peut y arriver, on devrait ressayer.
— [s_1] Non, on a été obligé de positionner les dominos car à chaque fois il y avait une case coincée à recouvrir.
— [s_2] Hmmm... ok.
— [s_1] On va changer le positionnement du trou pour voir si cela change.
— [s_2] Si tu veux.

Annexe C

Annexe du chapitre IX : compléments mathématiques liés à des instances spécifiques

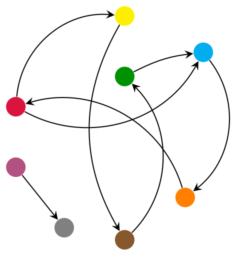
1 Le cas de la bande $\mathcal{B}_1$ avec des instances spécifiques

Figure C.1 – *Rappel de la collection $\mathcal{T}$ de huit tuiles pour la situation de la bande bi-infinie de hauteur $h = 1$ (voir p. 236).*

Nous verrons ci-après qu'il existe uniquement des circuits de longueur $l(\mathcal{C}_1) = 3$ ou $l(\mathcal{C}_1) = 6$.

Pour dénombrer le nombre de circuits pour une longueur fixée, il suffit, à partir de la représentation des tuiles sous la forme d'un graphe orienté, de construire la matrice d'adjacence binaire $\mathscr{A}$ d'ordre huit et de calculer sa puissance k-ième pour $k = \{1, \ldots, 7\}$. Ainsi, s'il existe un circuit de longueur $l(\mathcal{C}) = k$, il suffit de vérifier pour tout $i \in \{1, \ldots, 8\}$ si les coefficients $(a_{ii})^k$ de la matrice $\mathscr{A}^k$ sont non nuls.

Nous représentons le graphe orienté $G(V, A)$ associé à la collection $\mathcal{T}$ décrite précédemment (voir aussi la figure IX.17 (p. 236) et sa matrice d'adjacence (figure C.2).



$$\mathscr{A} := \begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccccc} s({\color{red}\bullet}) & s({\color{yellow}\bullet}) & s({\color{cyan}\bullet}) & s({\color{green}\bullet}) & s({\color{orange}\bullet}) & s({\color{brown}\bullet}) & s({\color{magenta}\bullet}) & s({\color{gray}\bullet}) \end{array} \\
\hline
\begin{array}{c} s({\color{red}\bullet}) \\ s({\color{yellow}\bullet}) \\ s({\color{cyan}\bullet}) \\ s({\color{green}\bullet}) \\ s({\color{orange}\bullet}) \\ s({\color{brown}\bullet}) \\ s({\color{magenta}\bullet}) \\ s({\color{gray}\bullet}) \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

***Figure* C.2 –** *Graphe $G(V,A)$ associé à la collection $\mathcal{T}$ et sa matrice d'adjacence $\mathscr{A}$.*

En calculant, à l'aide d'un logiciel de calcul formel, les différentes puissances successives de la matrice $\mathscr{A}$, on constate qu'il existe des circuits (non nécessairement élémentaires) dans G de longueur $l(C) = 3$ et $l(C) = 5$. En revanche, lorsque $k = 1, 2, 4, 5$ ou 7, il n'existe pas de circuit car pour tout $k \in \{1, 2, 4, 5, 7\}$ et $i \in \{1, ..., 8\}$, $(a_{ii})^k = 0$. Pour dénombrer le nombre de circuits, il suffit donc de prendre la trace tr de $\mathscr{A}^3$ et $\mathscr{A}^6$. On obtient donc $tr(\mathscr{A}^3) = 3$ et $tr(\mathscr{A}^6) = 9$. Il y a ainsi douze circuits non nécessairement élémentaires et donc *a fortiori*, douze circuits non nécessairement élémentaires de tuiles pavant $\mathfrak{B}_1$.

$$\mathscr{A}^3 = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \qquad
\mathscr{A}^6 = \begin{pmatrix}
2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Circuit de G	Circuit de tuiles de $\mathcal{T}$	Élémentaire
$< s({\color{red}\bullet})s({\color{cyan}\bullet})s({\color{orange}\bullet}) >$	$< \tau_5\tau_3\tau_6 >$	OUI
$< s({\color{cyan}\bullet})s({\color{orange}\bullet})s({\color{red}\bullet}) >$	$< \tau_3\tau_6\tau_5 >$	OUI
$< s({\color{orange}\bullet})s({\color{red}\bullet})s({\color{cyan}\bullet}) >$	$< \tau_6\tau_5\tau_3 >$	OUI
$< s({\color{red}\bullet})s({\color{yellow}\bullet})s({\color{brown}\bullet})s({\color{green}\bullet})s({\color{cyan}\bullet})s({\color{orange}\bullet}) >$	$< \tau_1\tau_4\tau_7\tau_2\tau_3\tau_6 >$	OUI
$< s({\color{red}\bullet})s({\color{cyan}\bullet})s({\color{orange}\bullet})s({\color{red}\bullet})s({\color{cyan}\bullet})s({\color{orange}\bullet}) >$	$< \tau_5\tau_3\tau_6\tau_5\tau_3\tau_6 >$	NON

$< s(\textcolor{yellow}{\bullet})s(\textcolor{brown}{\bullet})s(\textcolor{green}{\bullet})s(\textcolor{cyan}{\bullet})s(\textcolor{orange}{\bullet})s(\textcolor{red}{\bullet}) >$	$< \tau_4\tau_7\tau_2\tau_3\tau_6\tau_1 >$	OUI
$< s(\textcolor{cyan}{\bullet})s(\textcolor{orange}{\bullet})s(\textcolor{red}{\bullet})s(\textcolor{yellow}{\bullet})s(\textcolor{brown}{\bullet})s(\textcolor{green}{\bullet}) >$	$< \tau_3\tau_6\tau_1\tau_4\tau_7\tau_2 >$	OUI
$< s(\textcolor{cyan}{\bullet})s(\textcolor{orange}{\bullet})s(\textcolor{red}{\bullet})s(\textcolor{cyan}{\bullet})s(\textcolor{orange}{\bullet})s(\textcolor{red}{\bullet}) >$	$< \tau_3\tau_6\tau_5\tau_3\tau_6\tau_5 >$	NON
$< s(\textcolor{green}{\bullet})s(\textcolor{cyan}{\bullet})s(\textcolor{orange}{\bullet})s(\textcolor{red}{\bullet})s(\textcolor{yellow}{\bullet})s(\textcolor{brown}{\bullet}) >$	$< \tau_2\tau_3\tau_6\tau_1\tau_4\tau_7 >$	OUI
$< s(\textcolor{orange}{\bullet})s(\textcolor{red}{\bullet})s(\textcolor{yellow}{\bullet})s(\textcolor{brown}{\bullet})s(\textcolor{green}{\bullet})s(\textcolor{cyan}{\bullet}) >$	$< \tau_6\tau_1\tau_4\tau_7\tau_2\tau_3 >$	OUI
$< s(\textcolor{orange}{\bullet})s(\textcolor{red}{\bullet})s(\textcolor{cyan}{\bullet})s(\textcolor{orange}{\bullet})s(\textcolor{red}{\bullet})s(\textcolor{cyan}{\bullet}) >$	$< \tau_6\tau_5\tau_3\tau_6\tau_5\tau_3 >$	NON
$< s(\textcolor{brown}{\bullet})s(\textcolor{green}{\bullet})s(\textcolor{cyan}{\bullet})s(\textcolor{orange}{\bullet})s(\textcolor{red}{\bullet})s(\textcolor{yellow}{\bullet}) >$	$< \tau_7\tau_2\tau_3\tau_6\tau_1\tau_4 >$	OUI

TABLEAU C.2 – *Liste exhaustive des circuits de tuiles (non nécessairement élémentaires) de longueur trois et six.*

Tous les circuits non élémentaires de longueur $l(\mathcal{C}) = 6$ exhibés peuvent se ramener à des circuits élémentaires de longueur $l(\mathcal{C}) = 3$ puisque les sommets (resp. les tuiles) sont répété(e)s deux fois. Il existe donc exactement neuf circuits de tuiles élémentaires permettant de paver $\mathfrak{B}_1$ et parmi les neuf circuits exhibés, il suffit de deux circuits de longueur trois et six pour générer les autres en modifiant le sommet de départ.
Bien entendu, si on avait continué à calculer les puissances k-ièmes de $\mathscr{A}$ pour $k > 7$, d'autres circuits auraient été dénombrés, mais n'oublions pas que la collection est finie (*i.e.* $\#\mathcal{T} = 8$) ce qui implique que des tuiles auraient été nécessairement répétées dans des circuits de longueur $l(\mathcal{C}) > 7$. Ainsi, tous les circuits existant de longueur $l(\mathcal{C}) > 7$, sont nécessairement non élémentaires. [1]

Propriété C.1

Soit $\mathcal{T}$ la collection de tuiles donnée par la figure IX.17 (p. 236). On a prouvé les propositions suivantes.

(i) Il existe au moins un pavage valide pour $\mathfrak{B}_1$ avec des tuiles de $\mathcal{T}$.
(ii) Il existe exactement neuf circuits élémentaires de tuiles permettant de paver $\mathfrak{B}_1$.
(iii) Il n'existe aucun circuit élémentaire avec toutes les tuiles de $\mathcal{T}$.
(iv) La longueur du circuit élémentaire minimale (resp. maximale) vaut $l_{\min}(\mathcal{C}) = 3$ (resp. $l_{\max}(\mathcal{C}) = 6$).
(v) Tout circuit de longueur $l(\mathcal{C}) > 7$ est nécessairement non élémentaire.

Remarquons également qu'au départ, la procédure d'élimination de tuiles inutiles permet de limiter l'étude des cas. C'est le cas par exemple pour la tuile

1. A noter, qu'il n'existe pas de circuit élémentaire possédant toute les tuiles, c'est-à-dire les huit tuiles de la collection.

τ_8 qui possède des couleurs à l'EST et à l'OUEST qui n'apparaissent dans aucune autre tuile. De fait, si un circuit de tuiles existe, il ne peut pas contenir cette tuile. Ainsi, on aurait pu raisonner sans cette tuile et *a fortiori* utiliser un sous-graphe de G privé des sommets $s(\bullet)$ et $s(\bullet)$.

Enfin, pour déterminer de manière constructive un circuit, plusieurs stratégies existent. Tout d'abord, dans le graphe G on peut appliquer par exemple l'algorithme du parcours en largeur (DFS) en partant d'un sommet s de G arbitraire (voir l'exemple VIII.2, p. 194) ou construire la matrice latine de G et calculer ses puissances successives afin de déterminer, grâce aux règles axiomatiques du produit matriciel latin, ses différents circuits.

2 Le cas de la bande $\mathcal{B}_2$ avec des instances spécifiques

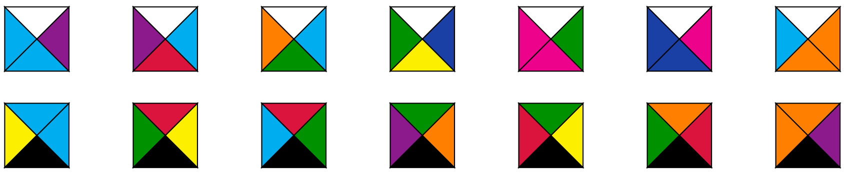
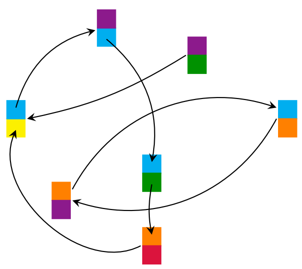


FIGURE C.3 – *Rappel de la collection de quatorze tuiles pouvant être partitionnée en deux sous collections de sept tuiles (voir p. 239).*

Pour dénombrer le nombre de circuits de blocs de tuiles β, il suffit de construire sa matrice d'adjacence $\mathscr{A}$ d'ordre sept et de calculer sa puissance k-ème, pour $k \in \{1,\dots,7\}$, puisque dès lors que $k > 7$, tout circuit existant est non élémentaire puisque repassant par un sommet déjà présent dans le circuit exhibé.



$$\mathscr{A} := \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} s(\cdot) & s(\cdot) & s(\cdot) & s(\cdot) & s(\cdot) & s(\cdot) & s(\cdot) \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} s(\cdot) \\ s(\cdot) \\ s(\cdot) \\ s(\cdot) \\ s(\cdot) \\ s(\cdot) \\ s(\cdot) \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

FIGURE C.4 – *Graphe orienté associé aux couleurs EST et OUEST des blocs de tuiles de hauteur $h = 2$ et sa matrice d'adjacence associée.*

Il est connu que le calcul des puissances k-ièmes permet de montrer l'existence de circuits de longueur $l(\mathcal{C}) = 2$, $l(\mathcal{C}) = 4$ et $l(\mathcal{C}) = 6$. La somme des traces des matrices $\mathscr{A}^2$, $\mathscr{A}^4$ et $\mathscr{A}^6$ permet de dénombrer exactement dix circuits qui sont élémentaires ou non. Par ailleurs, un algorithme de type DFS dans le graphe permet de les trouver.

Circuit de G	Circuit de blocs β	Élémentaire
$< s(\,)s(\,) >$	$< \beta_7\beta_4 >$	OUI
$< s(\,)s(\,) >$	$< \beta_4\beta_7 >$	OUI
$< s(\,)s(\,)s(\,)s(\,) >$	$< \beta_1\beta_3\beta_6\beta_5 >$	OUI
$< s(\,)s(\,)s(\,)s(\,) >$	$< \beta_3\beta_6\beta_5\beta_1 >$	OUI
$< s(\,)s(\,)s(\,)s(\,) >$	$< \beta_6\beta_5\beta_1\beta_3 >$	OUI
$< s(\,)s(\,)s(\,)s(\,) >$	$< \beta_5\beta_1\beta_3\beta_6 >$	OUI
$< s(\,)s(\,)s(\,)s(\,) >$	$< \beta_7\beta_4\beta_7\beta_4 >$	NON
$< s(\,)s(\,)s(\,)s(\,) >$	$< \beta_4\beta_7\beta_4\beta_7 >$	NON
$< s(\,)s(\,)s(\,)s(\,)s(\,)s(\,) >$	$< \beta_7\beta_4\beta_7\beta_4\beta_7\beta_4 >$	NON
$< s(\,)s(\,)s(\,)s(\,)s(\,)s(\,) >$	$< \beta_4\beta_7\beta_4\beta_7\beta_4\beta_7 >$	NON

TABLEAU C.4 – *Liste exhaustive des circuits de tuiles (non nécessairement élémentaires) de longueur deux, quatre et six.*

Le tableau C.4 ci-avant permet de donner toutes les possibilités de circuits élémentaires et non élémentaires d'une longueur maximale de six blocs verticaux de hauteur $h = 2$ pouvant être exhibés lors de nos expérimentations. Par ailleurs, remarquons qu'en réalité certains circuits de longueur $l(\mathcal{C}) = 4$ et $l(\mathcal{C}) = 6$ sont des circuits non élémentaires et peuvent être réduits à des circuits élémentaires de longueur $l(\mathcal{C}) = 2$.

Enfin, la procédure évoquée ci-avant peut être généralisée, mais dès lors que la hauteur h augmente, il est souhaitable, pour plus de lisibilité, d'associer pour chaque coloration EST et OUEST des blocs de hauteur h, une et une seule couleur.

Propriété C.2

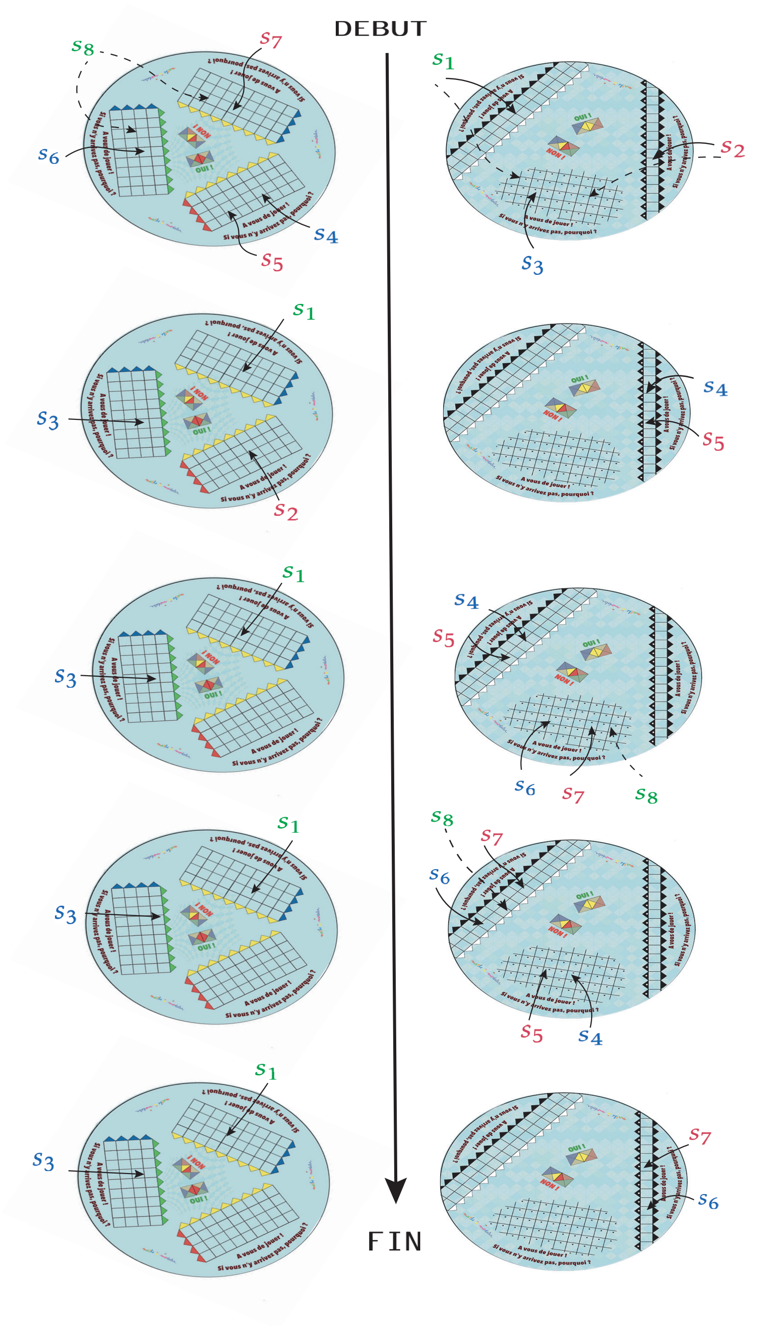
Soit $\mathcal{T}$ la collection de tuiles donnée par la figure IX.22 (p. 239). On a prouvé les propositions suivantes.

(i) Il existe au moins un pavage valide pour $\mathfrak{B}_2$ avec des tuiles de $\mathcal{T}$.

(ii) Il existe exactement six circuits élémentaires de tuiles permettant de paver $\mathfrak{B}_2$ (deux à permutation près du bloc de départ).
(iii) Il n'existe aucun circuit élémentaire avec toutes les tuiles de $\mathcal{T}$.
(iv) La longueur du circuit élémentaire minimale (resp. maximale) de blocs vaut $l_{\min}(\mathcal{C}) = 2$ (resp. $l_{\max}(\mathcal{C}) = 4$).
(v) Tout circuit de longueur $l(\mathcal{C}) > 7$ est nécessairement non élémentaire.

Annexe D

Circulation effective des sujets lors de l'expérimentation I



Annexe E

Retranscriptions de l'expérimentation I : le cas des rectangles

Pour les retranscriptions des données audiovisuelles concernant les situations des rectangles, nous utiliserons la grille discrète ci-après.

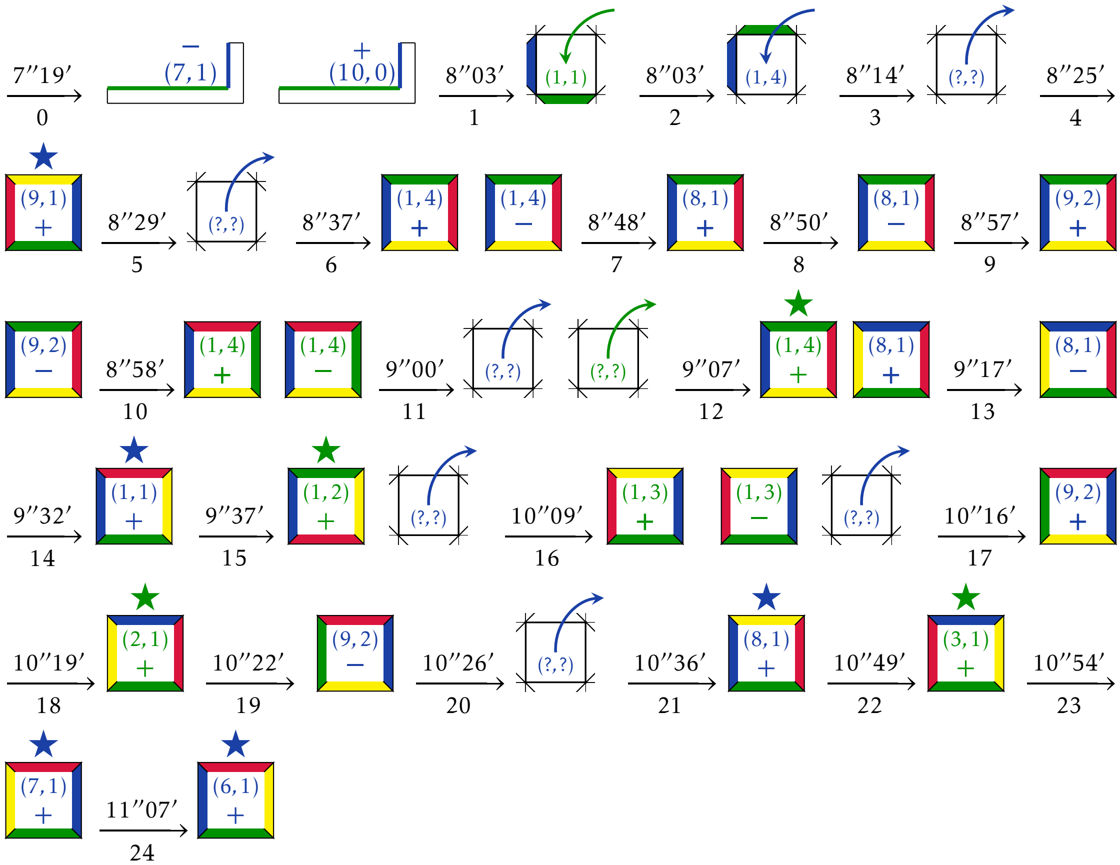
$(1,4)$	$(2,4)$	$(3,4)$	$(4,4)$	$(5,4)$	$(6,4)$	$(7,4)$	$(8,4)$	$(9,4)$
$(1,3)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(4,3)$	$(5,3)$	$(6,3)$	$(7,3)$	$(8,3)$	$(9,3)$
$(1,2)$	$(2,2)$	$(3,2)$	$(4,2)$	$(5,2)$	$(6,2)$	$(7,2)$	$(8,2)$	$(9,2)$
$(1,1)$	$(2,1)$	$(3,1)$	$(4,1)$	$(5,1)$	$(6,1)$	$(7,1)$	$(8,1)$	$(9,1)$

FIGURE E.1 – *Grille utilisée pour faciliter la lecture des retranscriptions.*

1 Première retranscription : s_6 et s_8 en activité dans le cas du rectangle de type A

Le coin de la réglette a été déposé par le chercheur en amont de l'expérience sur la case de coordonnées $(7,1)$ formant ainsi un rectangle 3×6 de type A.

1.1 Retranscription du fichier VEXP1_M1_001.mp4



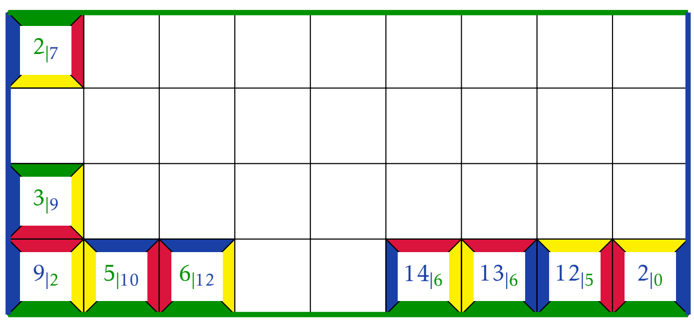
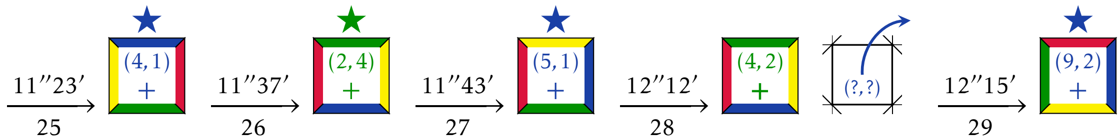


FIGURE E.2 – Résumé 1.1 : le cas du rectangle de type A.



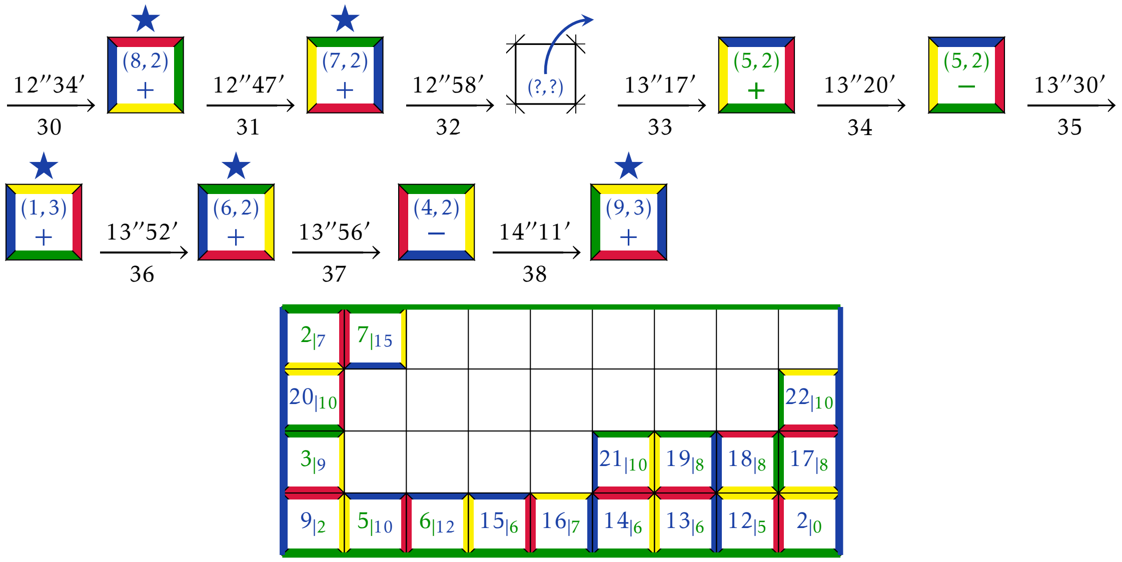


Figure E.3 – *Résumé 1.2 : le cas du rectangle de type A.*

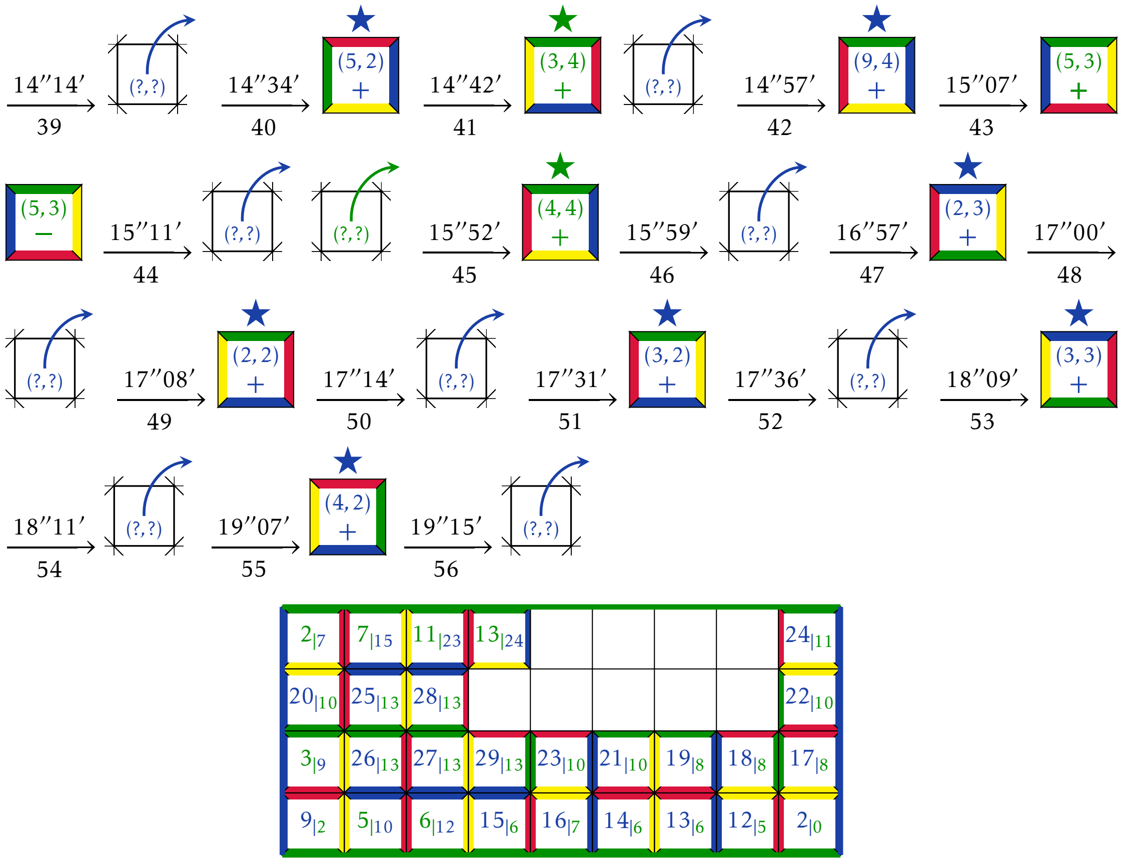
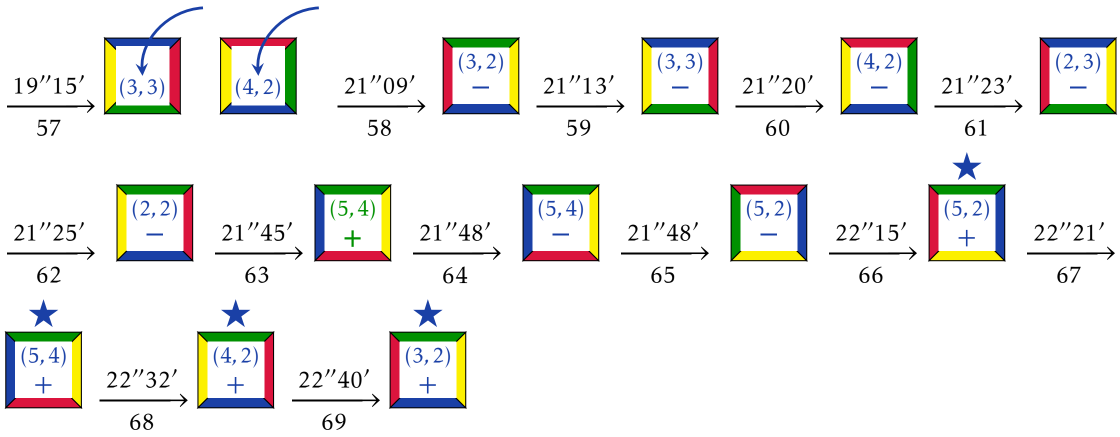
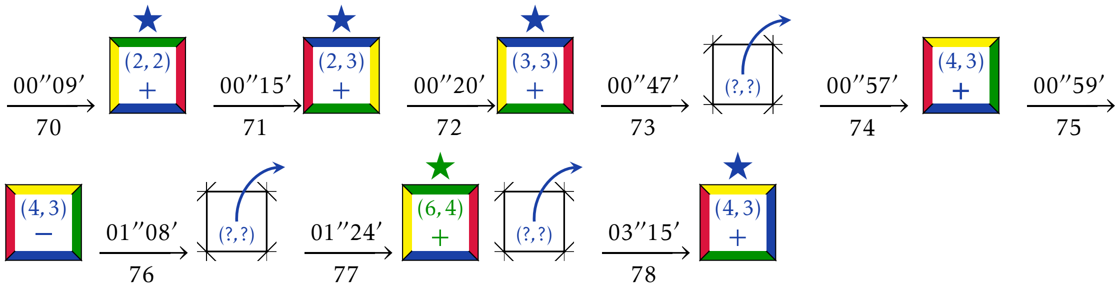


Figure E.4 – *Résumé 1.3 : le cas du rectangle de type A.*



1.2 Retranscription du fichier VEXP1_M1_002.mp4 (suite)



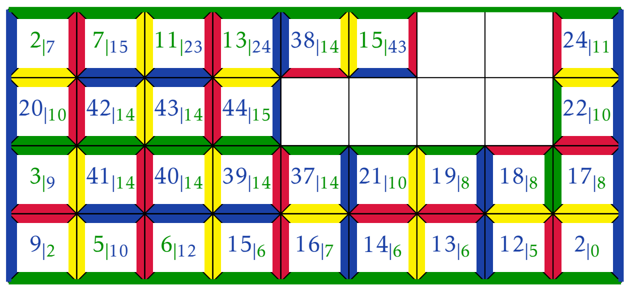
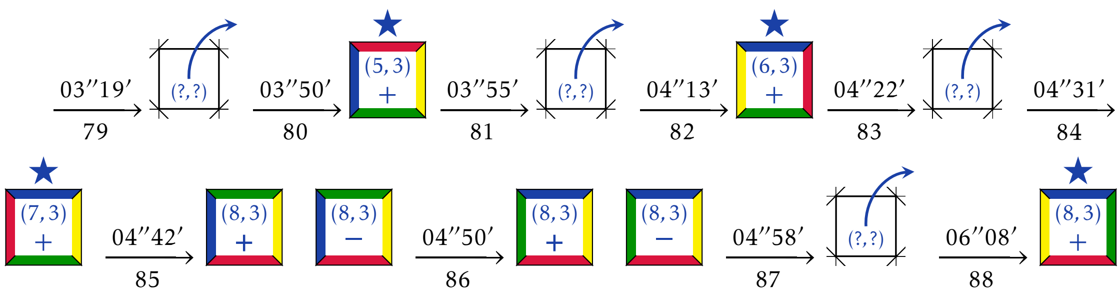
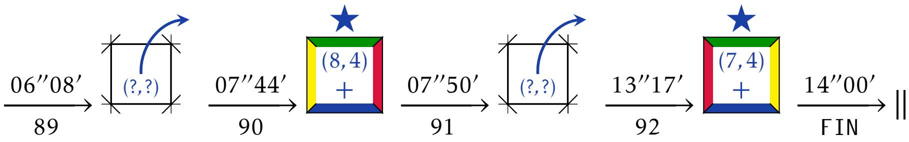


Figure E.5 – *Résumé 1.4 : le cas du rectangle de type A.*





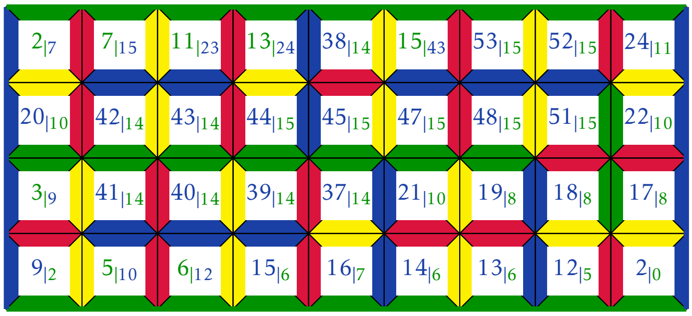
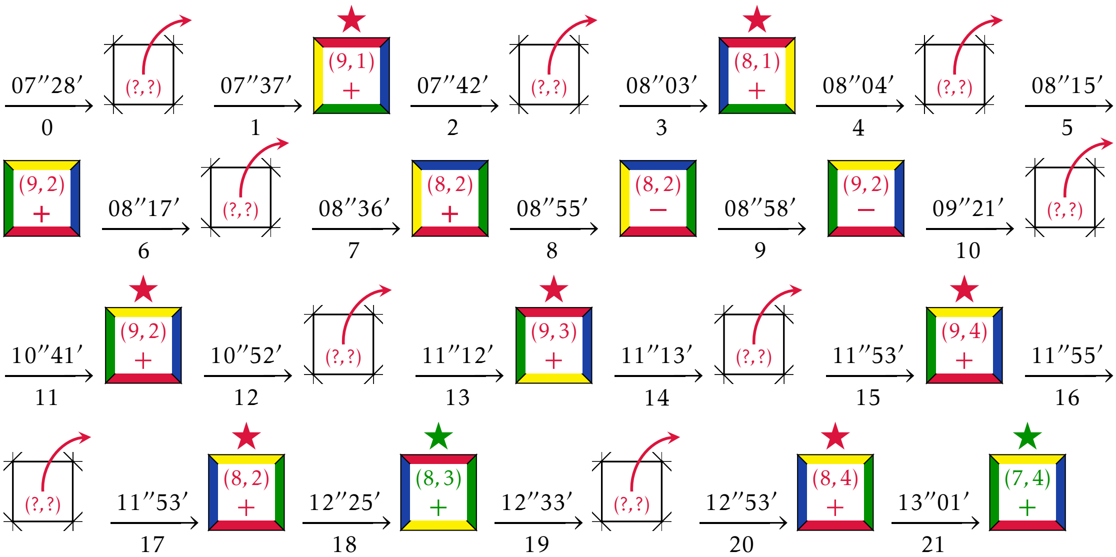


FIGURE E.6 – *Résumé 1.5 : le cas du rectangle de type A.*

2 Deuxième retranscription : s_7 et s_8 en activité dans le cas du rectangle de type $|B|$

En amont de l'expérience, la réglette a été déposée par le chercheur au niveau la $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$ de tel manière qu'elle délimite un rectangle 4×9 de type $|B|$.

2.1 Retranscription du fichier `VEXP1_M1_001.mp4`



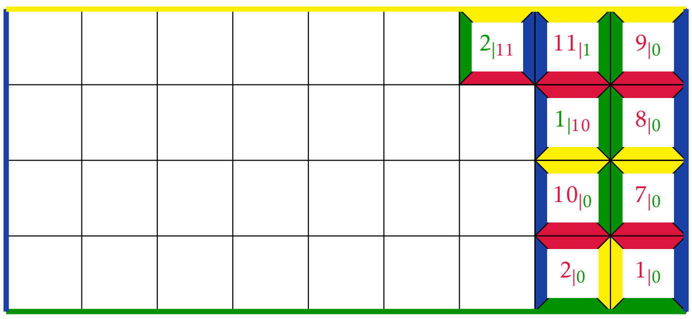


Figure E.7 – *Résumé 2.1 : le cas du rectangle de type |B|.*

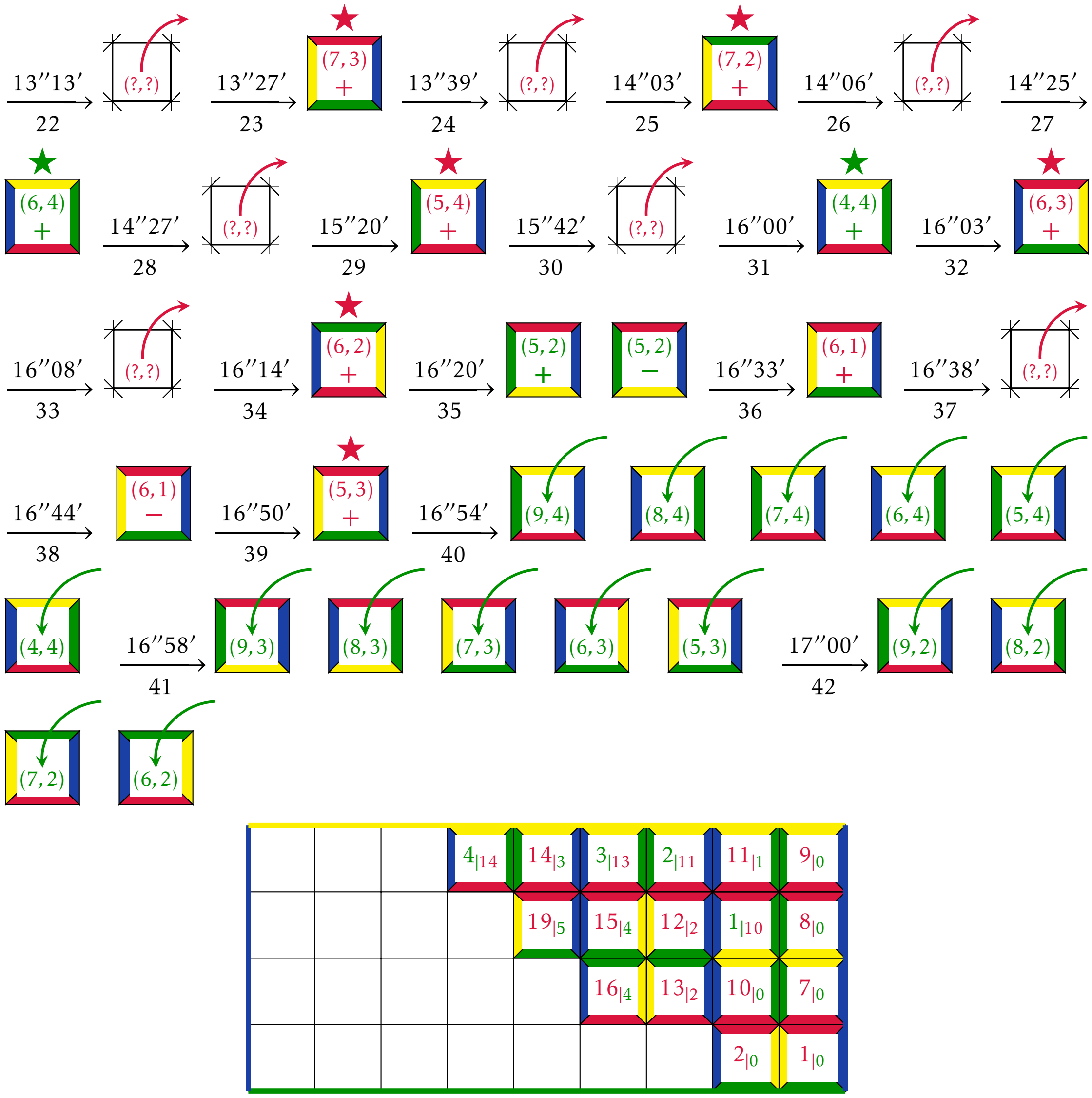
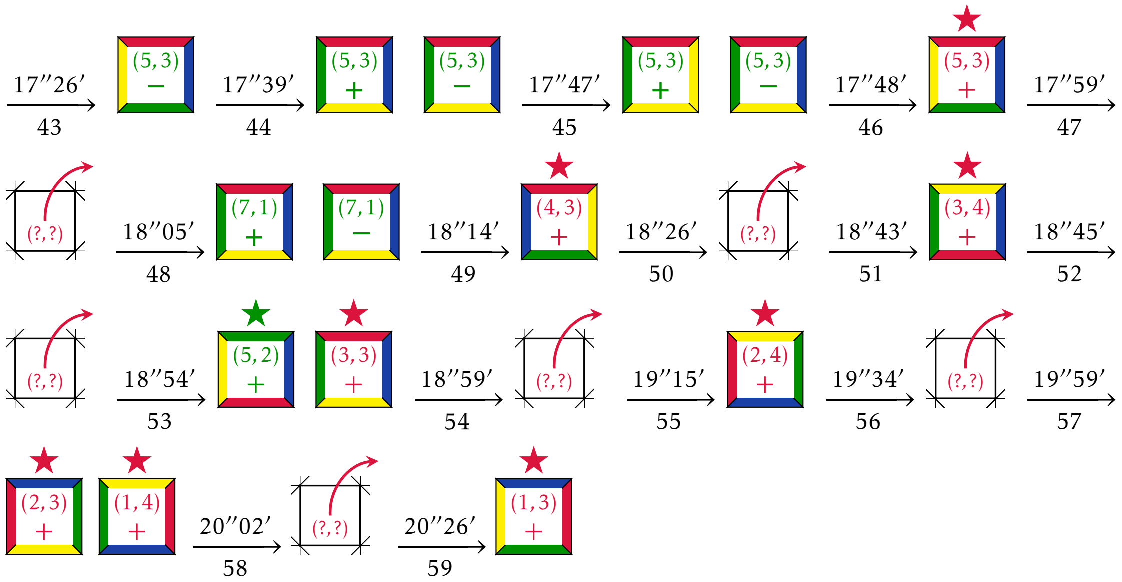


Figure E.8 – *Résumé 2.2 : le cas du rectangle de type |B|.*

2. Deuxième retranscription : s_7 et s_8 en activité dans le cas du rectangle de type $|B|341$



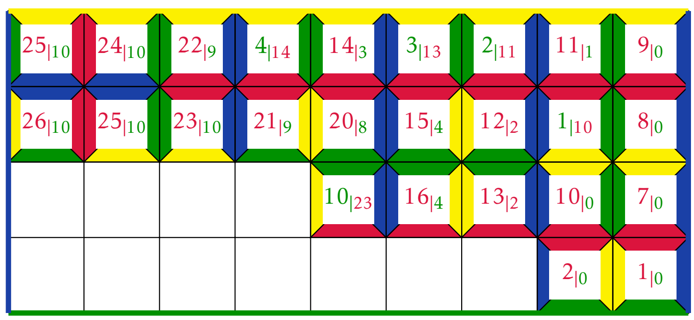
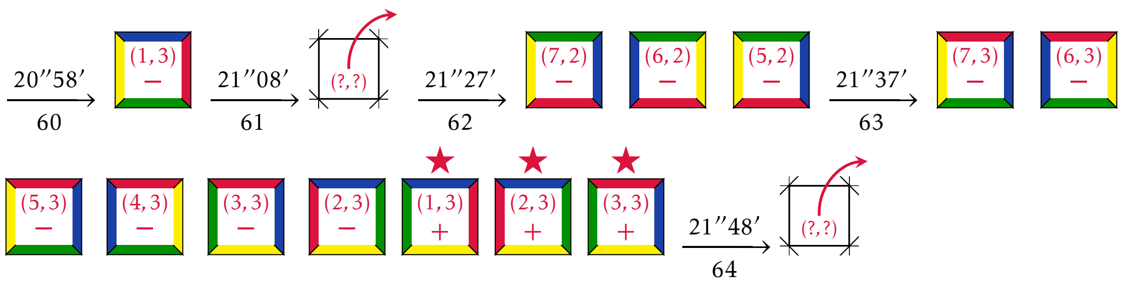
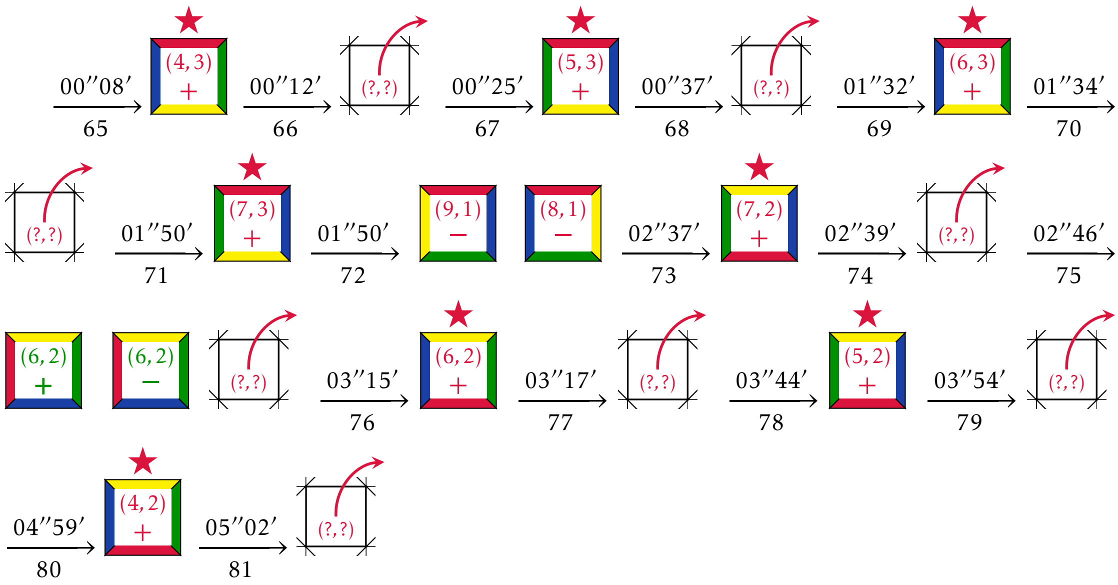


Figure E.9 – *Résumé 2.3 : le cas du rectangle de type |B|.*



2.2 Retranscription du fichier `VEXP1_M1_002.mp4` (suite)



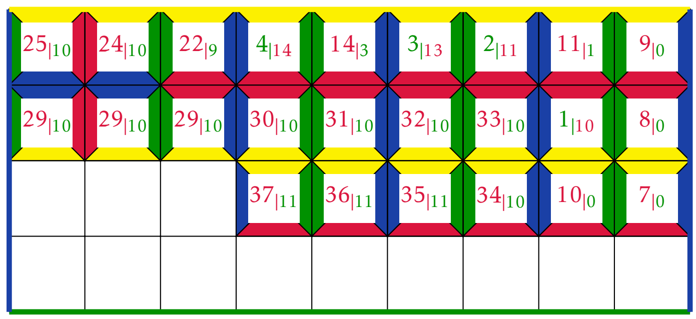
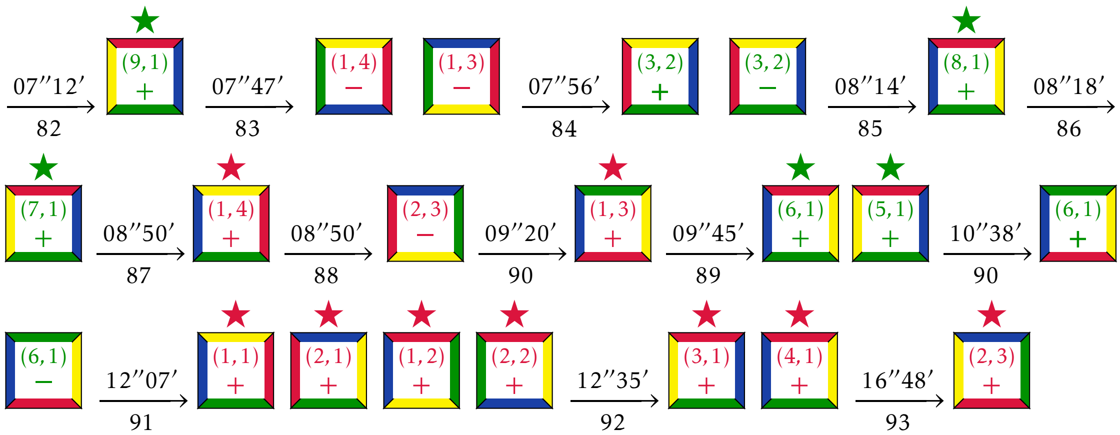


Figure E.10 – *Résumé 2.4 : le cas du rectangle de type |B|.*



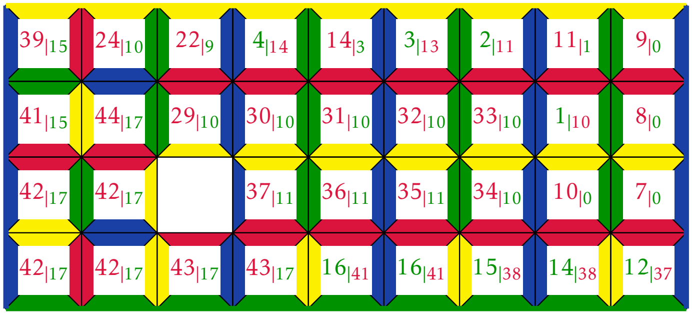
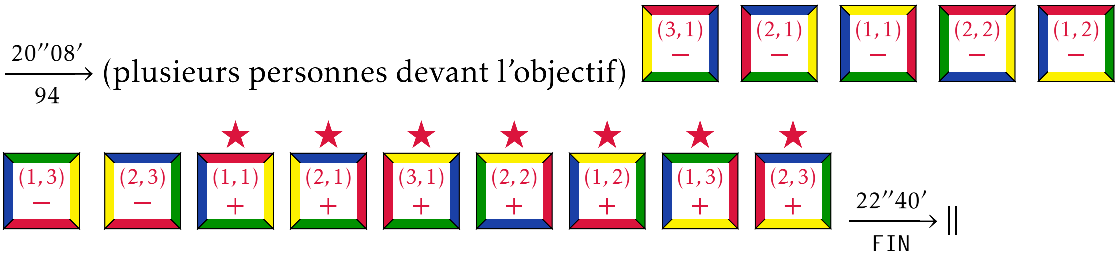


FIGURE E.11 – *Résumé 2.5 : le cas du rectangle de type* $|B|$.



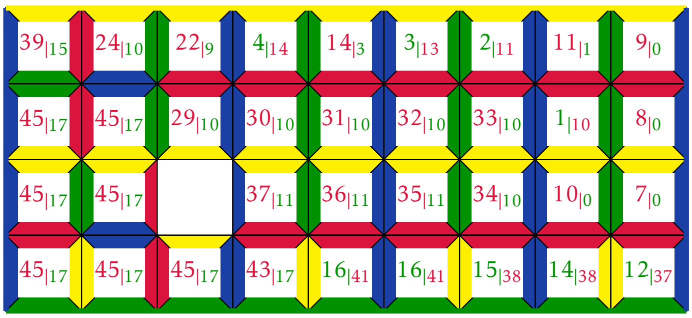
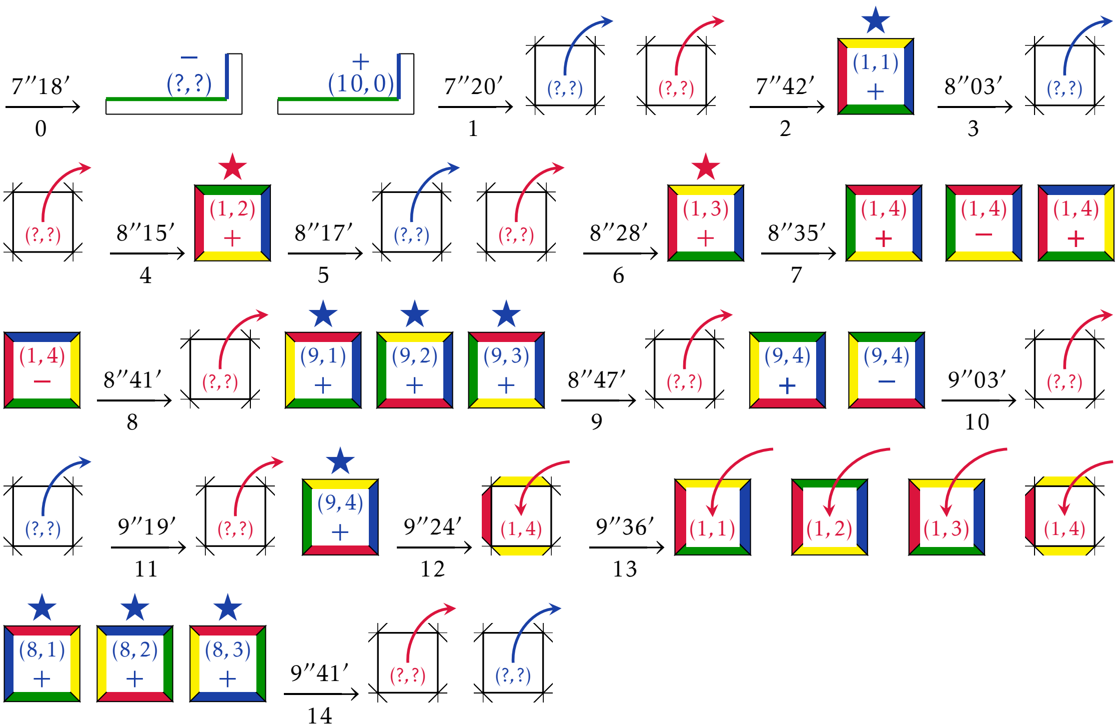


FIGURE E.12 – *Résumé 2.6 : le cas du rectangle de type* $|B|$.

3 Troisième retranscription : s_4 et s_5 en activité dans le cas du rectangle de type C

En amont de l'expérience, la réglette a été déposée par le chercheur au niveau la $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$ sans former de rectangle spécifique.

3.1 Retranscription du fichier VEXP1_M1_001.mp4



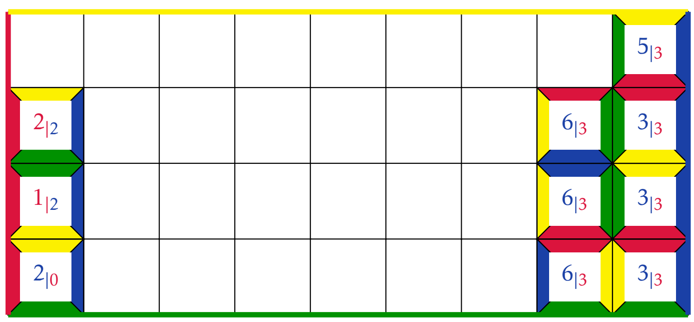
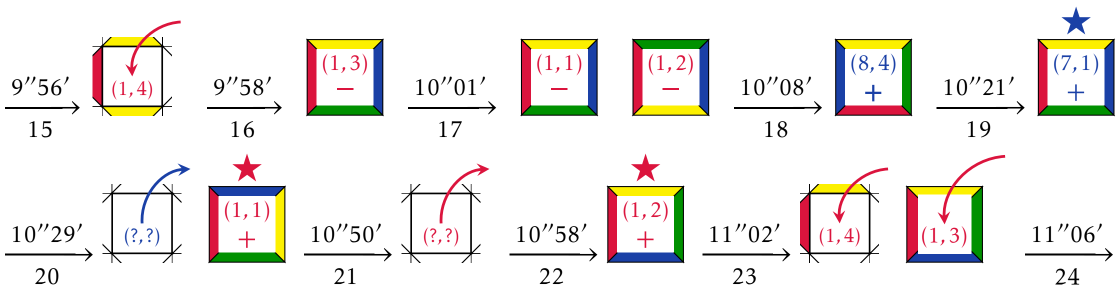
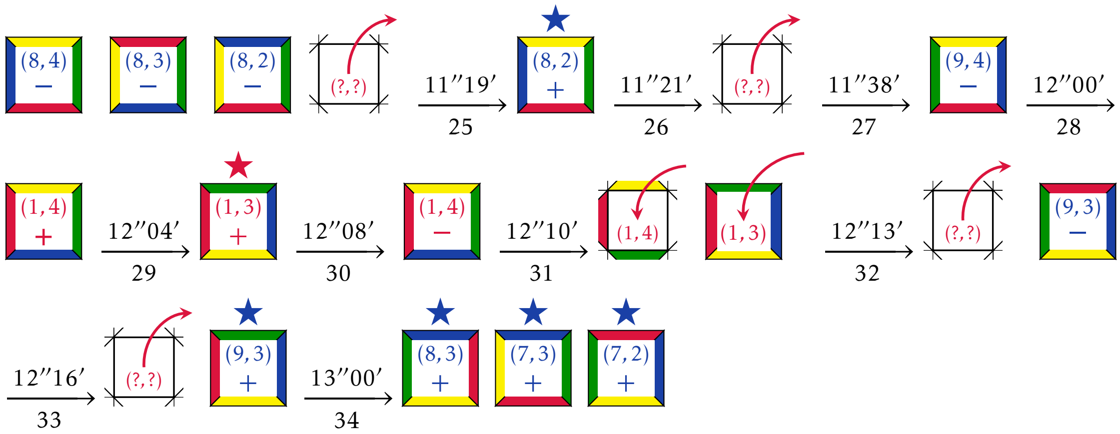


Figure E.13 – Résumé 3.1 : le cas du rectangle de type C.





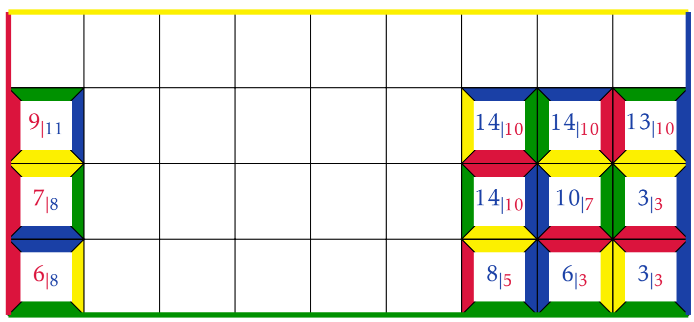
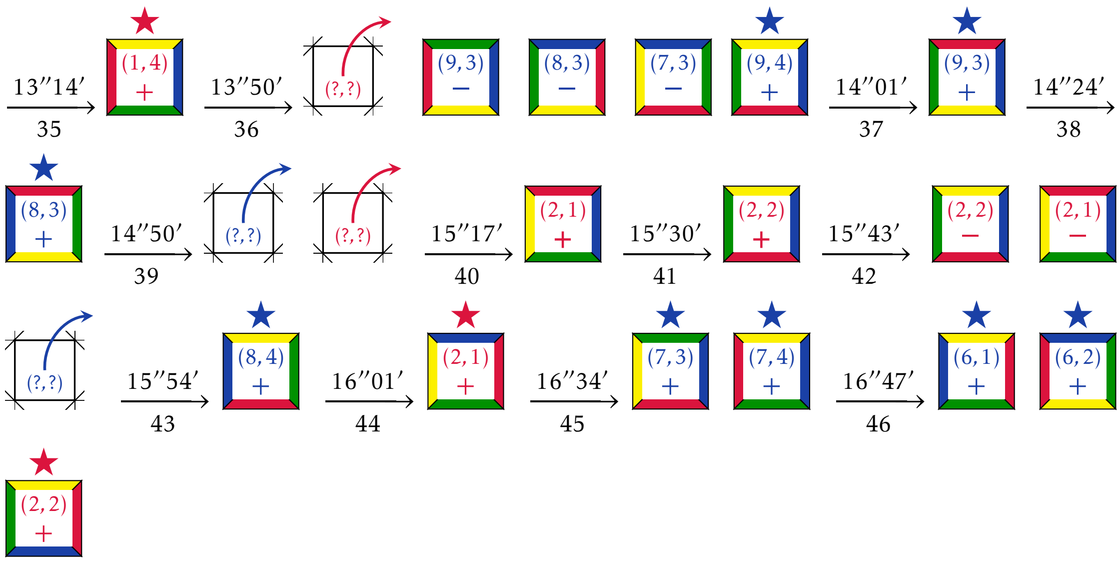


FIGURE E.14 – *Résumé 3.2 : le cas du rectangle de type C.*



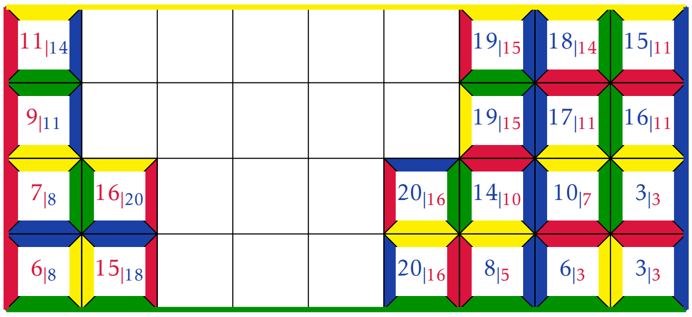
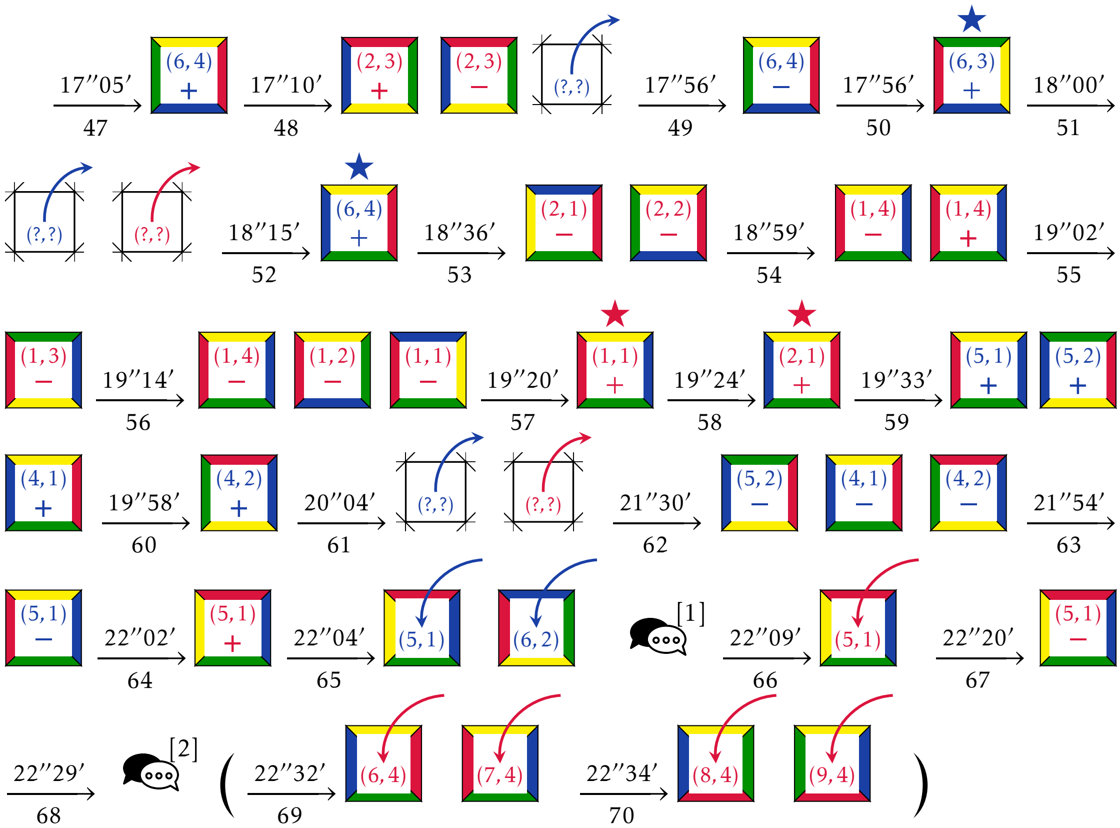


Figure E.15 – *Résumé 3.3 : le cas du rectangle de type C.*



Transcription du dialogue [1]

— Non car deux rouges ça n'existe pas.

Transcription du dialogue [2]

— Tu vois faut reproduire ça et ça. *Elle montre les deux blocs verticaux de droite de taille* 2×4.

— Lui il est pareil que lui ? *Il montre explicitement deux blocs horizontaux de taille* 2×1.

— Non c'est pour ça il faut refaire ça.

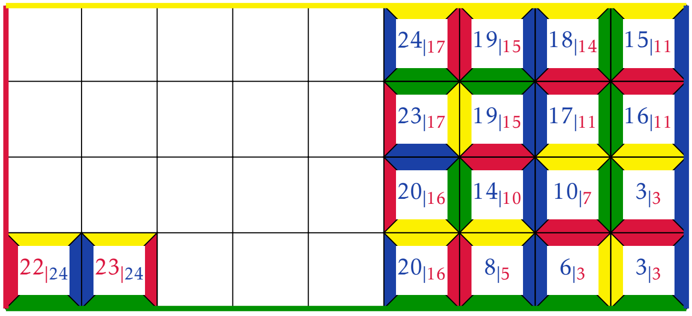
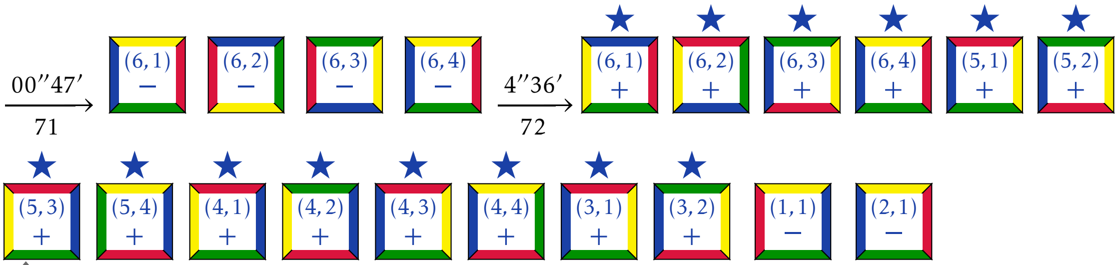


FIGURE E.16 – *Résumé 3.4 : le cas du rectangle de type C.*

3.2 Retranscription du fichier `VEXP1_M1_002.mp4` (suite)



Dans l'intervalle $[70, 71[$ s_5 est devant l'objectif de la caméra ce qui fait qu'on ne voit pas la succession des $\mathcal{T}$-actions d'ajout de s_4.

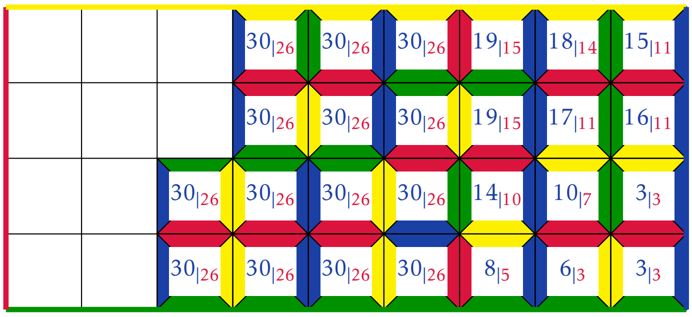
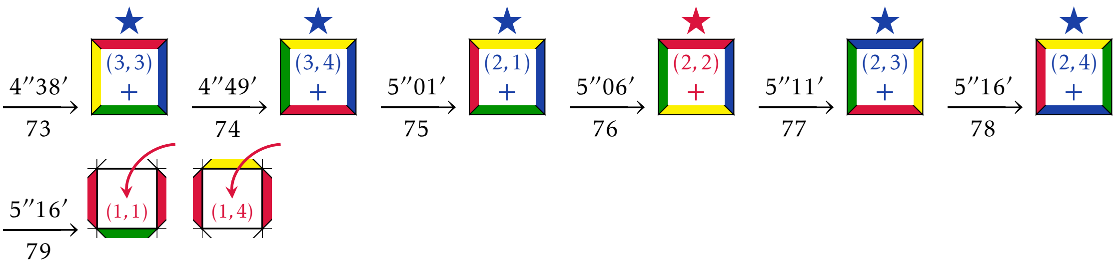


FIGURE E.17 – *Résumé 3.5 : le cas du rectangle de type C.*



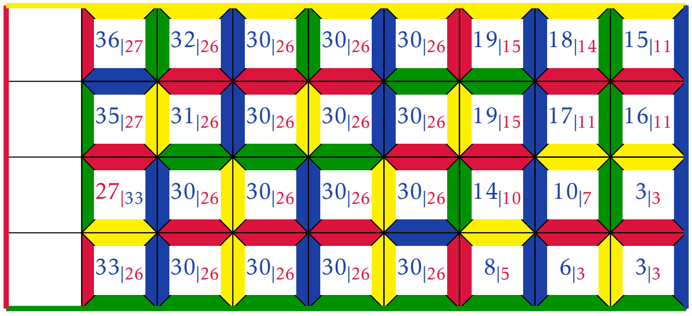


Figure E.18 – *Résumé 3.6 : le cas du rectangle de type C.*

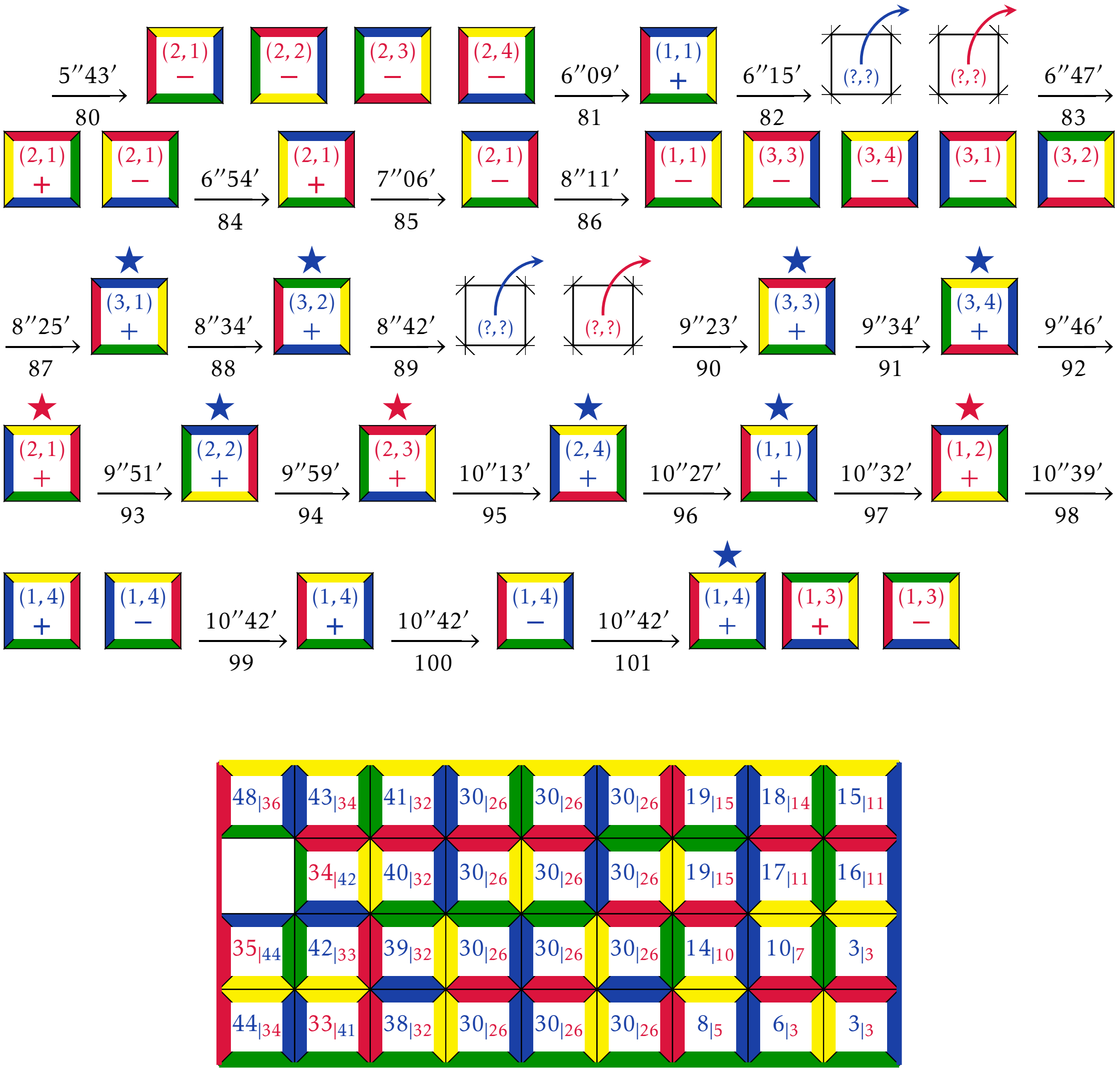


Figure E.19 – *Résumé 3.7 : le cas du rectangle de type C.*

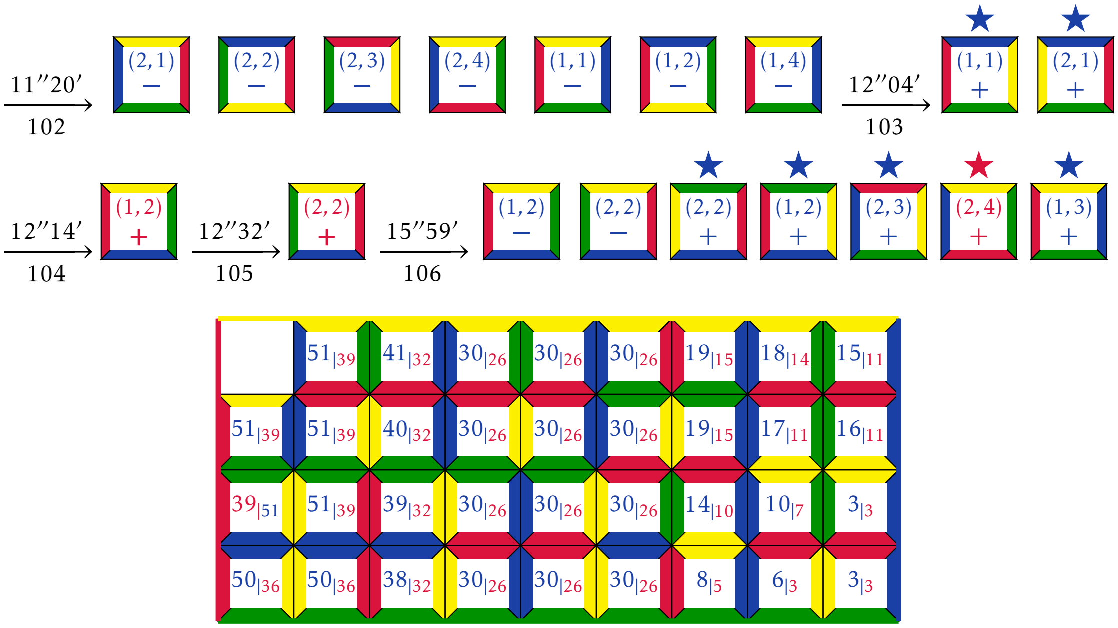


Figure E.20 – *Résumé 3.8 : le cas du rectangle de type C.*

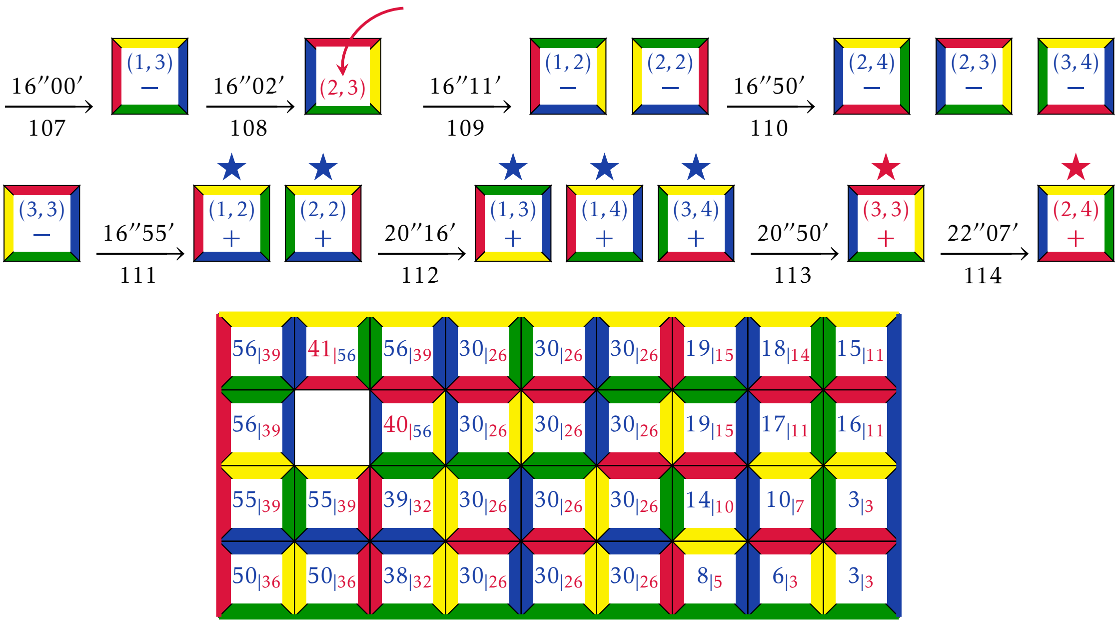


Figure E.21 – *Résumé 3.9 : le cas du rectangle de type C.*

3.3 Retranscription du fichier `VEXP1_M1_003.mp4` (suite)

$\xrightarrow[115]{02''11'} \boxed{\overset{-}{\text{ALL}}} \xrightarrow[\texttt{FIN}]{01''42'} \|$

Annexe F

Retranscriptions de l'expérimentation I : le cas de la bande $\mathfrak{B}_1$

Lors de la première expérimentation nous avons omis de fixer les poinçons sur le bord NORD des tuiles et de la bande $\mathfrak{B}_1$ afin d'imposer l'orientation des tuiles... Les bords NORD et SUD de la bande sont donc monochromes et de couleur noire. De plus, afin de faciliter la lecture de la retranscription nous proposons d'utiliser le fragment de bande suivante qui se rapproche le plus de la réalité des individus en situation.

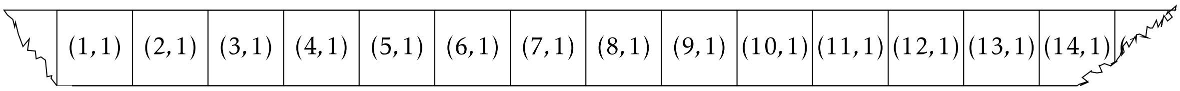


***Figure F.1** – Bande $\mathfrak{B}_1$ se rapprochant de la réalité du matériel en situation.*

1 Première retranscription : s_1, s_2 et s_3 en activité

Dans cette retranscription trois personnes sont en activité en début de partie mais s_1 et s_3, représentés ici par le vert et le bleu, quittent rapidement la situation pour aller sur d'autres du même module.

1.1 Retranscription du fichier `VEXP1_M2_001.mp4`

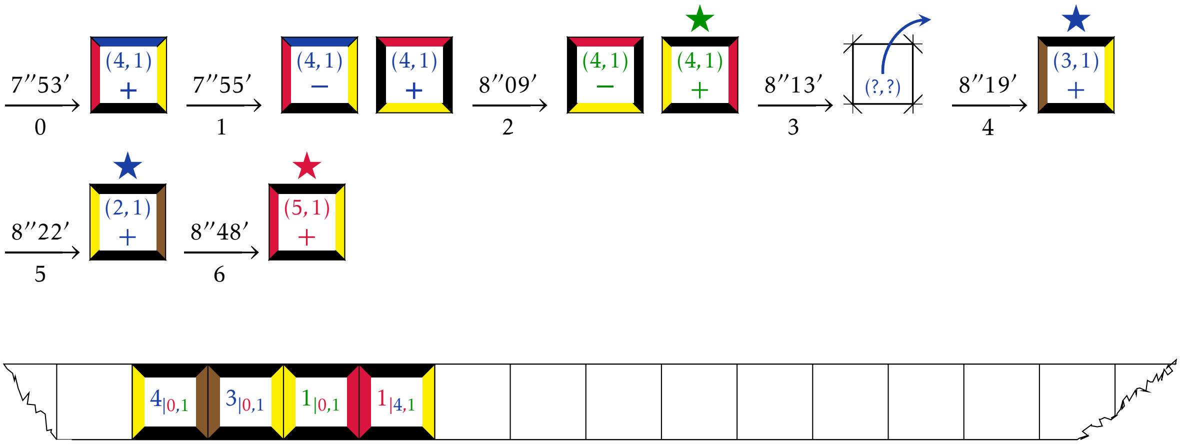


FIGURE F.2 – *Résumé 1.1 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_1$.*

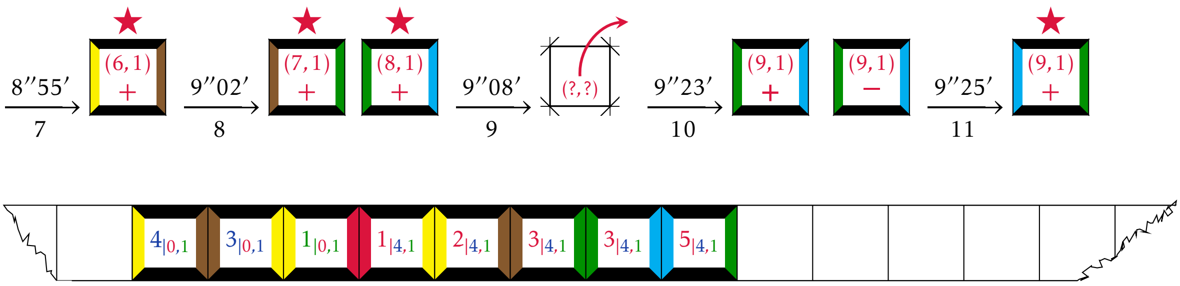


FIGURE F.3 – *Résumé 1.2 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_1$.*

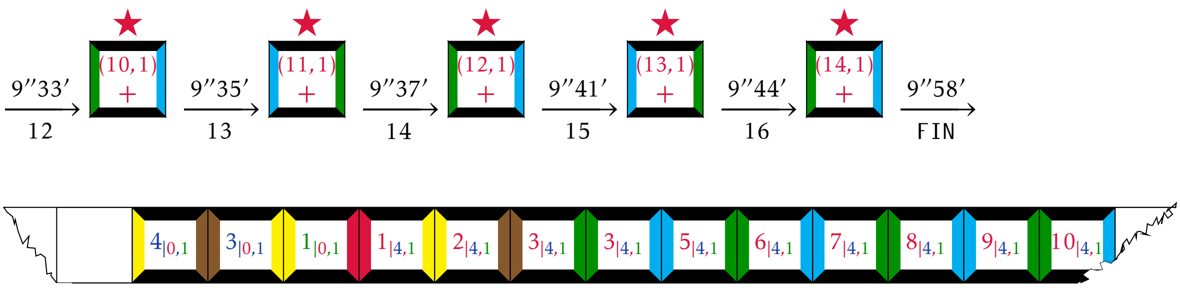


FIGURE F.4 – *Résumé 1.3 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_1$.*

2 Deuxième retranscription : s_4 et s_5 en activité

2.1 Retranscription du fichier `VEXP1_M2_003.mp4`

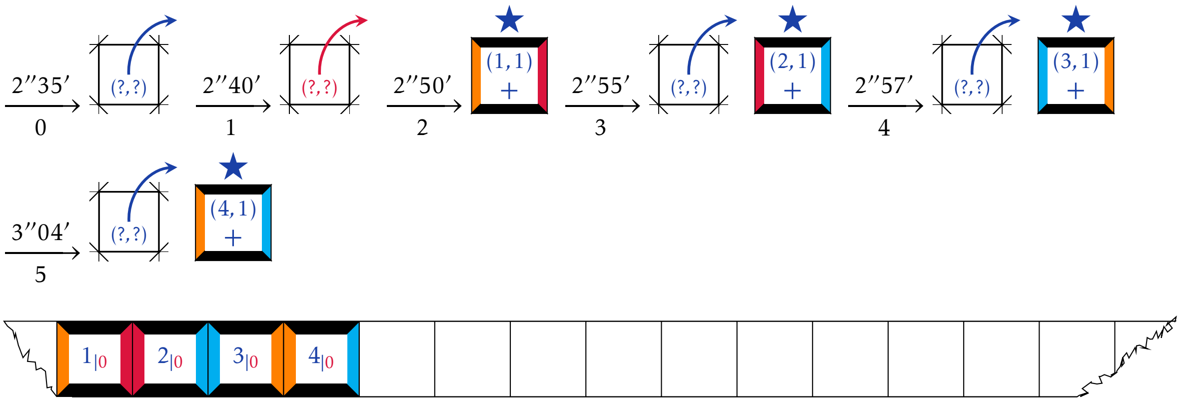


FIGURE F.5 – *Résumé 2.1 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_1$.*

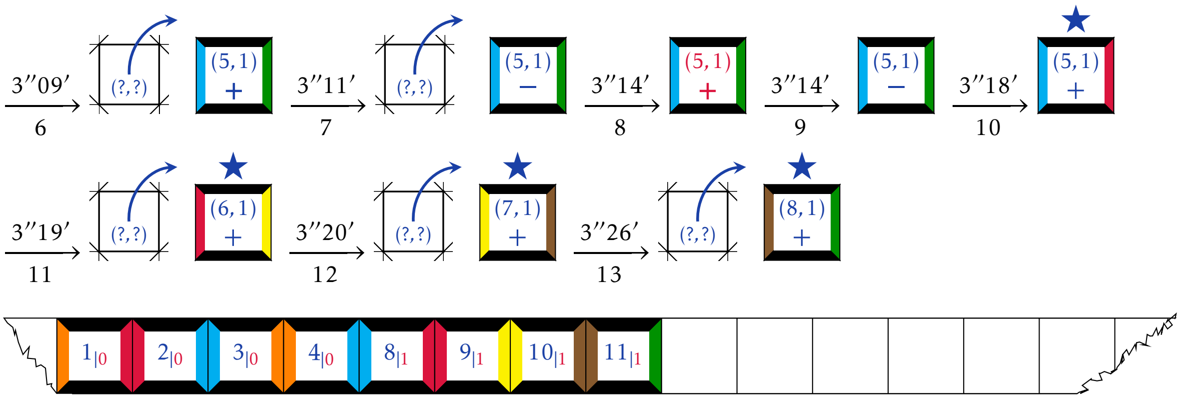


FIGURE F.6 – *Résumé 2.2 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_1$.*

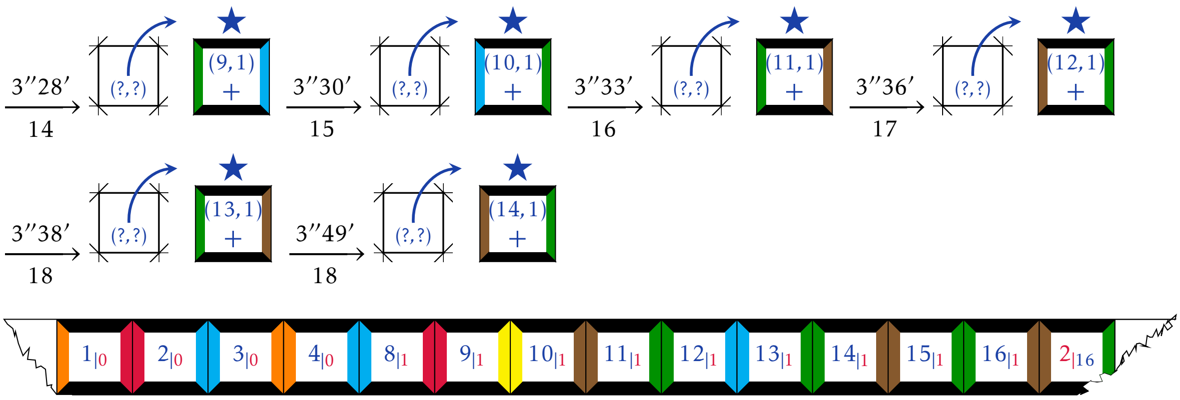
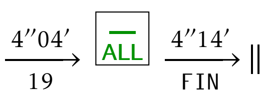
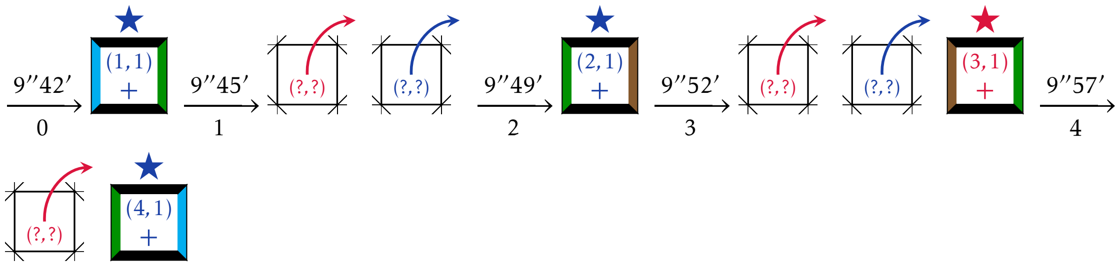


FIGURE F.7 – *Résumé 2.3 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_1$.*



3 Troisième retranscription : s_6 et s_7 en activité

3.1 Retranscription du fichier VEXP1_M2_004.mp4



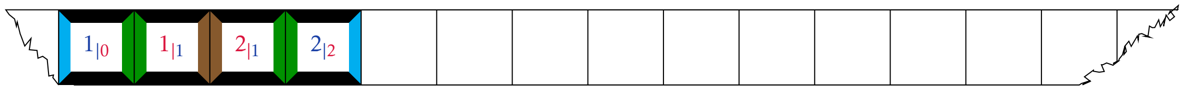
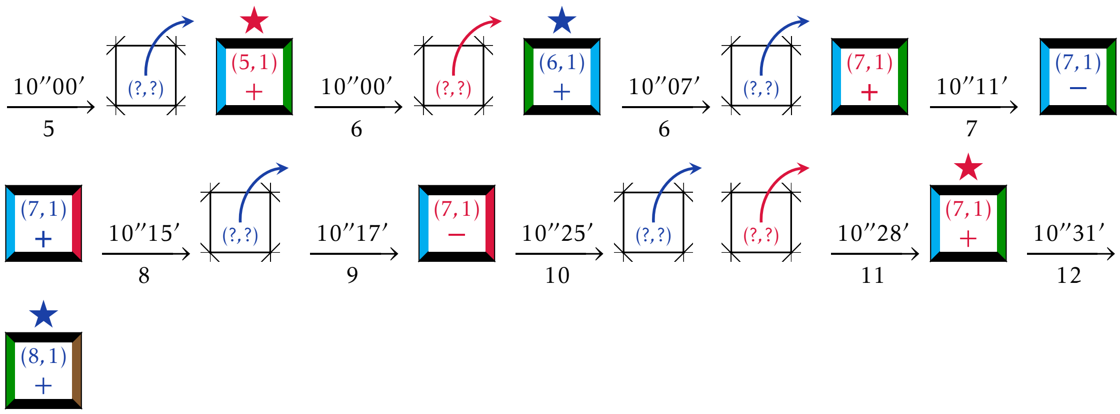


***Figure F.8** – Résumé 3.1 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_1$.*



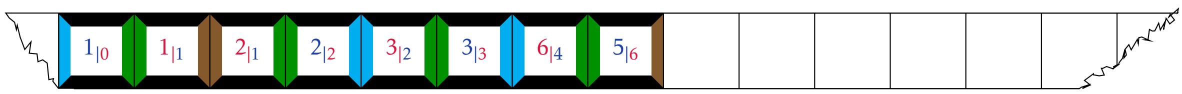
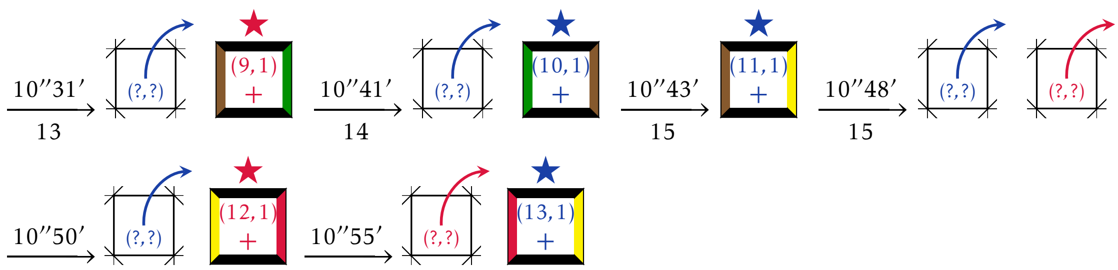


***Figure F.9** – Résumé 3.2 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_1$.*



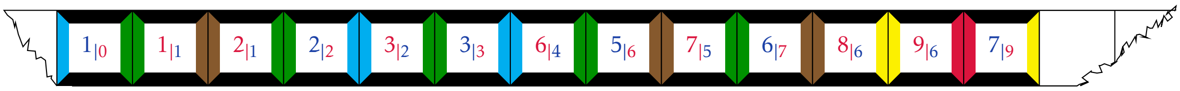


***Figure F.10 –** Résumé 3.3 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_1$.*

$$\xrightarrow[18]{11''31'} \boxed{\overline{\text{ALL}}} \xrightarrow[\texttt{FIN}]{11''42'} \|$$

Annexe G

Retranscriptions de l'expérimentation I : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$

La bande $\mathfrak{B}_2$ impose la couleur blanche au NORD et la couleur noire au SUD de la bande. De plus, afin de faciliter la lecture de la retranscription nous proposons d'utiliser le fragment de bande suivante qui se rapproche le plus de la réalité des individus en situation.

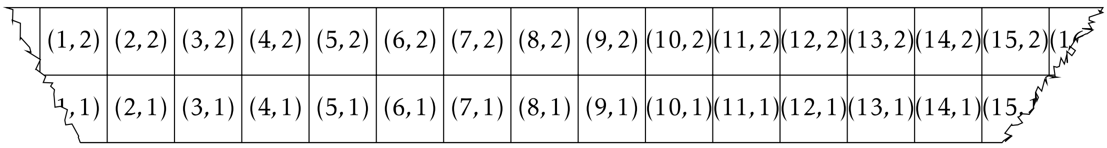


FIGURE G.1 – *Bande $\mathfrak{B}_2$ se rapprochant le plus de la réalité du matériel en situation.*

1 Première retranscription : s_1 en activité

1.1 Retranscription du fichier VEXP1_M2_001.mp4

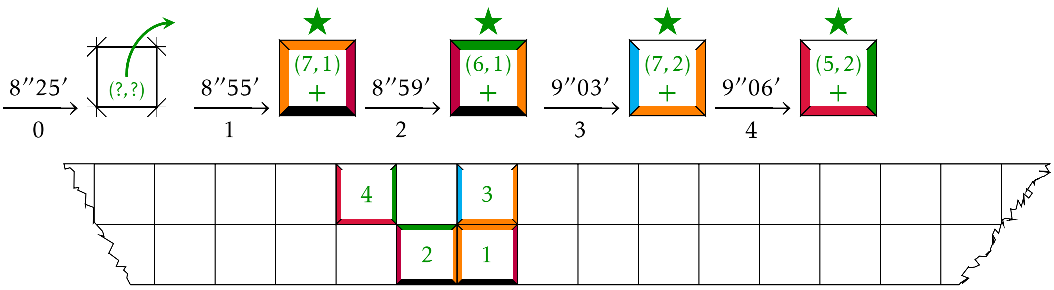
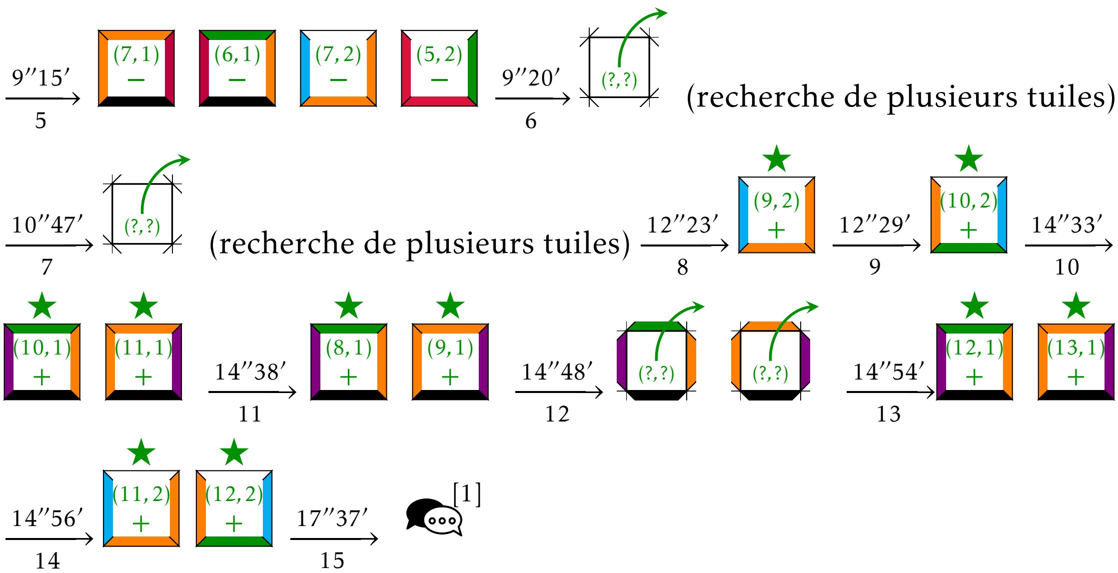


FIGURE G.2 – *Résumé 1.1 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$.*



Transcription du dialogue [1]

— Non audible.

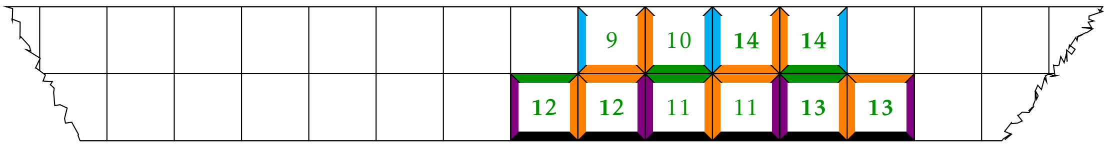
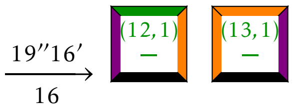


FIGURE G.3 – Résumé 1.2 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$.



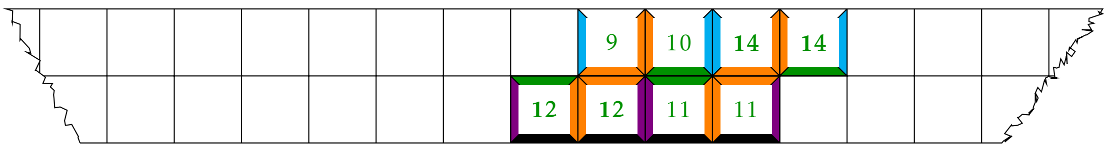
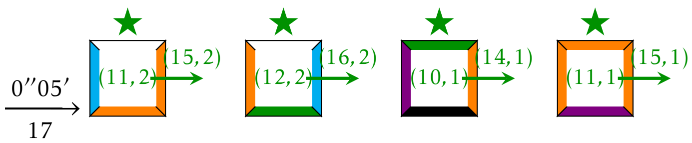


FIGURE G.4 – Résumé 1.3 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$.

1.2 Retranscription du fichier `VEXP1_M2_002.mp4` (suite)



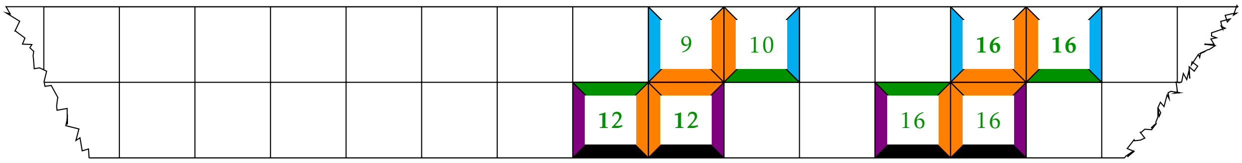
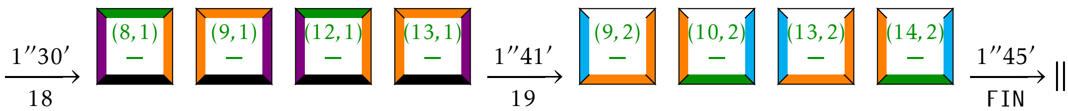
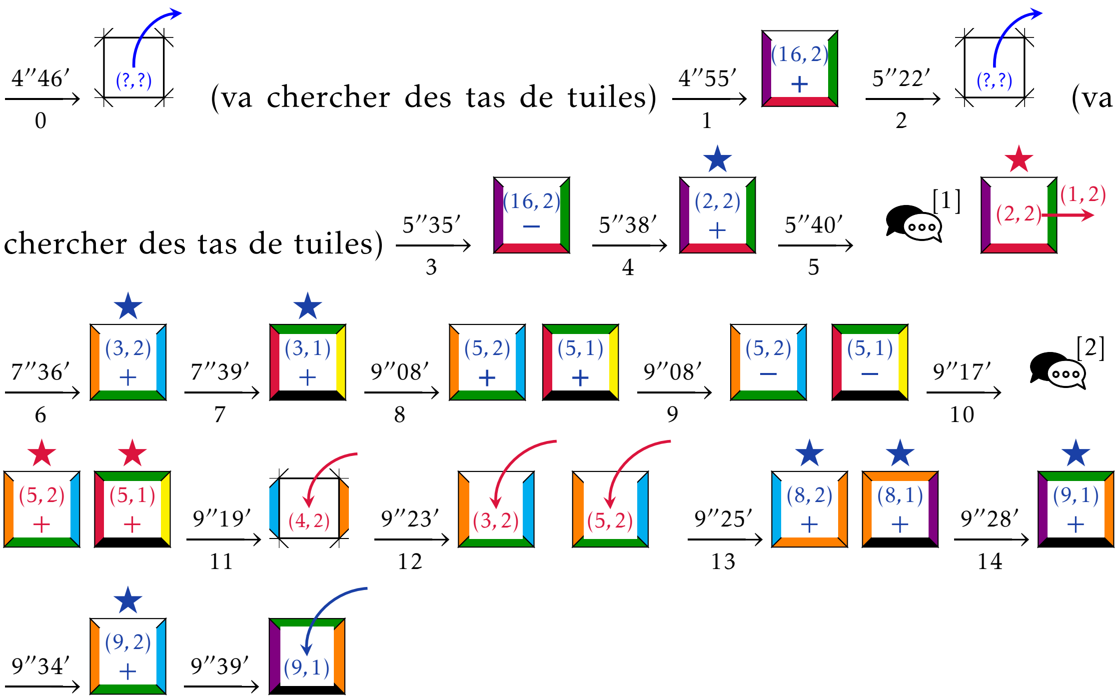


FIGURE G.5 – *Résumé 1.4 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$.*



2 Deuxième retranscription : s_4 et s_5 en activité

2.1 Retranscription du fichier VEXP1_M2_003.mp4



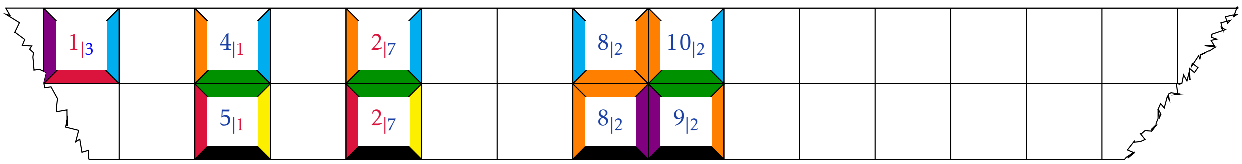


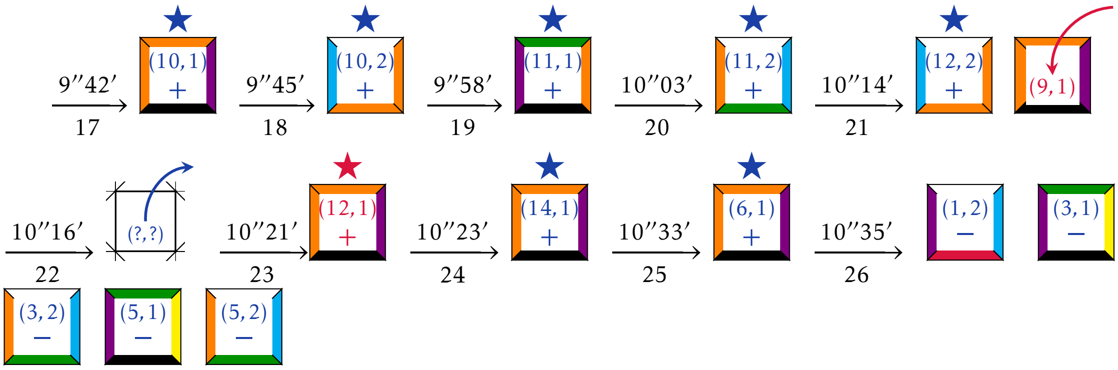
FIGURE G.6 – *Résumé 2.1 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$.*

Transcription du dialogue [1]

— Mais non !

Transcription du dialogue [2]

— Il faut faire plusieurs fois le même combo.



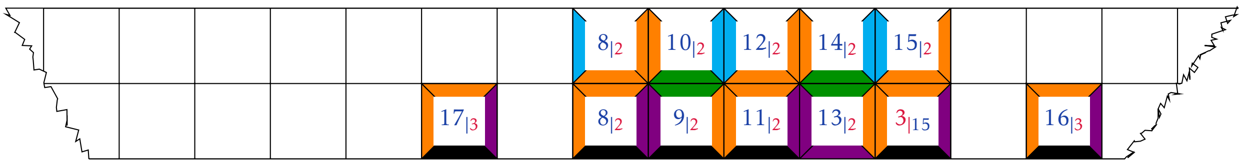
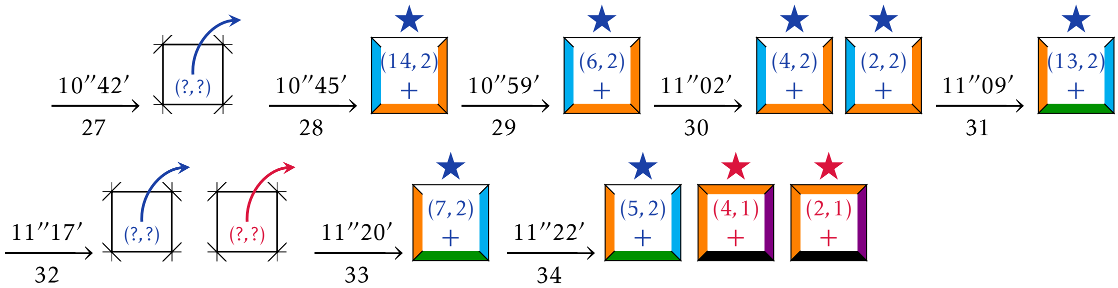


FIGURE G.7 – *Résumé 2.2 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$.*



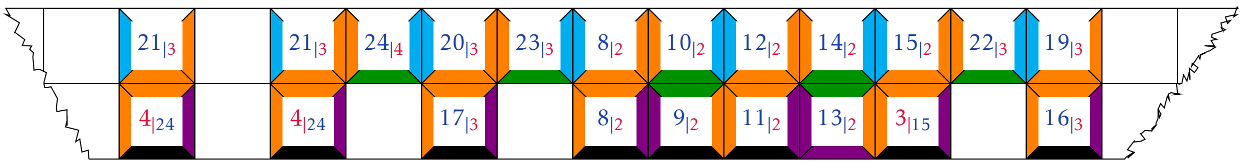
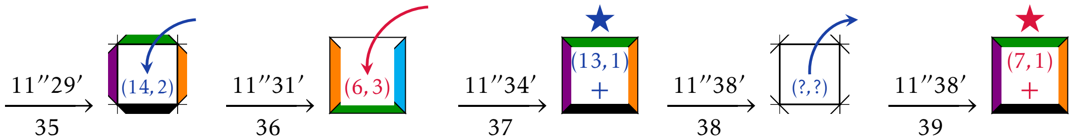
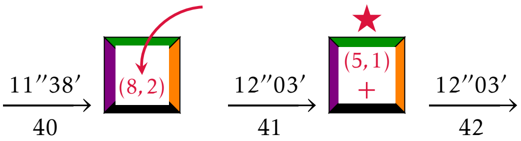
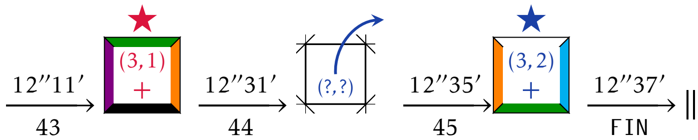


FIGURE G.8 – *Résumé 2.3 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$.*





Joueur bleu donne une tuile qui va être posée par le joueur rouge



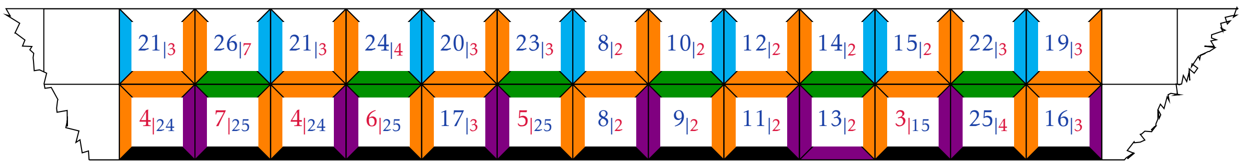
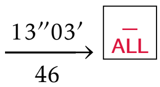


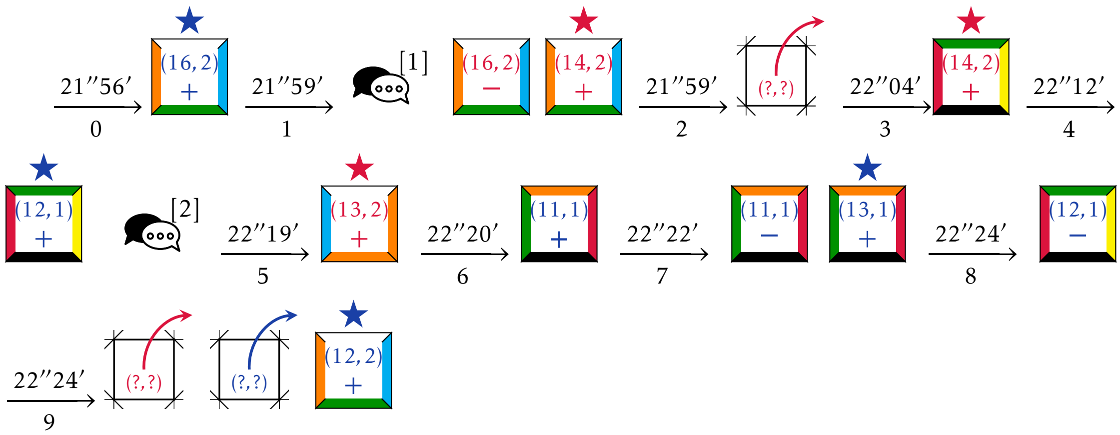
FIGURE G.9 – Résumé 2.4 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$.



3 Troisième retranscription : s_6 et s_7 en activité

En réalité il y a une troisième personne (s_8) (vert) mais celle-ci ne participe pas vraiment, ainsi nous avons fait le choix de ne pas la représenter dans les résumés.

3.1 Retranscription du fichier VEXP1_M2_003.mp4



Transcription du dialogue [1]

— Non on commence ici.

Transcription du dialogue [2]

— Je m'occupe du haut.

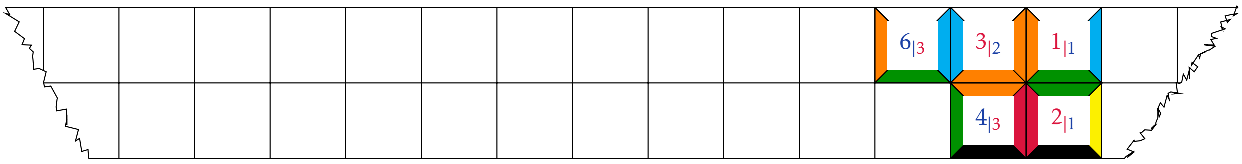
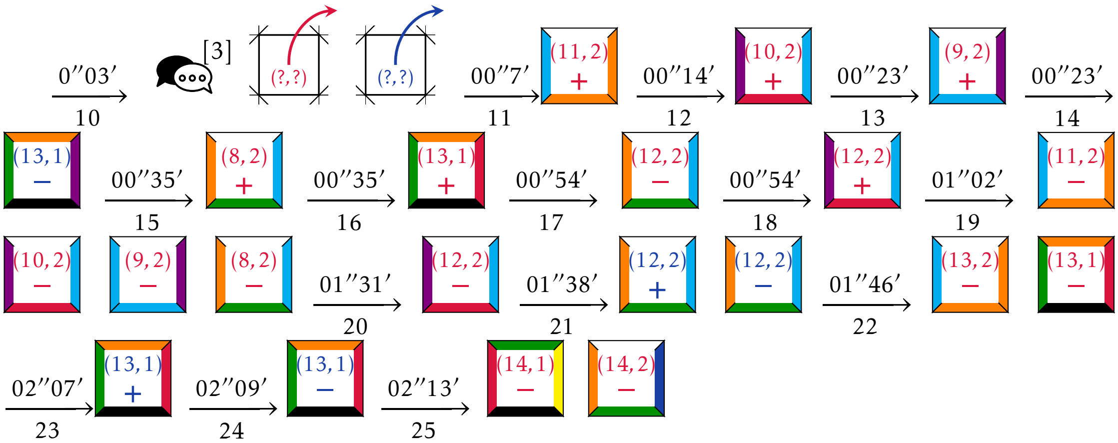


FIGURE G.10 – Résumé 3.1 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$.

3.2 Retranscription du fichier VEXP1_M2_004.mp4



Transcription du dialogue [3]

— Attends, au pire tu t'occupes du bas et moi je m'occupe du haut.

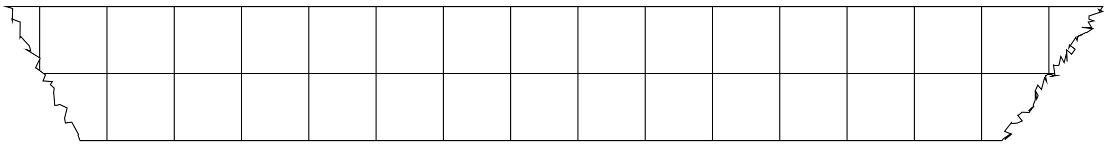
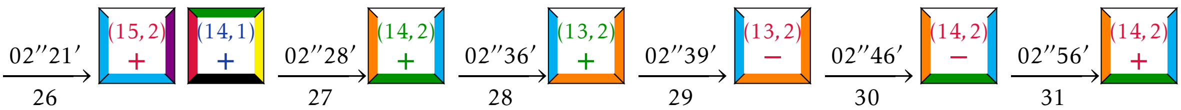
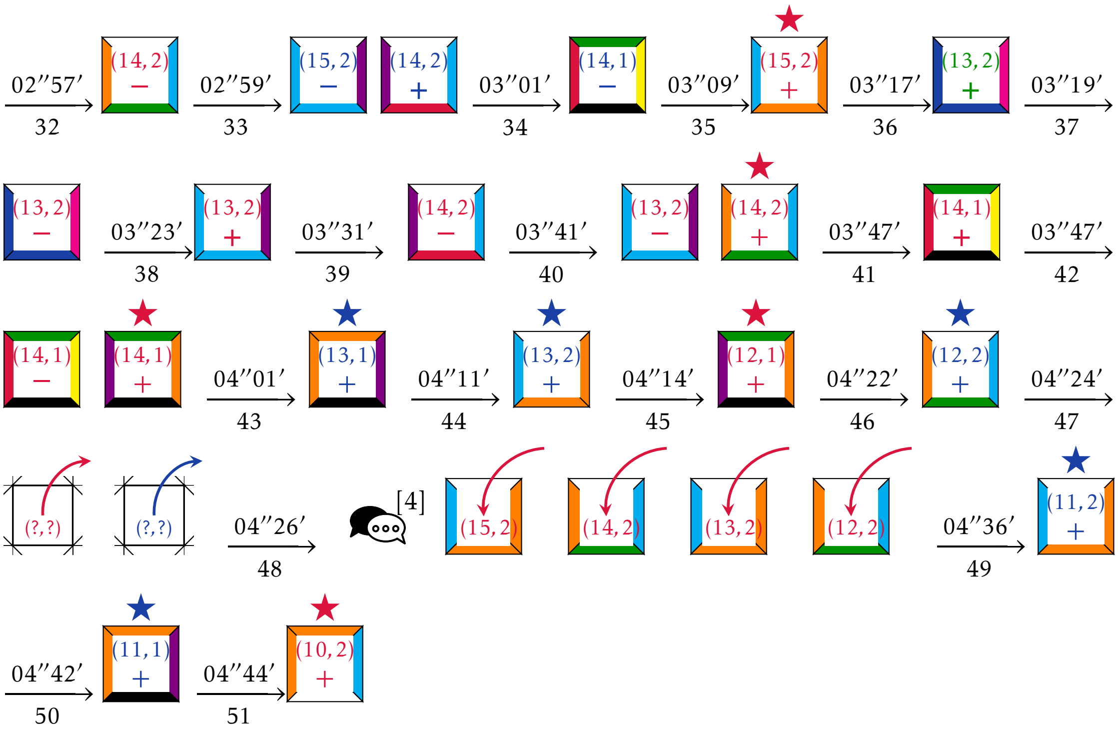


FIGURE G.11 – Résumé 3.2 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$ (retour à l'état initial).





Transcription du dialogue [4]

— Ah mais attends, ahhhh j'ai compris, ça fait toujours la même chose.

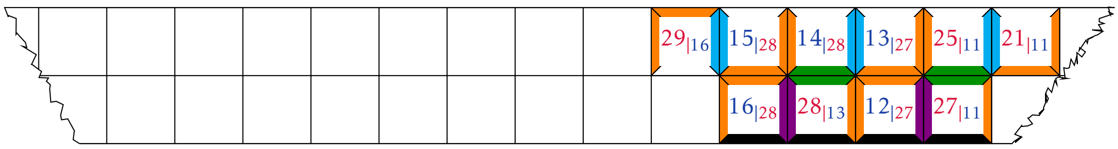
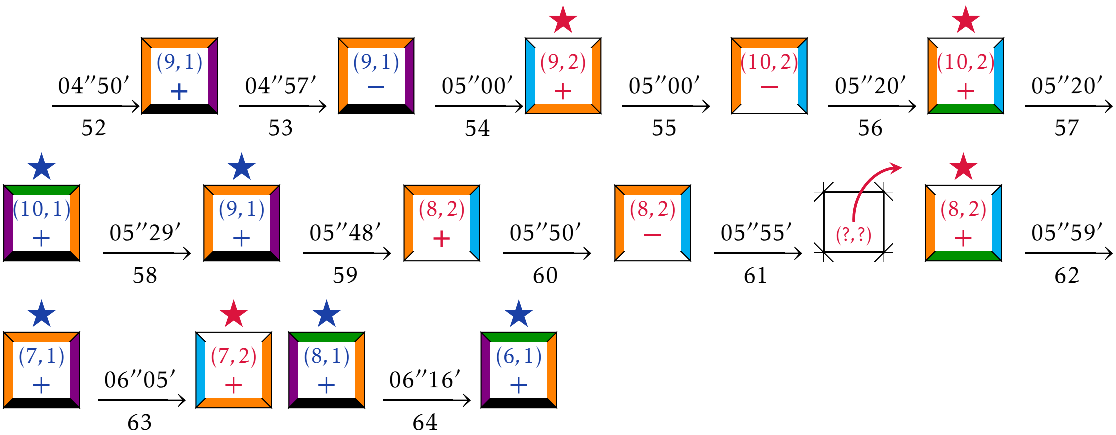


FIGURE G.12 – Résumé 3.3 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$.



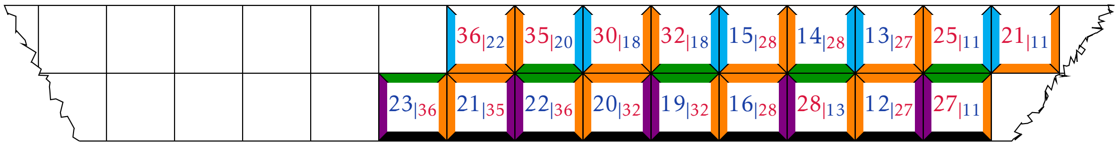
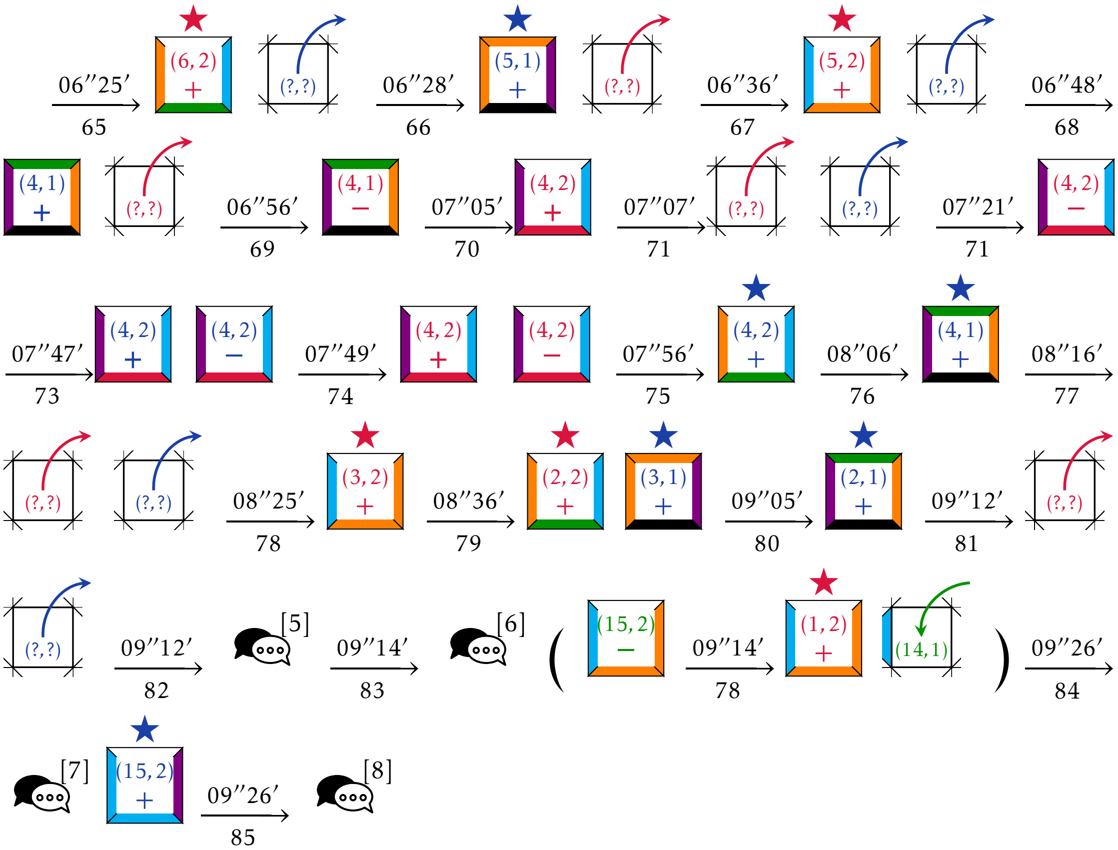


FIGURE G.13 – *Résumé 3.4 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$.*



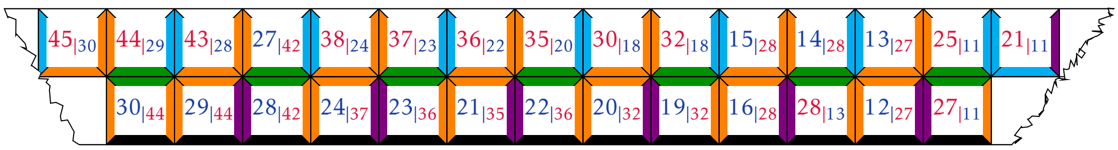
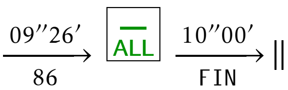


FIGURE G.14 – *Résumé 3.5 : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$.*



Transcription du dialogue [5]

—Par contre il y en a plus de orange et blanc donc on a terminé.

Transcription du dialogue [6]

— Bah si où alors tu le mets là-bas au bout.

— Ah oui.

—Puis là tu mets quelque chose d'autre.

— Bah non.

Transcription du dialogue [7]

—Bah si là tu peux mettre...

Transcription du dialogue [8]

— C'est bon, normalement terminé.

Annexe H

Retranscriptions de l'expérimentation I : le cas du plan $\mathbb{Z}^2$

Le lecteur ou la lectrice trouvera ci-dessous l'illustration de la $\mathcal{Z}_T$, au plus proche de la réalité, concernant la situation du plan. Le plan ici est muni des coordonnées entières pour chacune de ses cellules.

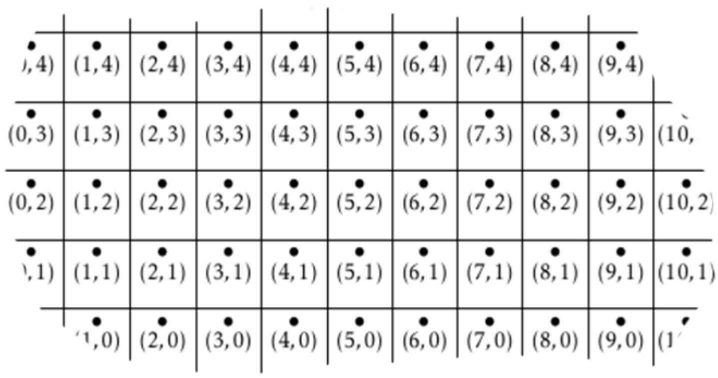


FIGURE H.1 – *$\mathcal{Z}_T$ concernant la situation du plan.*

Pour faciliter la lecture des retranscriptions, nous utiliserons plutôt la grille discrète ci-après.

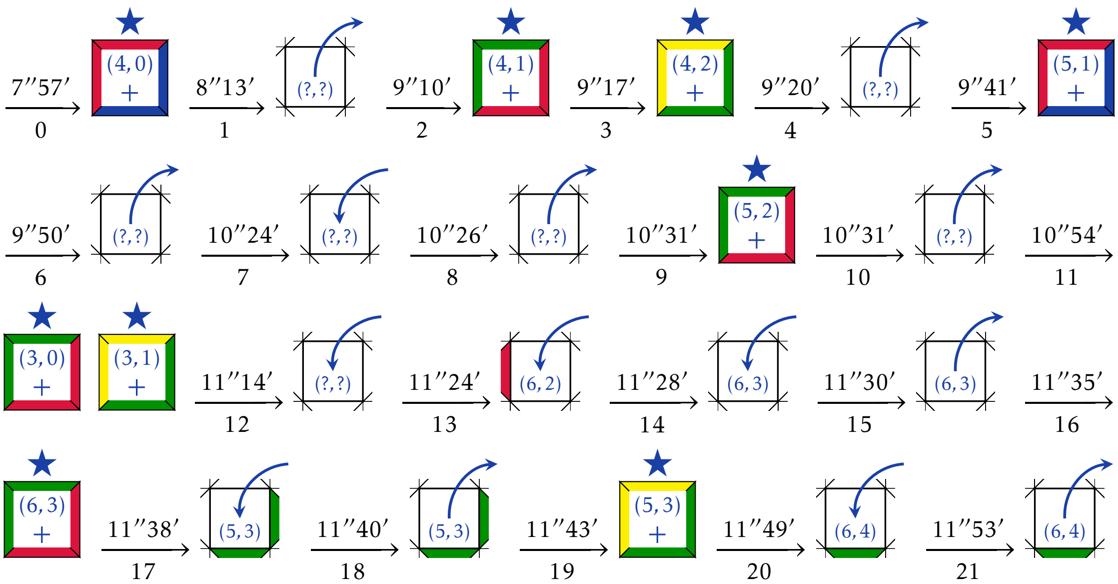
(0,5)	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)	(7,5)	(8,5)	(9,5)	(10,5)
(0,4)	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)	(7,4)	(8,4)	(9,4)	(10,4)
(0,3)	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)	(7,3)	(8,3)	(9,3)	(10,3)
(0,2)	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)	(7,2)	(8,2)	(9,2)	(10,2)
(0,1)	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)	(7,1)	(8,1)	(9,1)	(10,1)
(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(4,0)	(5,0)	(6,0)	(7,0)	(8,0)	(9,0)	(10,0)

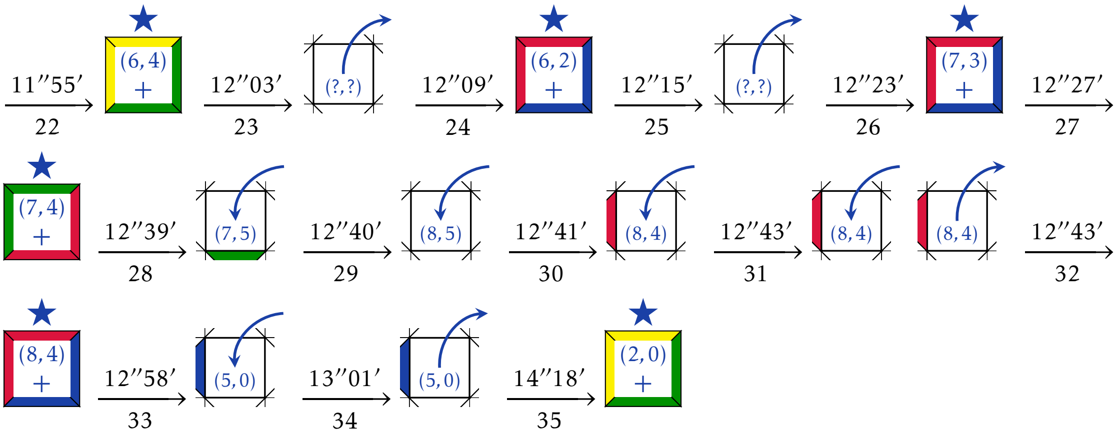
Figure H.2 – *Grille discrète utilisée pour faciliter la lecture des rectranscriptions dans le cas du plan.*

1 Première retranscription : s_3 en activité

Dans cette retranscription s_3 est en activité mais s_2 intervient tout de même une fois sur la $\mathcal{Z}_\mathcal{T}$ alors qu'il est en activité sur une autre situation De fait et afin d'alléger les résumés, nous ne prendrons pas en compte le nombre de ses $\mathcal{T}$-actions.

1.1 Retranscription du fichier `VEXP1_M2_001.mp4`





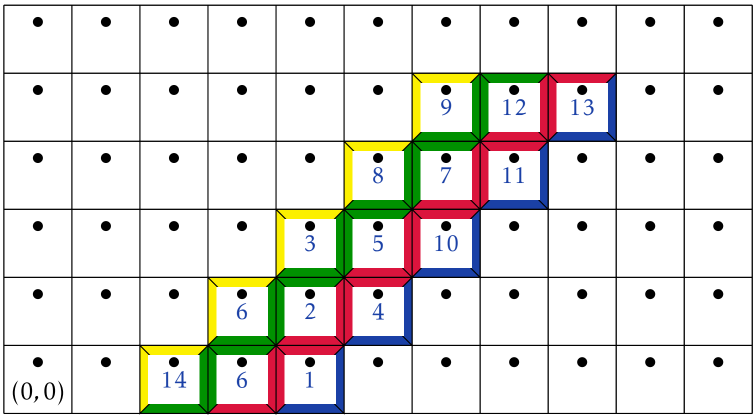
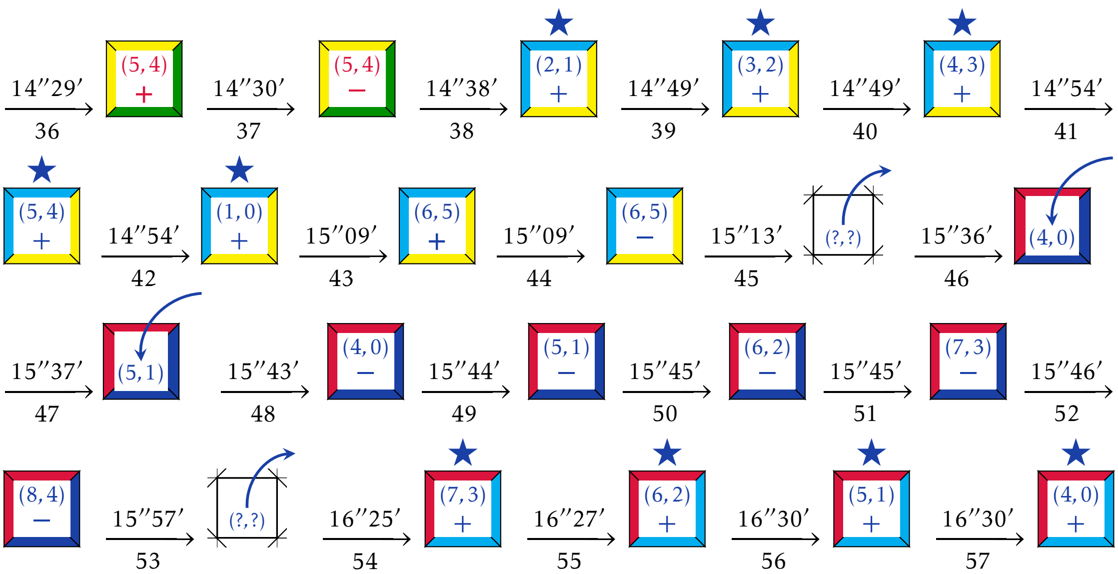
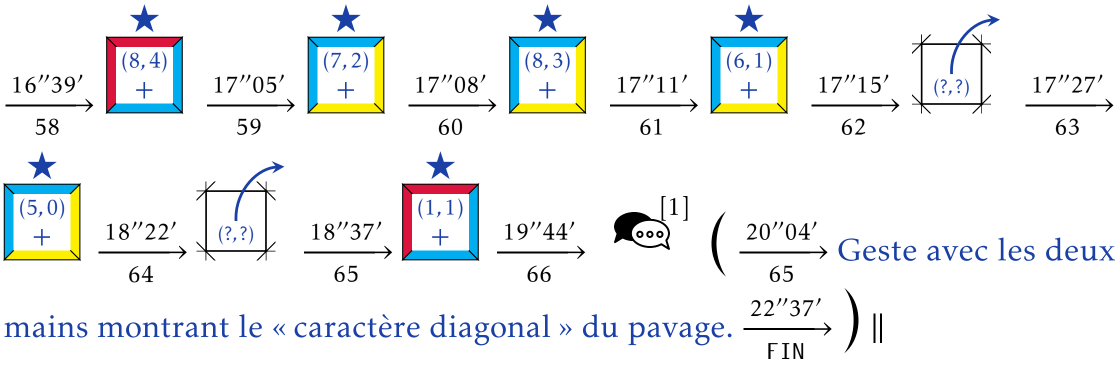


***Figure H.3** – Résumé 1.1 : le cas du plan.*





Transcription du dialogue [1]

Dialogue non audible entre s_3, s_2 et s_1.

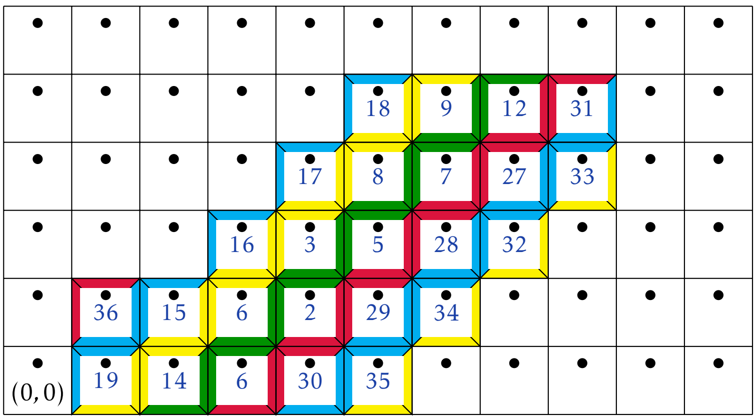
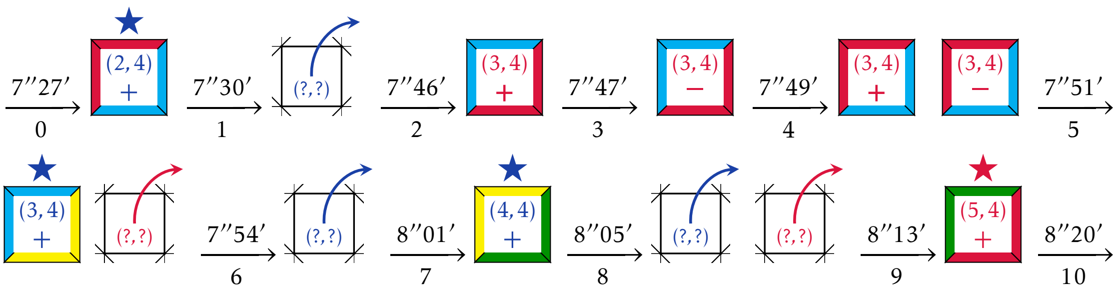


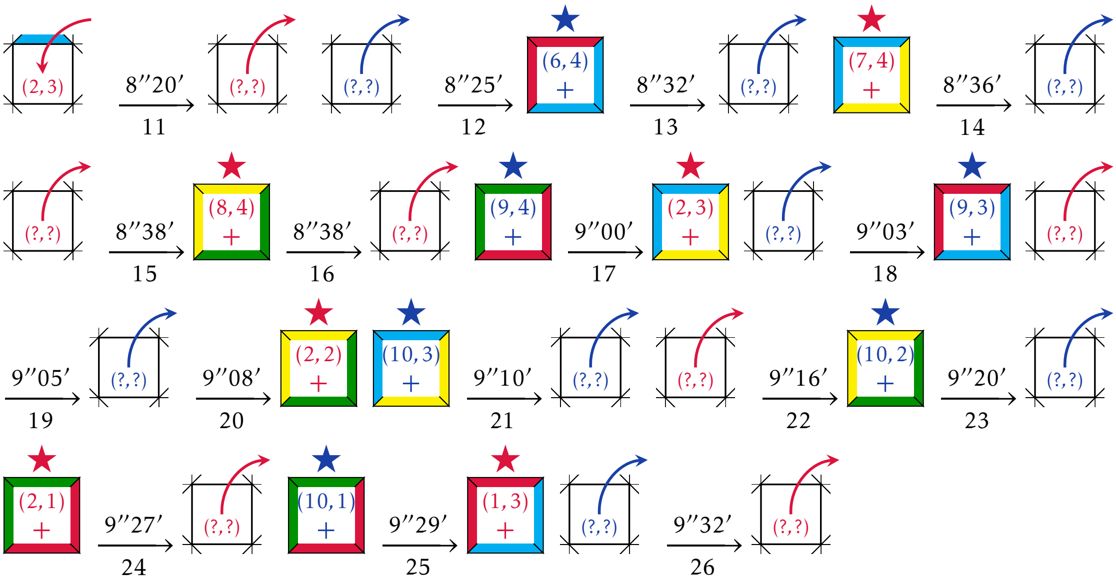
FIGURE H.4 – Résumé 1.2 : le cas du plan.

2 Deuxième retranscription : s_6, s_7 et s_8 en activité

Dans cette partie s_8 est plutôt en retrait et réalise très peu de $\mathcal{T}$-actions ce qui fait que nous avons fait le choix de ne pas en tenir compte dans les résumés.

2.1 Retranscription du fichier `VEXP1_M2_003.mp4`





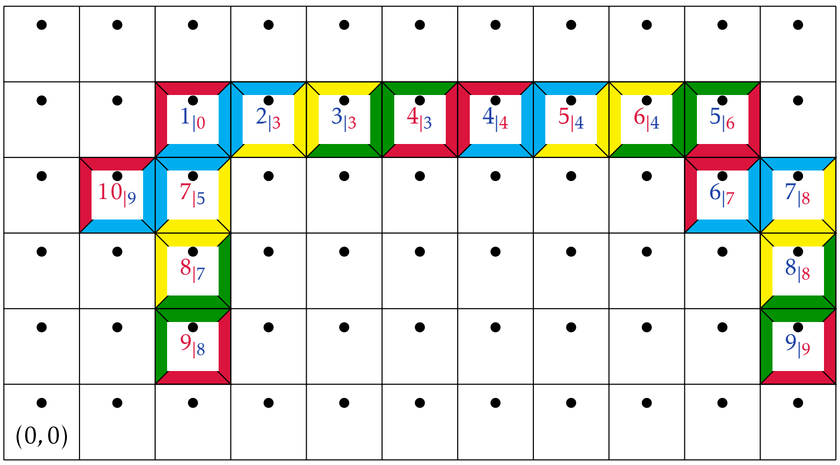
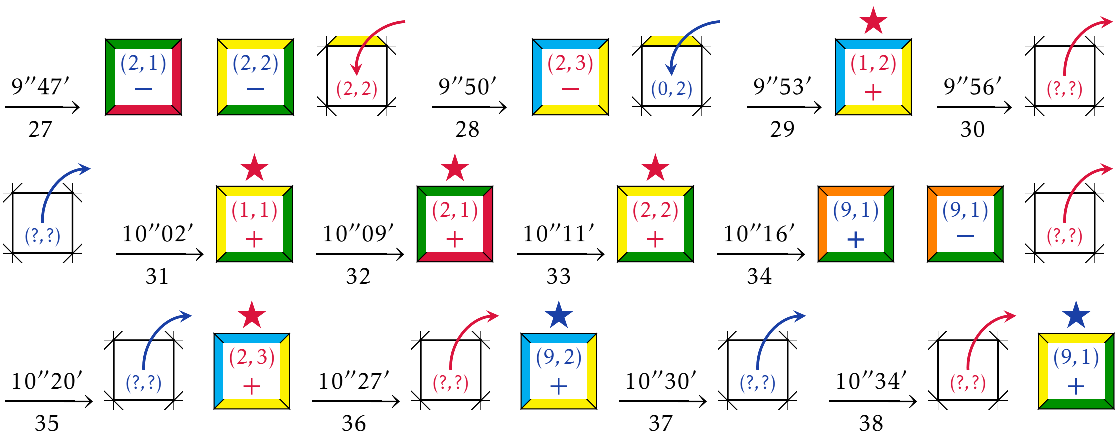
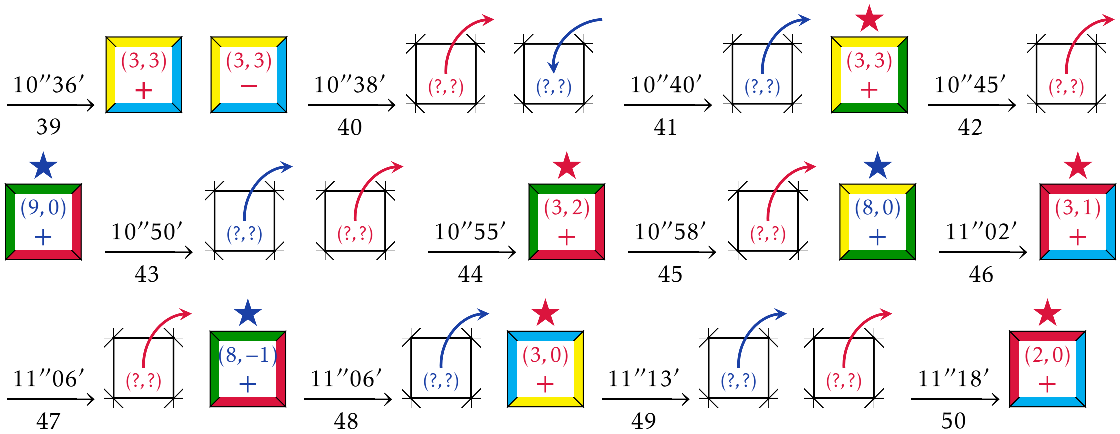


Figure H.5 – *Résumé 2.1 : le cas du plan.*





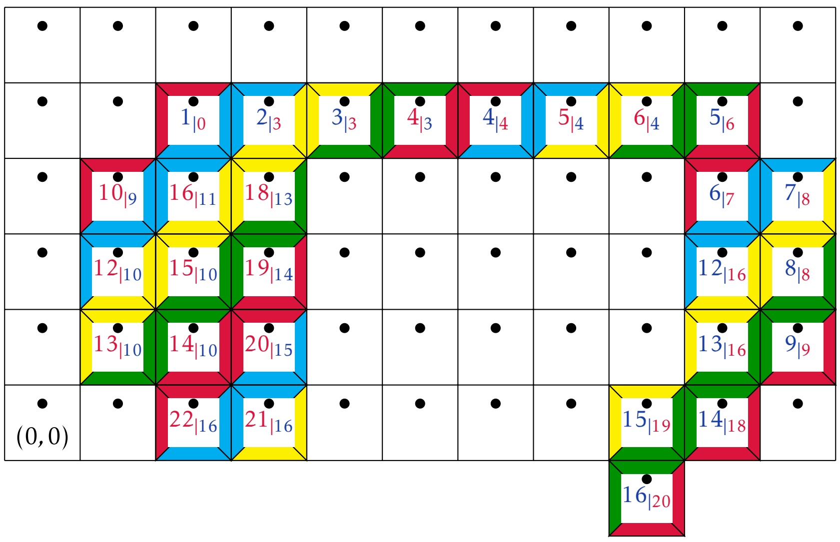
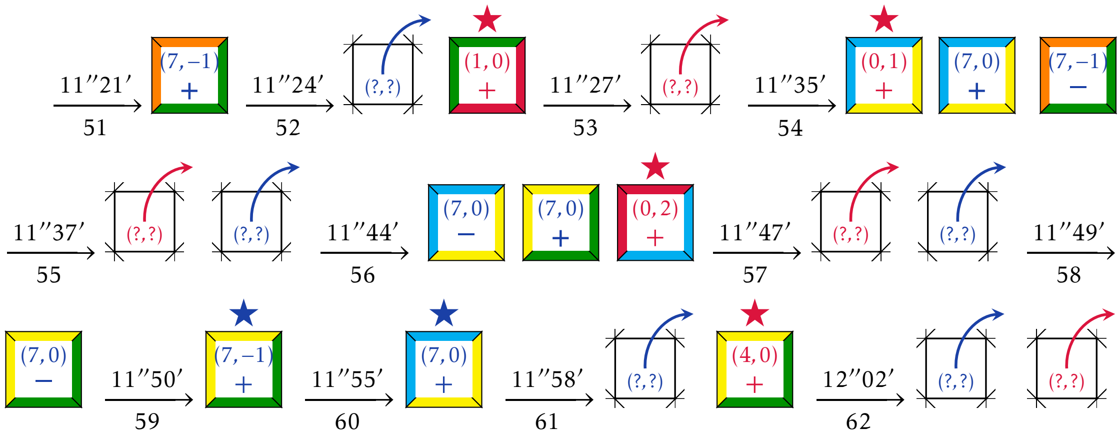
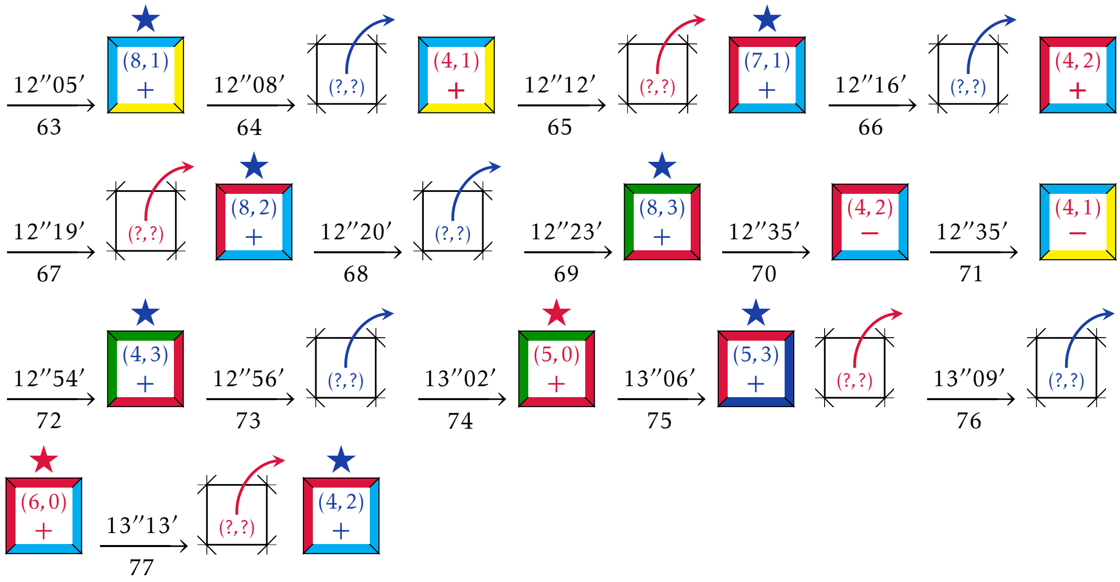


FIGURE H.6 – *Résumé 2.2 : le cas du plan.*





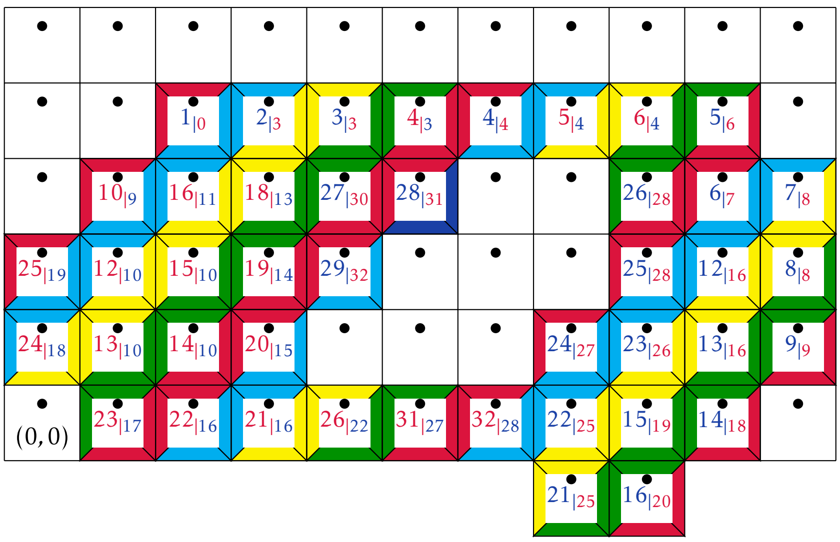
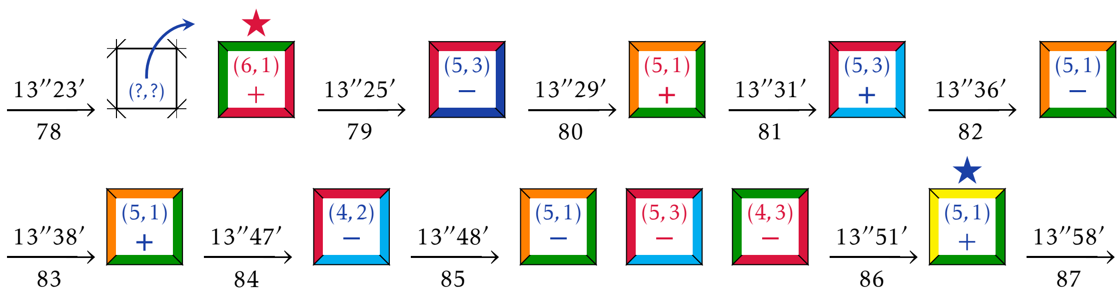
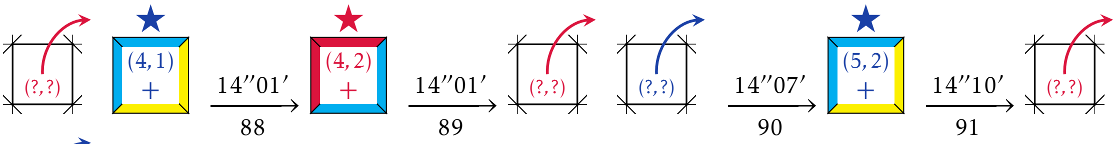
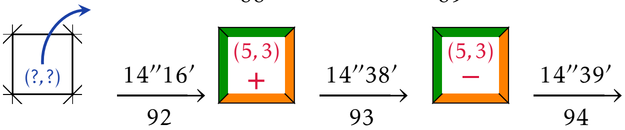


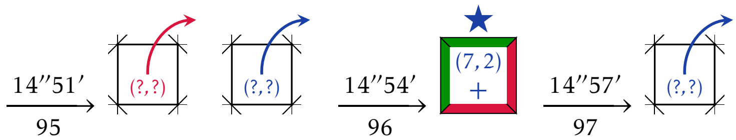
Figure H.7 – *Résumé 2.3 : le cas du plan.*

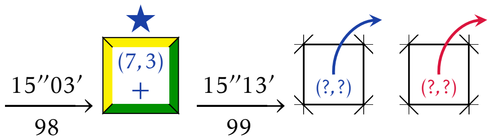






Geste avec les mains qui suit les « diagonales » du pavage.





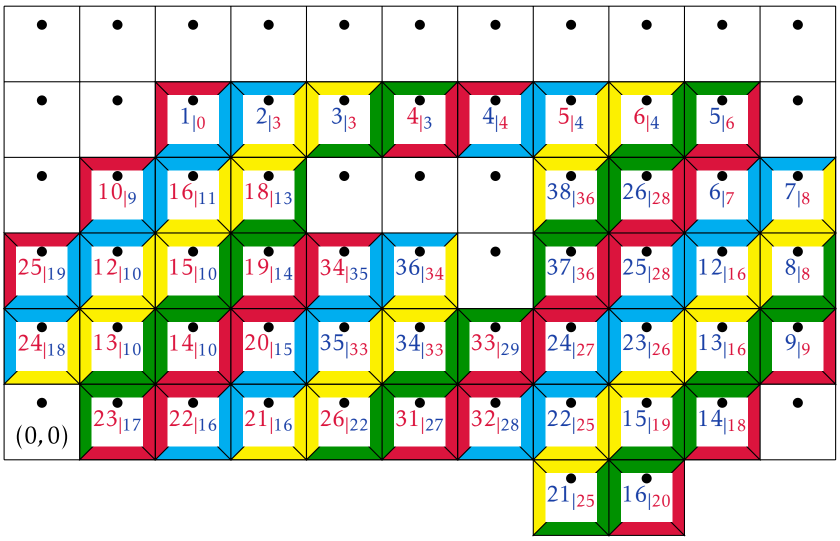
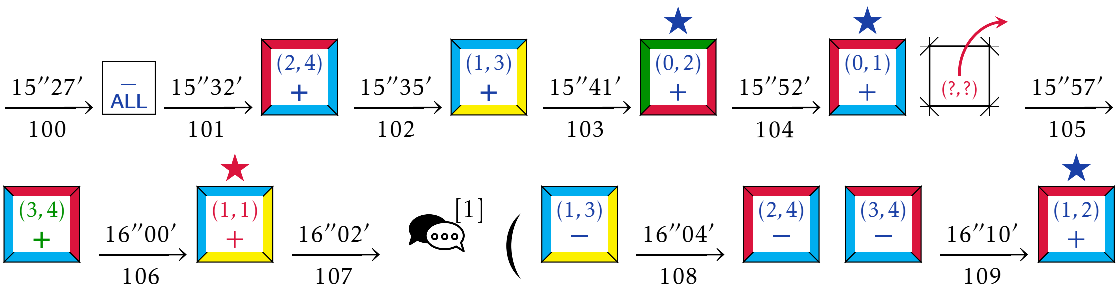
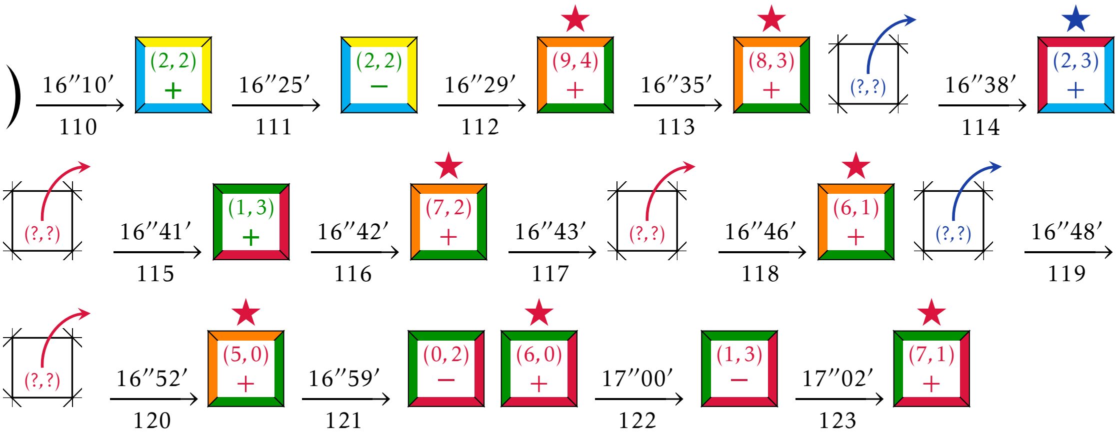


FIGURE H.8 – Résumé 2.4 : le cas du plan.





Transcription du dialogue [1]

— Non !

— C'est la même chose on n'a pas mis de orange ni de violet.

— Oui on les mettra après... chaque chose en son temps.

— Hmm hihihi.

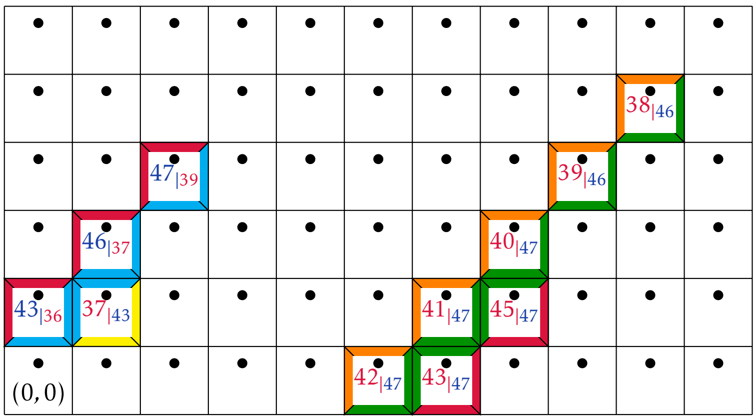
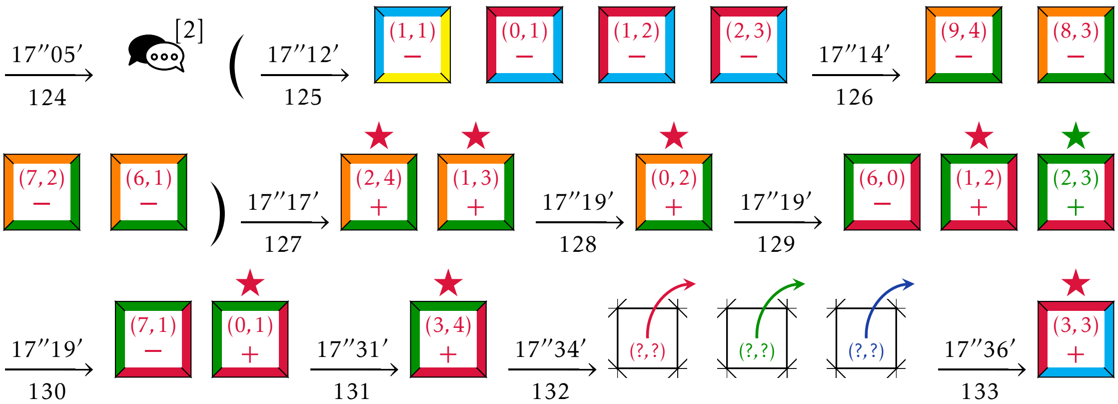
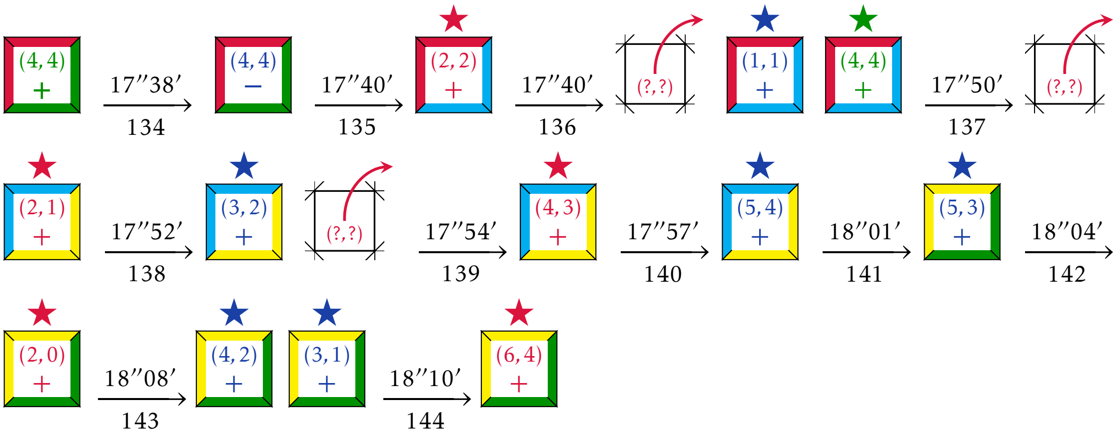


Figure H.9 – *Résumé 2.5 : le cas du plan.*





Transcription du dialogue [2]

— On s'est déjà trompés, y'a pas d'autre pièce qui contient du orange.
— Ah ouais ! *(Il regarde la $\mathcal{Z}_O$).*
— Ah ouais...
— Donc faut les mettre au début.
— Ah mais ouais.

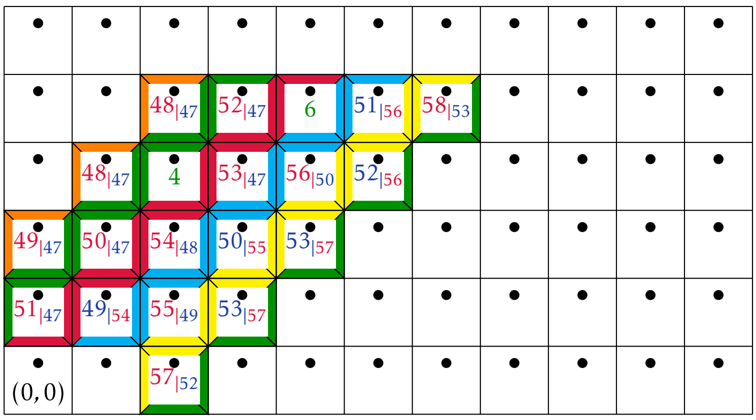
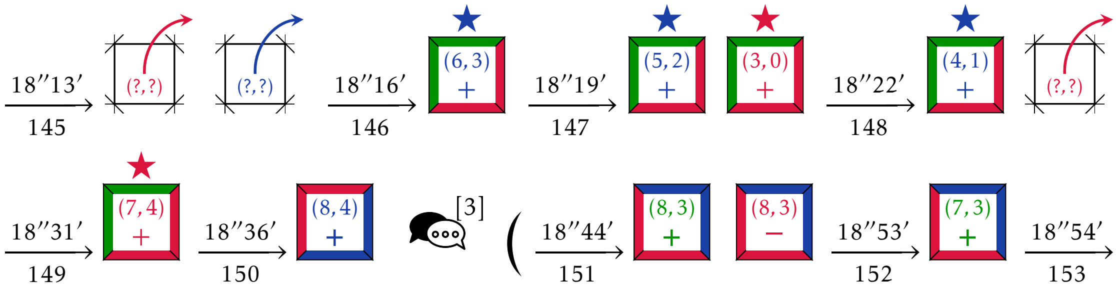
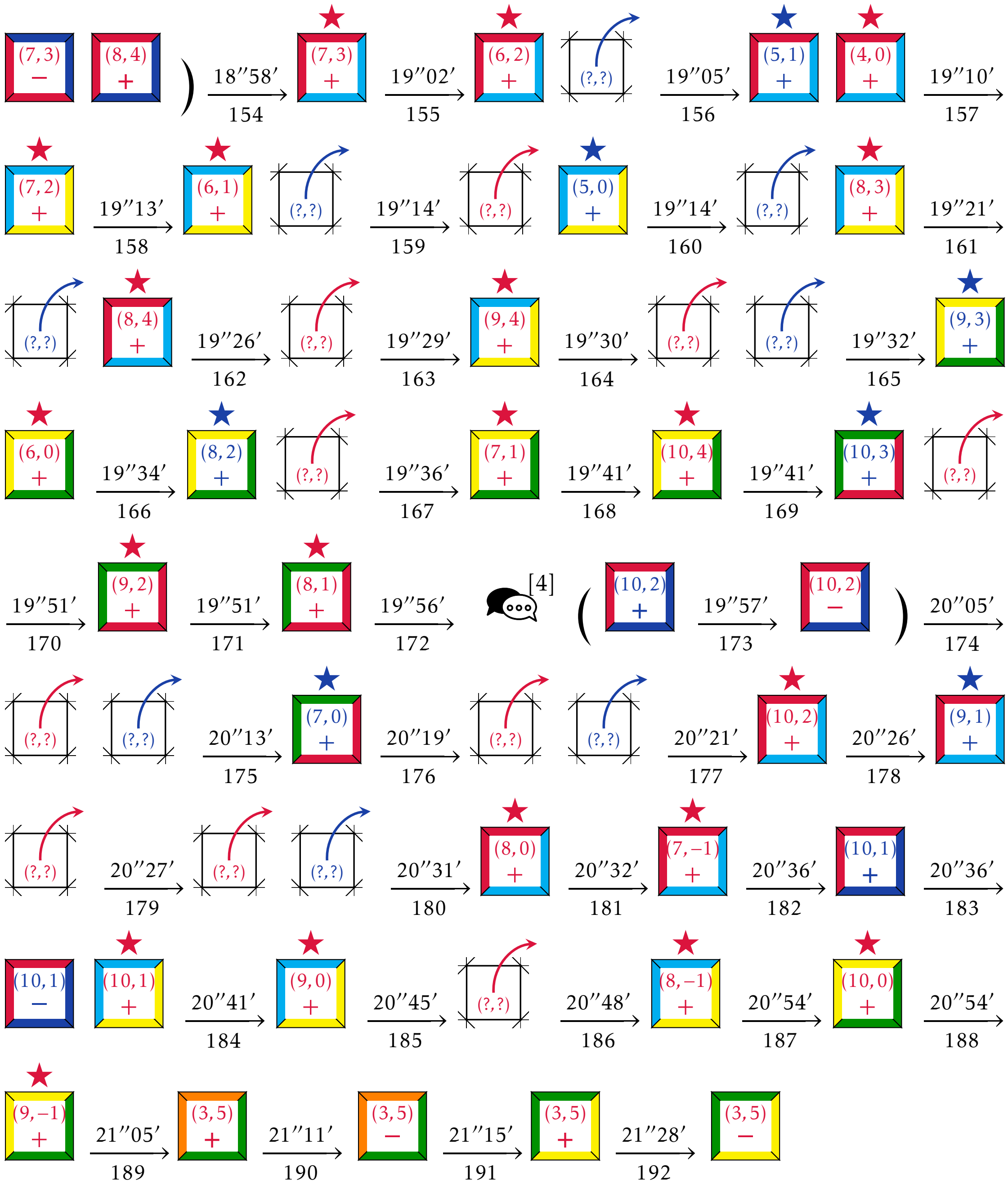


FIGURE H.10 – Résumé 2.6 : le cas du plan.





Transcription du dialogue [3]

— Y'a pas du bleu.

— Mais si.

— Ah ouais pas faux.

— Mais non. il faut que le point là soit là. *(Il montre l'orientation de la tuile à* *sa grand-mère.)*

— Mais même y'a pas de violet. *(Dans nos expérimentations, la couleur bleu foncé est proche de la couleur violette, ainsi dans ce dialogue le violet fait bien référence au bleu foncé.)*

— Non non ça sert à rien.

Transcription du dialogue [4]

— Ah non non non. Y'en a encore des verts et rouges ?

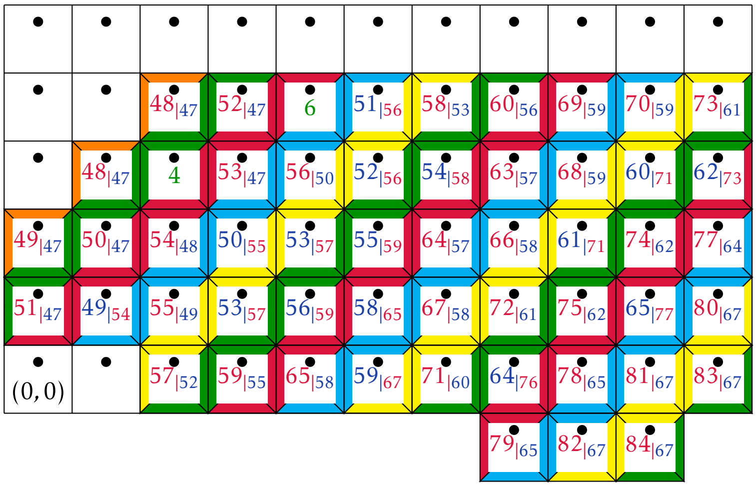
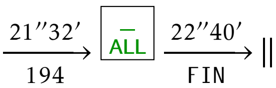
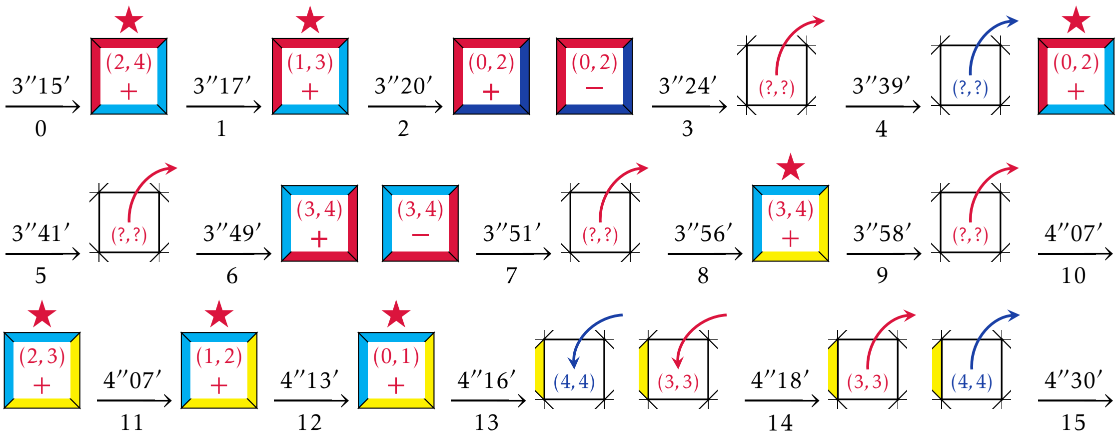
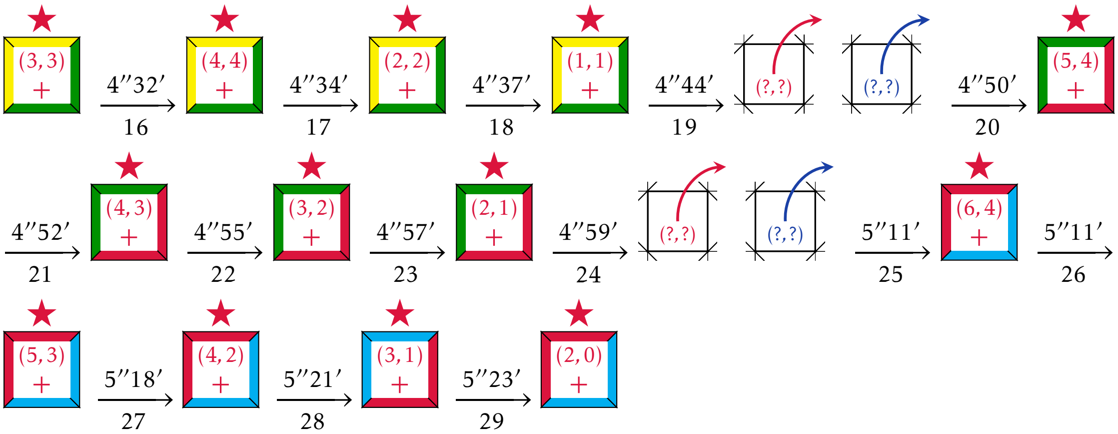


***Figure H.11** – Résumé 2.7 : le cas du plan.*



3 Troisième retranscription : s_4 et s_5 en activité





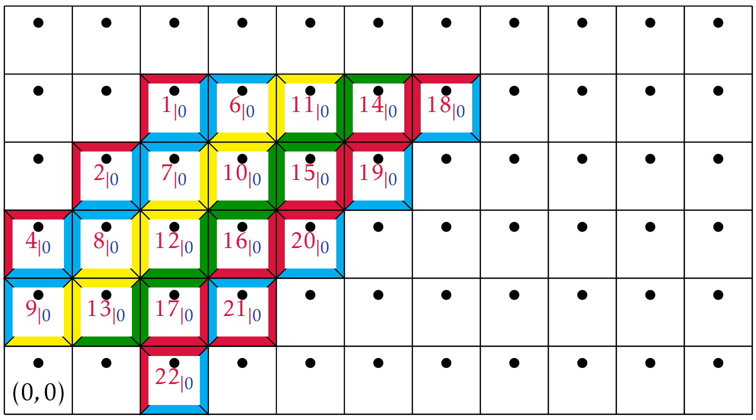
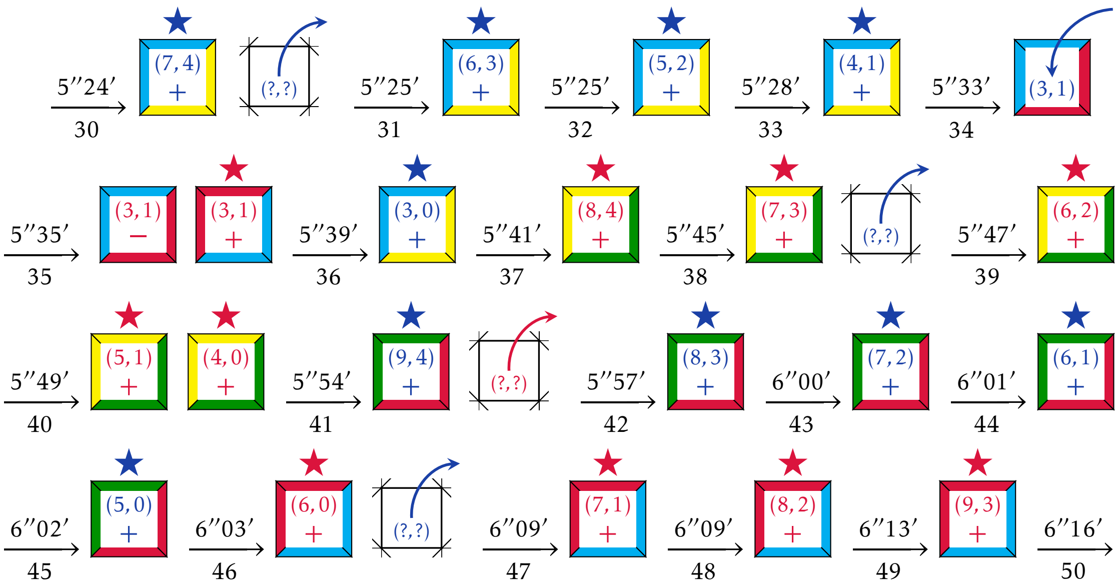


Figure H.12 – *Résumé 3.1 : le cas du plan.*



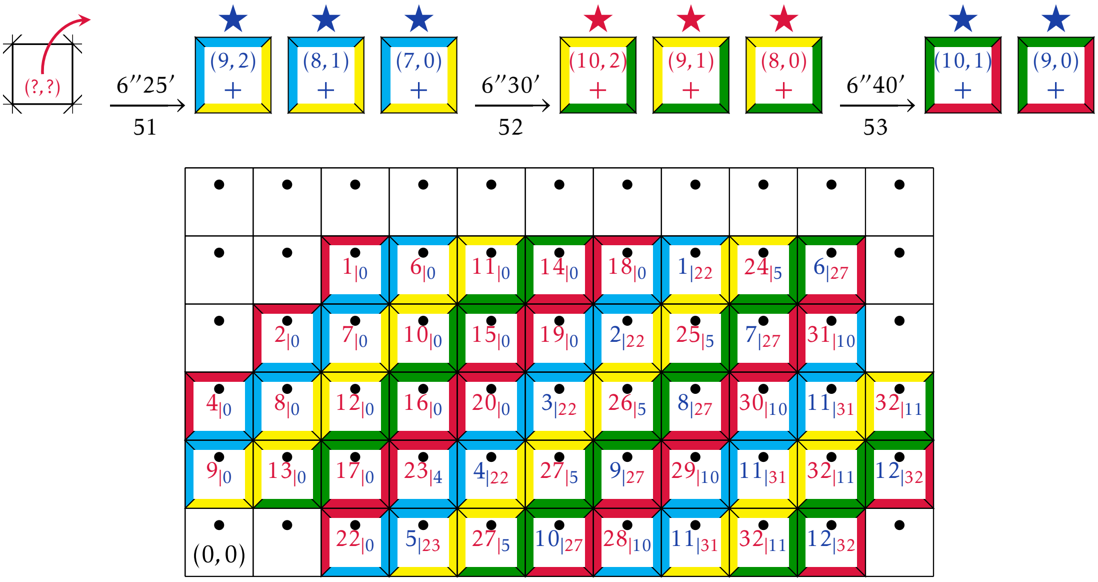
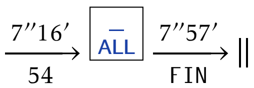


Figure H.13 – Résumé 3.2 : le cas du plan.



Annexe I

Transcriptions des entretiens audio de l'expérimentation I

1 ENT-EXP-I-1

RETRANSCRIPTION Clévos 1_1 (Victor et MD 6 min 48)

[Chercheur] - Alors bonjour, est-ce que tu pourrais me dire déjà comment tu te... tu t'appelles ?
[Victor] - Je m'appelle Victor.
[Chercheur] - Et est-ce que... tu as quel âge Victor ?
[Victor] - J'ai quinze ans.
[Chercheur] - Tu es en quelle classe ?
[Victor] - Je... ben je vais rentrer en première.
[Chercheur] - En première, d'accord. Alors la première question c'était déjà de... de me redire si euh enfin pourquoi euh tu t'es inscrit à cette activité ?
[Victor] - Euh.. parce que les mathématiques ça me passionne et puis là en plus c'était un truc de pavage donc c'était un peu de la combinatoire et euh ...j'aime bien ça.
[Chercheur] - Donc finalement est-ce que tu penses euh avoir fait ce que tu avais prévu en venant ici ?
[Victor] - Hmm... pas encore mais euh enfin pas encore totalement mais oui sinon oui.
[Chercheur] - C'est-à-dire ?
[Victor] - Ben ce que j'avais prévu déjà c'était de

faire un peu toutes les activités, sauf que là j'ai fait que celle-là... sur laquelle j'étais donc euh il me reste encore des choses à faire.

15 [**Chercheur**] - D'accord, alors du coup qu'est-ce que ...tu as fait exactement ?

16 [Victor] - Alors là euh je dois dire l'activité en question ou euh... ?

17 [**Chercheur**] - Oui oui enfin qu'est-ce que tu as fait pendant ces... cette vingtaine de minutes ?

18 [Victor] - Ben j'ai cherché euh... à partir de l' exercice de pavage qu'on me donnait j'ai cherché une manière de généraliser quand est-ce qu'on peut y arriver, quand est-ce qu'on ne peut pas y arriver.

19 [**Chercheur**] - D'accord !

20 [Victor] - Et euh... du coup ben j'ai trouvé un... j'ai trouvé une propriété intéressante et euh.. des manières justement de répondre à cette question.

21 [**Chercheur**] - Alors euh... c'était, c'était justement la question quelle... quelle était cette question sur quelle activité exactement, parce qu'il y avait plusieurs activités ?

22 [Victor] - Oui du coup en fait c'était sur l' activité ou on avait un... enfin chaque tuile avait un poinçon ce qui lui donnait un sens...

23 [**Chercheur**] - D'accord !

24 [Victor] - Et du coup on pouvait plus la re... la la faire... la lui faire faire une rotation...

25 [**Chercheur**] - D'accord !

26 [Victor] - Et du coup on devait paver un... l' espace comme ça, avec du coup un nombre euh... un nombre infini de tuiles au final !

27 [**Chercheur**] - Oui.

28 [Victor] - Mais qui n'avait qu'un seul sens.

29 [**Chercheur**] - D'accord !

30 [Victor] - Et euh...

31 [**Chercheur**] - Alors si tu devais essayer de me... de me faire une question ? Quelle serait la question de ce problème que tu m'as décrit ?

32 [Victor] - Hmm... avec un tel type de tui... enfin avec un tel euh... set en quelque sorte de tuiles...

33 [**Chercheur**] - Oui.
34 [Victor] - Euh ...est-ce qu'on peut y arriver ? Par exemple.
35 [**Chercheur**] - Arriver à recouvrir...
36 [Victor] - Est-ce qu'on peut arriver à recouvrir si on avait un... euh ce check type, si on avait un nombre infini de tuiles de ce type, est-ce qu'on arriverait à recouvrir un espace infini de... de ben de pavage quoi.
37 [**Chercheur**] - D'accord! euh alors du coup euh ben qu' est-ce que tu as obtenu euh... par rapport à ce problème ?
38 [Victor] - Euh...
39 [**Chercheur**] - Quels sont les résultats que... ?
40 [Victor] - Ce que j'ai obtenu, c'est qu'il fallait impérativement pouvoir faire un cycle avec ces tuiles, c'est-à-dire que... imaginons si la... euh le coté de la tuile avec un pinçon c'est un... un degré sortant, il faudrait impérativement qu'une au ... qu'un autre type de tuile ait un... ait une couleur, ait la même couleur que le degré sortant...
41 [**Chercheur**] - Hmm d'accord .
42 [Victor] - Mais en degré rentrant.
43 [**Chercheur**] - Oui.
44 [Victor] - Parce que déjà sinon on peut... on pourrait jamais l'utiliser dans un cycle , et en même temps du coup il faut réaliser à faire une séquence de tuiles euh... comme ça qui permet d' avoir un degré sortant d'une couleur et un... et le, et le degré rentrant d'une même couleur à la fin de ... à la fin et au début de la séquence.
45 [**Chercheur**] - Alors quand tu parles de séquence, une séquence c'est un bande...
46 [Victor] - Une bande de tuiles.
47 [**Chercheur**] - D'accord, et donc là du coup tu arriverais si tu as le... la même couleur... au début et la même couleur à la fin...
48 [Victor] - Ça permet déjà de répliquer cette séquence autant de fois qu'on veut...
49 [**Chercheur**] - Ouais.

50 [Victor] - Et puis aussi étant donné que... et il suffirait juste pour euh pour faire les niveaux au-dessus, de la... de la décaler de un, en fait.

51 [**Chercheur**] - D'accord ! donc là de... c'est-à dire tu prends ta bande et ensuite pour construire ta deuxième bande , qu'est-ce que tu fais avec ta deuxième bande ?

52 [Victor] - Euh ça dépend, si la bande elle est à côté ben j'ai juste à la mettre à co... enfin... si c'est pour rallonger mon niveau ben j'ai juste à la mettre euh à côté et si c'est pour faire le niveau au-dessus ben c'est juste, je la monte puis je la décale de un dans... de... vers la droite... je crois.

53 [**Chercheur**] - D'accord ! et euh alors du coup ma question est la suivante, est-ce que euh tu peux le faire avec n'importe quel type de tuiles de cette sorte ? Puisque là on... on a donné des exemples précis de... de tuiles avec des couleurs précises, est-ce que de manière plus générale, tu as une idée euh...

54 [Victor] - Euh tant qu'on peut faire un cycle en fait ça va... enfin...

55 [**Chercheur**] - Donc, tant qu'on peut faire un cycle, tu arrives à construire...

56 [Victor] - Tant qu'on peut faire un cycle, on peut, j'a ... on peut arriver à construire un ... on peut arriver à paver l'antiquité de l'espace... et puis sinon ben on peut... juste le temps en fait, y a un moment ou ça bloquera.

57 [**Chercheur**] - Alors c'est-à-dire ?

58 [Victor] - Ben y a un moment ou en fait on aura... on pourra pas connecter euh... on pourra pas connecter euh... une couleur avec une autre, puisqu' on n'aura pas de tuiles euh... qui... qui correspondent, et du coup ben... on sera bloqué et on pourra pas terminer le pavage.

59 [**Chercheur**] - Et est-ce-que tu penses qu'il existe des pavages où on peut quand même recouvrir le plan sans qui y ait cette répétition de motifs ?

60 [Victor] - Euh... ben déjà si on avait un nombre infini de couleurs, enfin un nombre infini de types de tuiles...
61 [**Chercheur**] - Oui ...
62 [Victor] - Ben déjà on n'aurait pas besoin de terminer le cycle. Donc du coup on pourrait juste faire une séquence totalement exhaustive de... de tuiles et voilà. Et puis sinon, on parle toujours dans un espace infini euh de... de là où on peut disposer les tuile où... enfin...
63 [**Chercheur**] - Oui oui c'est c'est-à-dire que là, là si tu me dis que tu as un nombre infini de couleurs donc un nombre infini de tuiles, quoiqu'il arrive on pourra toujours trouver euh... on pourra toujours paver le... le plan.
64 [Victor] - Oui !
65 [**Chercheur**] - Effectivement ! mais là si on a un ensemble fini... de tuiles de... de ce même... de même type...
66 [Victor] - Oui mais de quantité infinie ou pas ?
67 [**Chercheur**] - Il y a une quantité infinie mais on a un nombre fini de... de types de tuiles...
68 [Victor] - D'accord.
69 [**Chercheur**] - Est-ce que on ..si on n'arrive pas faire un... un cycle, c'est ce que tu m'as dit hein ?
70 [Victor] - Oui ...
71 [**Chercheur**] - Est-ce qu'on peut quand même construire un pavage du plan alors c'est ce que t'appelle l' espace mais...
72 [Victor] - Euh je pense pas non...
73 [**Chercheur**] - D'accord, mais t'as pas une idée euh... ?
74 [Victor] - Là je vois pas du tout un autre exemple en fait pour montrer que... on pourrait y arriver avec un nombre fini de types euh... sans faire de cycle.
75 [**Chercheur**] - Ok ! euh est-ce que tu as des questions ou des remarques sur l'activité ?
76 [Victor] - Euh pas grand-chose, mis à part que c' était sympa et que du coup je vais faire les autres

aussi.
[Chercheur] - Et ben bonne continuation et puis à tout à l'heure.
[Victor] - Merci.

2 ENT-EXP-I-2

RETRANSCRIPTION Clévos1_2 (Jean et MD 8 min 28)

[Chercheur] - Alors bonjour, alors tout dabord comment tu tappelles s'il te plait ?
[Jean] - Euh je m'appelle Jean [...]

[Chercheur] - Daccord, euh tu as quel âge ?
[Jean] - Euh j'ai dix-huit ans.
[Chercheur] - Tu as dix-huit-ans et tu es en... terminale...
[Jean] - Euh je suis en prépa...
[Chercheur] - En prépa, daccord.
[Jean] - En prépa MPSI oui.
[Chercheur] - Donc tu rentres en prépa MPSI...
[Jean] - Non je finis mon année de sup.
[Chercheur] - D'accord, super! Donc tu rentres en MPS ...SPE, super. Donc j'ai quelques questions à te poser, alors déjà tout d'abord j'aimerais que... tu me redises pourquoi tu as choisi de faire cet atelier et euh donc déjà dans un premier temps c'était de me rappeler de façon un peu plus individuelle euh voilà pourquoi tu as décidé de venir ici?
[Jean] - Euh... Parce que, alors parce que quand j'ai vu le nom de l'atelier sur les dominos de Wang, je me suis dit oui pourquoi pas si c'est un problème intéressant euh ben ça fera qu'enrichir la culture mathématique puis au pire ça donne quelque chose sur lequel réfléchir.
[Chercheur] - D'accord, super... alors du coup est-ce-que tu penses avoir fait ce pour lequel tu étais venu ici euh aujourd'hui?

17 [Jean] - Ah ben... enfin genre j'ai on a ... étudié une partie, on a pu étudier une partie du problème là...

18 [**Chercheur**] - Oui...

19 [Jean] - C'est clairement pas ce qui rend pas le cas général mais...

20 [**Chercheur**] - Oui d'accord

21 [Jean] - Et du coup... enfin moi ça permet de poser des bases, genre de voir qu'est-ce qui pourrait être intéressant de regarder pour un cas général...

22 [**Chercheur**] - Alors du coup ma question c'était de savoir qu'est-ce-que tu as fait du coup pendant cette activité ?

23 [Jean] - Parce que du coup, l'atelier là on a regardé euh ben globalement enfin ce qu'on peut comprendre c'est que le cas général c'est on met des dominos, on n'a pas de sens imposé, on veut juste que quand on met deux dominos côte à côte, les cotés correspondent et comment est-ce qu'on peut paver le plan avec. Donc là sur l'atelier on a vu le cas d' une ligne...

24 [**Chercheur**] - Donc une bande d'accord...

25 [Jean] - Une bande, on impose, on impose une sorte de sens aux dominos...

26 [**Chercheur**] - D'accord.

27 [Jean] - Dans le cas de la bande n par un ça imposait enfin... ça réduisait de moitié le nombre de sens possible.

28 [**Chercheur**] - D accord.

29 [Jean] - Et on voulait voir comment paver, du coup, enfin, au bout d'un moment on se rendait compte qu'il fallait étudier un cycle genre si on arrivait à mettre deux fois le même domino il y avait un truc continu entre...

30 [**Chercheur**] - Oui ....

31 [Jean] - En partant du principe quand on a une infinité de pièces, on arrivait à paver tout le plan un par n...

32 [**Chercheur**] - Toute la bande ...

33 [Jean] - Oui toute la bande.

34 [**Chercheur**] - Oui !

35 [Jean] - Après euh du coup le cas ... on avait après, on avait le cas avec deux lignes...

36 [**Chercheur**] - D'accord !

37 [Jean] - Avec deux lignes distinctes, c'est-à-dire en gros il y avait des dominos qui pouvaient aller que sur la première ligne, des dominos qui pouvaient aller que sur la seconde ligne, du coup ça revient un peu au premier cas. On imposait un sens total, on regardait les cycles sur chaque ligne. Puis après fallait vraiment s'intéresser à tous les cycles, comment... si ils peuvent s'emboiter entre-eux...

38 [**Chercheur**] - D'accord...

39 [Jean] - Sur des lignes différentes...

40 [**Chercheur**] - D'accord.

41 [Jean] - Et puis après euh... le troisième cas, c'est en imposant un sens sur tout le plan, et que cette fois le plan était infini et du coup par contre il n'y avait pas de distinction entre les lignes du coup c'était juste construire un cycle. Enfin... regarder tous les cycles sur une ligne et regarder lequel s'emboite avec les autres ou entremêle et cetera...

42 [**Chercheur**] - D'accord, alors du coup ma question est la suivante ,c'est, est-ce-que déjà d'une part donc vous avez regardé ces deux types d'activité ?

43 [Jean] - Hmm.

44 [**Chercheur**] - Est-ce-que vous pouvez me reformuler le problème pour chacune des deux activités ? Et me donner vos résultats par rapport à ce problème.

45 [Jean] - Euh...

46 [**Chercheur**] - Vos résultats ou ce que vous avez obtenus euh dans le cas de la bande de largeur un et de largeur deux.

47 [Jean] - Euh du coup pour la bande de largeur un, ce qu'on a [...]

48 [**Chercheur**] - Donc, je reprends, ça serait reformuler

donc les deux questions euh des deux activités et puis me donner euh si vous avez obtenu des résultats . Est-ce-que vous pouvez me dire ce que vous avez obtenu ?

49 [Jean] - Déjà le cas de la bande un par n ça on peut se ramener à des dominos avec deux cases. C'est -à-dire, on peut... enfin avec des dominos avec juste deux couleurs, par contre du coup qu'on peut pivoter dans un sens ou dans l'autre...

50 **[Chercheur]** - D'accord, puisqu'on n'a pas imposé, effectivement...

51 [Jean] - On veut juste qu'il y ait les deux... les deux morceaux noirs qui soient euh dans un sens ou dans l'autre.

52 **[Chercheur]** - D'accord ok...

53 [Jean] - Donc s'arrêter verticalement. Et du coup en fait euh enfin à partir du moment ou on a une pièce... enfin un type de domino en quantité infinie , de toute façon on pourra, on pourra paver toute la ligne...

54 **[Chercheur]** - D'accord.

55 [Jean] - Juste en alternant.

56 **[Chercheur]** - Ok.

57 [Jean] - Voila !

58 [Jean] - En fait du coup, le cas deux par deux euh ... cette fois on impose un sens c'est-à-dire que on ne pourra vraiment plus faire de cas en alternant .. on ne pourra plus paver une ligne en alternance. Du coup maintenant on est obligé de considérer deux types de dominos différents. Alors faut procéder par un peu pousser...on peut essayer de manière exhaustive, c'est-à dire on peut déjà essayer éliminer des cas, c'est-à-dire un domino si jamais il est le seul à posséder une couleur à droite, par exemple s'il possède la couleur violette à droite et que du coup euh aucun domino de son type possède la même couleur à gauche, du coup on ne pourra jamais l'utiliser pour construire un cycle , du coup il nous sert à rien. On peut l'enlever. Et puis après ce qu'il nous reste après c'est des

dominos qui peuvent faire chacun... qui peuvent chacun posséder un voisin à droite et à gauche. Euh quand... si on en a un nombre fini, on peut les mettre à la suite chacun ...chacun poser sur un de ses voisins possibles. A la fin on tombera bien sur un cycle. Si on a un nombre fini de dominos on retombera bien sur [...]

59 [**Chercheur**] - Donc en fait vous avez procédé si d'abord vous avez essayé de paver une bande ...

60 [Jean] - Oui une bande...

61 [**Chercheur**] - Ensuite vous avez essayé de paver la bande du dessous...

62 [Jean] - Oui...

63 [**Chercheur**] - Et après vous avez regardé si on pouvait faire coïncider par empilement euh... et du coup est-ce-que vous avez trouvé un motif...

64 [Jean] - Oui on a trouvé un motif. C'est à chaque fois un cycle de longueur deux en haut et ensuite de longueur deux en bas, ils sont décalés...enfin ...

65 [**Chercheur**] - D'accord !

66 [Jean] - Voilà... dans le cycle que j'avais trouvé ils étaient décalés...donc ...

67 [**Chercheur**] - Ils sont décalés, mais du coup est-ce-qu 'on peut euh ... même quand on les empile, est-ce-que ça coïncide ...

68 [Jean] - Oui ...

69 [**Chercheur**] - De couleur Nord et Sud ?

70 [Jean] - Ouais.

71 [**Chercheur**] - D'accord, ok ! de toute façon on regardera ça sur la vidéo! et... la dernière question c'était de savoir euh... euh... est-ce-que vous avez des... enfin comment s'est déroulée votre activité ? Est-ce-que à un moment vous avez eu ... euh quelque chose qui ne marchait pas ?... euh ou est-ce-que vous êtes arrivé tout de suite à exhiber un cycle... euh avec vos dominos ?

72 [Jean] - Après, enfin... c'était un peu... oui au départ il fallait quand même prendre le temps d'essayer de voir déjà tous les types qui étaient

présents sur la table, tous les types de dominos... Après... fallait déjà essayer de trouver un critère ... je me suis surtout occupé du cas deux par deux ... enfin du cas avec deux lignes. Du coup il fallait surtout essayer de...de voir euh quel critère permettait de séparer les dominos qu'on possédait.

73 **[Chercheur]** - D'accord.

74 [Jean] - Enfin, fallait regarder... pas tout de suite... comme j'allais devoir regarder vite fait le cas avec une ligne... je pensais que c'était noir aussi en haut et en bas...

75 **[Chercheur]** - D'accord.

76 [Jean] - Mais du coup j'ai pas tout de suite regardé qu'il y avait du blanc en haut... Ce qui fait que au départ c'était un peu plus... c'était un peu plus compliqué ben après... j'ai quand même vu à un moment qu'il y avait du blanc en haut...

77 **[Chercheur]** - D'accord.

78 [Jean] - Et... du coup euh du coup enfin ça va quand même un peu plus vite et puis regarder... quand même du coup regarder les critères enfin regarder les critères... pour enlever un domino... pour trouver ce qui nous intéresse pas ça par contre ...

79 **[Chercheur]** - Donc vous avez enlevé des dominos que ne servaient pas dans le...

80 [Jean] - Ouais.

81 **[Chercheur]** - ok! Et du coup la dernière question ça serait de savoir du coup si vous avez des questions ou des remarques générales soit matérielles, le problème en question?

82 [Jean] - Euh du coup c'est un problème ouvert ?

83 **[Chercheur]** - Le problème de Wang c'est un problème... le problème dans le cas des bandes infinies, quand je parle de bandes infinies du plan...

84 [Jean] - Oui.

85 **[Chercheur]** - Quand on veut paver le plan c'est un problème qui est indécidable.

86 [Jean] - Ah d'accord...

87 [**Chercheur**] - C'est-à-dire qu'il n'y a aucun super calculateur qui est capable de trouver un algorithme qui permet de répondre par oui ou par non au problème de décision est-ce-qu'on peut, avec une certaine collection tuiles, pouvoir paver le plan ? Donc ça était démontré indécidable. Dans le cas de la bande euh... de largeur un ou de largeur deux ou de largeur trois, le problème est décidable en un temps raisonnable et puis après sur le cas des rectangles je vous laisse découvrir euh... la suite ...

88 [Jean] - Et du coup, enfin ,par contre si on impose un sens?

89 [**Chercheur**] - C'est-à-dire si on impose un sens ?

90 [Jean] - Euh... Enfin... Parce que...

91 [**Chercheur**] - Parce que le problème de Wang, on a interdit les rotations.

92 [Jean] - Ah !

93 [**Chercheur**] - En fait, pour là, là il n'y a pas eu besoin d'interdir les rotations, pourquoi ? Parce qu 'on a fixé les couleurs au Nord et au Sud. Donc forcément les tuiles étaient déjà imposées, on a déjà imposé les couleurs. Euh par contre pour le problème général d'un plan, on a une collection de tuiles et on a une tuile où il est interdit de faire des réflexions, des rotations sur la tuile ...

94 [Jean] - D'accord.

95 [**Chercheur**] - Il y a juste les translations qui sont autorisées.

96 [Jean] - Ok!

97 [**Chercheur**] - Voilà, mais comme on a imposé la couleur Nord et Sud, du coup, là, il n'y a plus ce souci-là , il n'y a plus ce souci là.

98 [Jean] - Ok !

99 [**Chercheur**] - Voilà, je vous laisse découvrir...

100 [Jean] - C'est assez intéressant !

101 [**Chercheur**] - D'accord, ben super !

102 [Jean] - Merci !

103 [**Chercheur**] - De rien, merci à vous.

3 ENT-EXP-I-3

RETRANSCRIPTION Clévos1_3 (Arnaud et MG 8 min 23s)

[Chercheur] - Voilà, vas-y, alors dis moi pourquoi, redis-moi pourquoi tu étais venu ici ?
[Arnaud] - Euh parce que j'aime bien les maths et tout ça.
[Chercheur] - Ouais.
[Arnaud] - La suite logique euh voilà...
[Chercheur] - Ok et... donc très bien et est-ce que tu penses que... tu as fait des maths, des suites logiques dans ce que t'as fait tout à l'heure là ?
[Arnaud] - Euh oui des fois, sur quelques énigmes.
[Chercheur] - Ok...et est-ce que tu pourrais me dire finalement euh enfin qu'est-ce que tu as fait euh et ce que tu as le sentiment d'avoir traité une question, un problème euh voilà ?
[Arnaud] - Euh oui.
[Chercheur] - Alors, vas-y est-ce que tu pourrais me le décrire ?
[Arnaud] - Ben c'est au niveau des contraintes si il y a, si il y a quatre contraintes cela devient très difficile et si il y en a trois moins difficile et si il y en a deux...
[Chercheur] - Alors les contraintes c'était quoi ?
[Arnaud] - Ben comme... euh celui avec la bande noire...
[Chercheur] - Oui.
[Arnaud] - Une bande noire, ben lui il avait qu'une contrainte euh... il y en avait deux et c'était très facile.
[Chercheur] - C'était très facile de faire quoi ?
[Arnaud] - Ben... ben de mettre un noir en bas un noir en haut et après les assembler.
[Chercheur] - Voilà.
[Arnaud] - Et ou du vert avec du vert et voilà.
[Chercheur] - Voilà en gardant les contraintes, les couleurs les unes à côtés des autres, ok et c'était

... alors qu'est-ce-que c'est que tu as essayé de recouvrir, celui qui avait du noir tu dis, tu as essayé de recouvrir c'était quoi la forme ?

23 [Arnaud] - Ben c'était une bande.

24 **[Chercheur]** - Une bande ? est-ce qu'elle était...

25 [Arnaud] - C'était facile.

26 **[Chercheur]** - Une bande ou un rectangle ?

27 [Arnaud] - C'était une bande.

28 **[Chercheur]** - Est-ce qu'elle était limitée la bande ou pas ?

29 [Arnaud] - Non elle était illimitée.

30 **Chercheur]** - D'accord, et alors à ton avis, est-ce-que tu as réussi à le faire ?

31 [Arnaud] - Ben oui vu que ça est illimité faut juste le nombre de pièces euh illimitées.

32 **[Chercheur]** - D'accord et c était sûr que ça marchait quelque soit le... comment tu t'y es pris ? Est-ce que tu arrives à... à te souvenir comment tu t'y es pris pour montrer que c'était possible ?

33 [Arnaud] - Ben... y avait du noir, on le posait et après on regardait un autre à poser, y avait pas vraiment de technique.

34 **[Chercheur]** - Et c'était une bande de quelle hauteur ?

35 [Arnaud] - Euh de un.

36 **[Chercheur]** - De un carreau, ok, est-ce que tu as essayé de faire euh autre chose sur le...

37 [Arnaud] - Non, on a fait qu'une euh figure.

38 **[Chercheur]** - Vous avez fait que la bande avec une seule ligne ?

39 [Arnaud] - Qu'une qu'une ligne, oui.

40 **[Chercheur]** - D'accord.

41 [Arnaud] - Mais après il y a plein de possibilités, je pense.

42 **[Chercheur]** - Alors vas-y!

43 [Arnaud] - Ben il y a plein de possibilités, parce que... Je ne sais pas comment dire. Euh...vu que c'est une bande et ben on peut faire plusieurs combinaisons comme avec un collier.

44 **[Chercheur]** - Plusieurs solutions de... ça s'appelle

un pavage, un pavage. Quand tu recouvres en mettant des carreaux partout, ça s'appelle euh... paver une bande. Et...mais il y a plusieurs, y a tu dis il y a plusieurs solutions mais est-ce que tu as, est-ce que tu as utilisé toutes les tuiles, est-ce que tu as utilisé seulement certaines tuiles ?

45 [Arnaud] - Pas toutes.

46 [**Chercheur**] - Les tuiles c'est les... petits carreaux hein.

47 [Arnaud] - Oui pas toutes, on avait pas... on avait toutes quoi, y en avait qu'on s'en servait pas...

48 [**Chercheur**] - Ok.

49 [Arnaud] - Il y a des couleurs qu'on s'en servait pas.

50 [**Chercheur**] - D'accord.

51 [Arnaud] - Ça faisait un peu une suite logique des fois.

52 [**Chercheur**] - Oui, oui, c'en est une.

53 [Arnaud] - Et...

54 [**Chercheur**] - Voilà, donc du coup toi tu penses que tu as réussi à recouvrir euh une, une bande d'une hauteur de un carreau ?

55 [Arnaud] - Oui.

56 [**Chercheur**] - Avec euh noir et noir, c'est ça ?

57 [Arnaud] - Oui.

58 [**Chercheur**] - Et euh... ben voilà, ça peut toujours marcher et qu'il y a plein de solutions.

59 [Arnaud] - Oui.

60 [**Chercheur**] - C'est ça ton... ben voilà. Donc c'est ça que tu penses que tu as... tu en es sûr, tu en es sûr que c'est comme ça ? ok ben très bien. Alors euh, je voulais te demander une dernière euh, et si tu avais des remarques à faire euh... Sur euh... ben comment est présentée euh l'activité, enfin voilà si tu as des choses à me dire.

61 [Arnaud] - Ben, moi j'ai bien aimé...

62 [**Chercheur**] - Oui.

63 [Arnaud] - Et...

64 [**Chercheur**] - Est-ce-que tu as fait du lien entre les différentes... les différents jeux qui étaient euh

sur la table ?
65 [Arnaud] - Ben [...]
66 [Chercheur] - Non ? parce-qu'il y avait les gens... tu n'as pas... tu n'as pas regardé ce qu'il y avait à côté ?
67 [Arnaud] - Euh j'ai fait la bande et le... et la bande avec deux...
68 [Chercheur] - Ah!
69 [Arnaud] - Avec deux colonnes aussi.
70 [Chercheur] - La bande à deux... oui deux lignes.
71 [Arnaud] - Oui.
72 [Chercheur] - Deux lignes ?
73 [Arnaud] - Oui.
74 [Chercheur] - Ah! très bien. Et la bande à deux lignes est-ce qu'elle est infinie ou est-ce qu'elle est...
75 [Arnaud] - Ben elle est... ben elle a une suite logique aussi.
76 [Chercheur] - Oui.
77 [Arnaud] - Donc ça peut être infini.
78 [Chercheur] - Et est-ce que...
79 [Arnaud] - C'est une colonne, une colonne, et après ça répète... indéfiniment.
80 [Chercheur] - Alors qu'est-ce que c'est que tu répètes indéfiniment ? tu dis une colonne, une colonne, c'est-à-dire que c'est un carré ? un carré de deux ?
81 [Arnaud] - Ben c'est oui...ben il y a deux colonnes , et ben tu le répètes à côté.
82 [Chercheur] - Voilà.
83 [Arnaud] - Tu le répètes à côté et...
84 [Chercheur] - Donc un carré de deux ?
85 [Arnaud] - Voilà. Oui.
86 [Chercheur] - C'est ça. Donc c'est un motif que tu as répété indéfiniment.
87 [Arnaud] - Oui.
88 [Chercheur] - Et tu es sûr que ça va marcher ?
89 [Arnaud] - Oui. Tant que tu as les mêmes tuiles euh ... ouais. Euh...
90 [Chercheur] - Oui, tant que...
91 [Arnaud] - Tant que tu as les mêmes tuiles...
92 [Chercheur] - Tant qu'il y en a une quantité infinie

voilà...

93 [Arnaud] - Oui.

94 [**Chercheur**] - D'accord. Ben voilà, ça c'est un autre résultat que tu as fait.

95 [Arnaud] - Hum!

96 [**Chercheur**] - Bon ben très bien! c'est... tu as traité deux problèmes voilà.

97 [Arnaud] - Hmm!

98 [**Chercheur**] - Ok, tu as d'autres choses à...

99 [Arnaud] - Euh Il y avait le rectangle avec euh... plusieurs...

100 [**Chercheur**] - Oui!

101 [Arnaud] - Problèmes...

102 [**Chercheur**] - Et alors tu as été cherché...

103 [Arnaud] - Ben nous on y arrivait pas...

104 [**Chercheur**] - Oui.

105 [Arnaud] - Il y avait trop de contraintes...

106 [**Chercheur**] - Et alors ?

107 [Arnaud] - Et euh... ben... et ben des fois c' était pas facile...

108 [**Chercheur**] - Et il avait, il avait quelle taille ce rectangle ?

109 [Arnaud] - [...]

110 [**Chercheur**] - Est-ce que tu as, est-ce que tu as vu que tu pouvais euh... bouger euh...la taille de ce rectangle ? Il y avait une, une équerre ?

111 [Arnaud] - Ah!... non je ne l'avais pas bougée, je ne l'avais pas bougée.

112 [**Chercheur**] - Tu ne l'as pas bougée ? d'accord. Donc du coup euh... tu t'es retrouvé avec euh... voilà, c 'était pas facile de... ce grand rectangle de... d' arriver à le recouvrir.

113 [Arnaud] - Non.

114 [**Chercheur**] - T'as pas trouvé de motif ? c'est-à-dire ... est-ce que tu as essayé de ...

115 [Arnaud] - Ben on a essayé de faire un motif mais ça ne marchait pas.

116 [**Chercheur**] - D'accord, tu as essayé de faire un motif , ça ne marchait pas et au final est-ce que tu y es arrivé à faire quelque chose ?

117 [Arnaud] - Non il manquait une case. Ça ne marchait pas.
118 [**Chercheur**] - D'accord. Et à ton avis, est-ce-que tu penses que ça... tu n'as pas trouvé ou bien ça va jamais marcher ?
119 [Arnaud] - Non c'est que j'ai pas trouvé ça... euh c'est possible mais...
120 [**Chercheur**] - Mais comment tu peux savoir que c'est possible ?
121 [Arnaud] - Ben... c'est... je pense que c'est possible oui.
122 [**Chercheur**] - Tu penses que c'est possible.
123 [Arnaud] - Faudrait mettre plus de temps... et bien réfléchir et puis le rythme je sais pas.
124 [**Chercheur**] - Ouais alors est-ce que tu pourrais me dire... par exemple tout à l'heure tu m'as dit la bande euh... mettons la bande de deux... la bande, la grande bande infinie avec deux carreaux...
125 [Arnaud] - Oui.
126 [**Chercheur**] - Tu m'as dit euh... c'est possible euh c'est même pas la peine de le faire euh ça va toujours marcher.
127 [Arnaud] - Hmm!
128 [**Chercheur**] - Hein ? de pouvoir la recouvrir. C'est ce que tu m'as dit ?
129 [Arnaud] - Oui.
130 [**Chercheur**] - Est-ce que tu... tu... tu... tu as le même degré de certitude, est-ce que tu penses que c'est aussi vrai ce que tu me dis sur le carreau...
131 [Arnaud] - Ben là il y a qu'une seule possibilité.
132 [**Chercheur**] - Il y a qu'une seule possibilité.
133 [Arnaud] - Hmm!
134 [**Chercheur**] - Et pourquoi tu, pourquoi tu...
135 [Arnaud] - Ben...
136 [**Chercheur**] - Qu'est-ce qui te fait dire ça ?
137 [Arnaud] - Ben... les euh... les euh...
138 [**Chercheur**] - Est-ce-que tu en es aussi sûr ? Ce que tu me dis là, est-ce-que tu en es aussi sûr que le ... par exemple euh... le pavage de la bande un carreau ?

```
[Arnaud]    - Non J'en suis pas sûr parce que je ne l' ai pas fait.
[Chercheur] - Tu n'en es pas aussi sûr. D'accord, ok.
[Arnaud]    - Je ne l'ai pas fait, donc je ne peux pas savoir.
[Chercheur] - Voilà. Tu penses, que peut-être euh...
[Arnaud]    - Oui, il y a qu'une euh... qu'une solution.
[Chercheur] - Tu penses qu'il y a qu'une solution.
[Arnaud]    - Hmm!
[Chercheur] - Ok. Et tu penses qu'il y en a une ?
[Arnaud]    - Oui... il y en a une.
[Chercheur] - Il y en a qu'une, mais tu penses déjà qu 'il y en a une.
[Arnaud]    - Il y en a qu'une...
[Chercheur] - Ouais...
[Arnaud]    - Mais...
[Chercheur] - Enfin il y en a une et il y en a qu'une.
[Arnaud]    - Oui.
[Chercheur] - Voilà, ok. Bon ben écoute euh merci bien . Si tu veux je pense que tu peux euh retourner. Voilà, merci.
[Arnaud]    - De rien.
```

4 ENT-EXP-I-4

```
RETRANSCRIPTION Clévos1_4 (Hugo et MG 6 min 12 s)


[Chercheur] - Cest bon. Donc tu tappelles Hugo, tu as douze ans et... est-ce que tu pourrais me dire pourquoi tu es venu ici ?
[Hugo]      - Hmm... parce que jaime bien les maths.
[Chercheur] - Oui... donc que... tu savais déjà... tu tattendais à faire des mathématiques. Ok ... est -ce-que tu penses que tu as fait des mathématiques ?
[Hugo]      - Quoi ?
[Chercheur] - Est-ce-que tu penses que tu as fait des mathématiques... ? Approche toi peut-être plus... tu veux que je mette un masque moi ?
```

9 [Hugo] - Euh non, cest bon. Ben...
10 [Chercheur] - Parle assez fort pour quon puisse tentendre. Est-ce-que tu penses que tu as fait des mathématiques ?
11 [Hugo] - Non.
12 [Chercheur] - Tu penses que tu nas pas fait de maths ?
13 [Hugo] - Non.
14 [Chercheur] - Tu nas pas retrouvé les maths que... tu tattendais à faire, ok. Euh... alors quest-ce que tu as fait ?
15 [Hugo] - Hmm... placer des couleurs...
16 [Chercheur] - Placer des... ?
17 [Hugo] - Couleurs.
18 [Chercheur] - Oui.
19 [Hugo] - Au bon endroit.
20 [Chercheur] - Oui... et... est-ce-que tu peux... est-ce que tu as eu... est-ce que tu penses que tu as résolu une question, ou un problème euh est-ce que tu pourrais me dire quel était le problème que tu as ...
21 [Hugo] - Euh...
22 [Chercheur] - Essayé de traiter ?
23 [Hugo] - ...
24 [Chercheur] - Est-ce que tu as reconnu qu'il y avait un problème, une question ? Est-ce que tu pourrais me dire ce que tu as fait quoi ?
25 [Hugo] - ben, le problème ce que j'ai eu ?
26 [Chercheur] - Oui.
27 [Hugo] - Euh...
28 [Chercheur] - Ce que tu as fait sur le... là-bas.
29 [Hugo] - Euh, le problème c'est que des fois quand on met... quand on les met bien il y a... deux couleurs qui sont sur la... on doit mettre le... un carré ou il y a deux même couleurs et il n'y en a pas.
30 [Chercheur] - Ah ! là tu me... tu me dis la difficulté que tu as eu ?
31 [Hugo] - Ouais.
32 [Chercheur] - Mais qu'est-ce que ... oui, d'accord. Mais le mot problème je le prenais au sens de

mathématique, problème mathématique, est-ce que tu ... qu'est-ce que... quelle est la question que tu as traitée ?

33 [Hugo] - Euh...

34 **[Chercheur]** - Parce que tu me dis que tu n'as pas reconnu que tu avais fait des mathématiques. bon euh c'est quand même des mathématiques, je te le dis. Et donc du coup euh.. c'est pas du calcul, c'est pas de la géométrie, c'est avec des couleurs comme tu l 'as dis mais voilà... est-ce que tu pourrais me dire euh finalement c'est quoi que tu as fait ?

35 [Hugo] - ... C'est placé des... les... les bonnes couleurs ou...

36 **[Chercheur]** - Oui. Sur quoi, sur quoi ?

37 [Hugo] - Sur... un plateau...

38 **[Chercheur]** - Un plateau... et ...et le plateau il était comment ? enfin qu'est-ce qu'il y avait de... est-ce-qu'il y avait des contraintes...

39 [Hugo] - Euh Oui.

40 **[Chercheur]** - Est-ce que c'était n'importe quel plateau... ? oui, alors...?

41 [Hugo] - Parce qu'il y avait quatre couleurs au bord et on devait placer les pions euh avec les couleurs qu'il y avait au bord...

42 **[Chercheur]** - Voilà, ok, Donc voilà, tu as, tu as trouvé quel était le problème que tu as traité. Et tu m'as dis que donc t'avais été euh... tu avais eu des embêtements quand tu te retrouvais avec des couleurs alors est-ce que tu pourrais préciser ce que c'est que ces embêtements là ? Tu m'as dit des couleurs qui correspondaient pas, c'est... c'était quoi exactement ?

43 [Hugo] - Euh... quand il y a... il y avait euh... quand on avait placé des pions et à un moment il y a deux couleurs qui étaient en même temps mais les mêmes... il y avait les mêmes...

44 **[Chercheur]** - Donc tu n'avais plus... alors tu n'avais plus assez de... alors explique exactement à quel endroit les couleurs en même temps, les mêmes ?

45 [Hugo] - Euh ben... sur les... quand il y avait

trois pions et ben sur les cases il y avait deux fois la même couleur.
46 **[Chercheur]** - Alors, alors très bien, alors qu'est-ce que tu as fait ?
47 [Hugo] - Eh ben j'ai défait et j'ai refait.
48 **[Chercheur]** - Et quand tu as refait, est-ce que t'as ... est-ce-que ça marchait mieux ?
49 [Hugo] - Oui.
50 **[Chercheur]** - Donc du coup est-ce que tu penses que t' as réussi à faire quelque chose de...
51 [Hugo] - Oui.
52 **[Chercheur]** - Oui ? quoi exactement ? tu avais une rectangle ?
53 [Hugo] - Hmm...
54 **[Chercheur]** - De quelle taille ?
55 [Hugo] - Euh...
56 **[Chercheur]** - Combien de carreaux en haut, combien de carreaux en...
57 [Hugo] - Hmm.
58 **[Chercheur]** - Non, t'as pas fait attention ? et les couleurs, c'était quoi les couleurs des bords ?
59 [Hugo] - Euh les couleurs des bords y a... euh sur les... sur le rectangle ?
60 **[Chercheur]** - Oui.
61 [Hugo] - Il y avait deux fois vert et deux fois bleu.
62 **[Chercheur]** - D'accord, donc vert comme ça et bleu comme ça...
63 [Hugo] - Oui.
64 **[Chercheur]** - Ok, et tu as réussi à... à placer euh les carreaux comme ça et toutes les couleurs collaient bien ensemble ? Ok. Et ben ça c'est un résultat. Tu as réussi à paver le rectangle euh avec les tuiles. Bon est-ce que tu as... est-ce que tu as..tu avais une réglette ?
65 [Hugo] -...
66 **[Chercheur]** - Tu as vu que tu avais une réglette sur la... à déplacer sur le... le meuble ? Non ? à faire un rectangle plus petit ou un rectangle plus grand ! non ?

[Hugo] - Ah euh l'espèce d'équerre ?
[Chercheur] - Oui.
[Hugo] - Euh oui.
[Chercheur] - Tu l'a déplacée ou pas ?
[Hugo] - Non.
[Chercheur] - Non ! donc t'es resté sur le rectangle tel que... l'équerre euh te l'avait positionné ?
[Hugo] - Hmm.
[Chercheur] - Ok bon, et tu as fait euh un autre euh ... une autre manipulation ou tu as fait que celle-là ?
[Hugo] - Que celle-là.
[Chercheur] - Ok. Bon et... euh est-ce que tu as des remarques ou des questions à me faire ? bon à part que tu m'as dit que tu pensais que tu n'avais pas fait de mathématiques mais...
[Hugo] - Non.
[Chercheur] - Tu n'as pas de remarques sur le matériel , sur... voilà comment ça c'était passé ?
[Hugo] - Ben si parce que des fois je ne trouvais pas le... le bon pion.
[Chercheur] - Ouais, et tu trouvais pas le bon pion parce que c'était trop mélangé, c'est ça ?
[Hugo] - Oui.
[Chercheur] - Ouais d'accord. Et t'en à d'autres ?
[Hugo] - Quoi ?
[Chercheur] - T'as d'autres remarques ?
[Hugo] - Euh non.
[Chercheur] - Ok, bon ben écoute je te remercie bien ... tu peux retourner... merci.

5 ENT-EXP-I-5

RETRANSCRIPTION Clévos1_5 (Mathieu et MD 7 min 48 s)

[Chercheur] - Alors, alors tout d'abord j'aimerais savoir ton prénom s'il te plait ?
[Mathieu] - Mathieu.
[Chercheur] - Mathieu, tu as quel âge Mathieu ?
[Mathieu] - Euh, j'ai 12 ans.

7 [**Chercheur**] - Tu as 12 ans, d'accord, donc tu es en, tu rentres en 5ème là?
8 [Mathieu] - Oui je vais rentrer en 5eme.
9 [**Chercheur**] - Super ! Ca se passe bien ?
10 [Mathieu] - Ouais..
11 [**Chercheur**] - Ouais alors, ma première question c'était de savoir euh est-ce que tu pourrais me rappeler... ta mamie nous avait dit... c'est ta mamie ?
12 [Mathieu] - Oui.
13 [**Chercheur**] - Oui, nous avait dit ben pourquoi vous vous êtes inscrit, mais j'aimerais plutôt une réponse personnelle, pourquoi tu as voulu venir ici ?
14 [Mathieu] - Ben parce que ma matière préférée c'est les maths.
15 [**Chercheur**] - Parce que ta matière préférée c'est les mathématiques. Du coup est-ce que tu penses avoir fait ce que tu avais prévu en venant ici ?
16 [Mathieu] - Euh... avec les photos... un peu.
17 [**Chercheur**] - Comment ? Avec les photos ?
18 [Mathieu] - Non pas trop quand même.
19 [**Chercheur**] - alors, c'est-à-dire pas trop ?
20 [Mathieu] - Ben en gros les...
21 [**Chercheur**] - Qu'est-ce que tu pensais et qu'est-ce-que finalement
22 [Mathieu] - les photos si un petit peu mais on comprenait rien sur les photos.
23 [**Chercheur**] - On comprenait rien sur les photos, d'accord. Alors du coup qu'est-ce que tu as fait concrètement pendant ces longues minutes?
24 [Mathieu] - Euh... j'ai associé des couleurs, et il fallait associer les mêmes.
25 [**Chercheur**] - Donc tu as associé des couleurs fallait associer les mêmes, d'accord. Euh... alors euh...Est-ce que tu pourrais euh me dire sur quel problème tu as travaillé ?
26 [Mathieu] - Euh...
27 [**Chercheur**] - Si tu devais essayer de mettre des mots, de faire une petite phrase. A ton avis, quel est le

problème en question? Est-ce que tu penses déjà avoir travaillé sur un problème ?

28 [Mathieu] - Ben oui.

29 [**Chercheur**] - Oui, pourquoi ?

30 [Mathieu] - Euh parce que à la fin, tu as l' impression d'avoir bien réussi, mais... le dernier il est faux.

31 [**Chercheur**] - Alors, est-ce que tu pourrais m' expliquer justement le problème, essayer de me formuler, de me faire une petite phrase sur... si tu devais me dire sur quel problème tu as travaillé, quel est le problème en question?

32 [Mathieu] - Euh... le problème c'est les différentes couleurs... c'est qu'il y en a pas deux sur un même carré.

33 [**Chercheur**] - Il n'y a pas deux couleurs sur un même carré ! D'accord.

34 [Mathieu] - Oui deux mêmes couleurs.

35 [**Chercheur**] - Donc tu avais quelles couleurs sur les carrés?

36 [Mathieu] - Ben... y avait rouge bleu jaune vert.

37 [**Chercheur**] - D'accord, et qu'est-ce-que tu devais faire avec justement ? Quel était le problème, qu' est-ce que tu devais faire ?

38 [Mathieu] - Ben je devais mettre le jaune sur le jaune, le vert sur le vert...

39 [**Chercheur**] - D'accord...

40 [Mathieu] - C'est avec les coins sur les côtés que c 'était difficile.

41 [**Chercheur**] - Donc tu avais des coins et qu'est-ce qu' il y avait sur ces coins ? Sur ces côtés ? Quelle est la forme aussi ?

42 [Mathieu] - C'est des losanges !

43 [**Chercheur**] - Des losanges ?

44 [Mathieu] - Ouais ou des carrés!

45 [**Chercheur**] - ...

46 [Mathieu] - Des carrés plutôt.

47 [**Chercheur**] - Des carrés ou des... Ca ressemblait tout le temps à des carrés ? Elles avaient tout le temps les mêmes dimensions

48 [Mathieu] - Ouais.
49 [**Chercheur**] - D'accord, et sur ces couleurs c'était... elles étaient comment les couleurs sur les bords ?
50 [Mathieu] - Hmm... comment ça ? je comprends pas trop la question...
51 [**Chercheur**] - Ben il y avait... tu as travaillé donc sur des, tu m'as dit, des carrés...
52 [Mathieu] - Ouais.
53 [**Chercheur**] - Et il y avait des couleurs sur les bords de tes carrés...
54 [Mathieu] - Ah oui!
55 [**Chercheur**] - Voilà.
56 [**Chercheur**] - Donc elles étaient comment tes couleurs sur les bords de tes carrés ?
57 [Mathieu] - Elles étaient différentes !
58 [**Chercheur**] - Elles étaient différentes ! D'accord, toutes différentes ?
59 [Mathieu] - Hmm... ouais je ne crois pas... il y en avait deux mêmes ou trois.
60 [**Chercheur**] - Il y en avait deux mêmes...
61 [Mathieu] - Ouais.
62 [**Chercheur**] - D'accord...
63 [Mathieu] - Et deux [...] comme ça.

64 [**Chercheur**] - Donc il y en avait deux mêmes au Nord...
65 [Mathieu] - Euh... sur les côtés...
66 [**Chercheur**] - Sur les côtés gauche et droit, c'était les mêmes...
67 [Mathieu] - Ouais.
68 [**Chercheur**] - Et au Nord et au Sud, en haut et en bas c'était des couleurs différents, d'accord. Et... est-ce que donc tu as essayé donc d'assembler ces carrés euh... en respectant les couleurs ? Et en respectant aussi les couleurs sur le bord ? C'est ça ?
69 [Mathieu] - Ben... j'ai essayé de faire les contours, ensuite euh le milieu.
70 [**Chercheur**] - D'accord, et alors du coup est-ce que tu penses avoir obtenu euh qu'est-ce que tu penses avoir fait, obtenu comme résultat ?

71 [Mathieu] - Euh...
72 [**Chercheur**] - A la fin de l'activité, qu'est-ce que tu peux dire, qu'est-ce que tu as fait ?
73 [Mathieu] - hum... c'était dur, j'ai pas réussi à le finir, les derniers carrés étaient...
74 [**Chercheur**] - Alors, est-ce que tu en as fait plusieurs des carrés ?
75 [Mathieu] - Oh oui !
76 [**Chercheur**] - Tu as fait quoi ? Quoi comme...
77 [Mathieu] - Comme ils étaient tous différents !
78 [**Chercheur**] - Oui mais tu as mis des carrés, mais euh ce que tu as essayé de recouvrir, est-ce-que tu as recouvert juste un grand carré ou est-ce que tu as essayé de faire d'autres carrés ?
79 [Mathieu] - ben j'ai essayé de faire d'autres carrés .
80 [**Chercheur**] - D'accord, et alors du coup...
81 [Mathieu] - Ben ça n'a pas marché, non.
82 [**Chercheur**] - Ca n'a pas marché non plus. Et c'est-à-dire qu'est-ce que... qu'est-ce que tu as observé euh... pourquoi ça n'a pas marché ?
83 [Mathieu] - Euh... parce que faut tous les hmm... mettre comme il faut. Mais tu as deux possibilités à chaque fois.
84 [**Chercheur**] - C'est-à-dire deux possibilités à chaque fois ?
85 [Mathieu] - Ben par exemple euh... tu as... imaginons si on compte jaune et bleu et ben tu as deux formes où il y a jaune et bleu. Du coup tu sais pas lequel choisir.
86 [**Chercheur**] - D'accord, donc il y a plusieurs possibilités effectivement.
87 [Mathieu] - Oui...
88 [**Chercheur**] - Mais alors du coup quand tu me dis que ça n'a pas marché, pourquoi ça n'a pas... qu'est-ce qui n'a pas marché?
89 [Mathieu] - Dès le départ...
90 [**Chercheur**] - Comment ?
91 [Mathieu] - Dès le départ je n'ai pas pris les bons ! ... Peut-être.

92 [**Chercheur**] - Alors dès le départ tu n'as pas pris les bons, peut-être, d'accord, mais comment tu peux être sûr que ça n'a pas marché ?
93 [Mathieu] - Ben au dernier carré euh...
94 [**Chercheur**] - Le dernier carré tu ne trouvais pas...
95 [Mathieu] - J'arrivais pas à le ren...trer.
96 [**Chercheur**] - Alors du coup, est-ce que tu penses que euh... ça... est-ce que on peut trouver quelque chose qui fonctionne ou est-ce que ça marche jamais ? Est-ce que tu as une idée?
97 [Mathieu] - Je pense qu'on peut trouver, mais faut jouer beaucoup beaucoup d'essais.
98 [**Chercheur**] - Donc, tu penses qu'on peut trouver, mais il faut beaucoup beaucoup d'essais.
99 [Mathieu] - Mais c'est toujours possible de toute façon.
100 [**Chercheur**] - C'est toujours possible. D'accord. Donc tu penses, qu'effectivement, en cherchant correctement on trouvera... si tu rechanges ton carré...
101 [Mathieu] - J'ai l'impression que c'est un peu de la chance...
102 [**Chercheur**] - C'est de la chance !
103 [Mathieu] - Dès le départ faut prendre le bon carré, t'as le choix entre les deux...
104 [**Chercheur**] - D'accord.
105 [Mathieu] - Donc c'est un peu de la chance.
106 [**Chercheur**] - Donc finalement, quand tu as été bloqué, tu penses que si tu défais tout et que tu recommences, finalement, au bout d'un certain temps, tu vas trouver euh la bonne sol...tu vas trouver une solution qui sera valable.
107 [Mathieu] - Au bout d'un certain temps... mais...
108 [**Chercheur**] - Tout le temps.
109 [Mathieu] - ...Faut beaucoup...
110 [**Chercheur**] - Tout le temps.
111 [Mathieu] - Beaucoup.
112 [**Chercheur**] - Tout le temps pour avoir une réponse.
113 [Mathieu] - Ouais.
114 [**Chercheur**] - D'accord, est-ce que tu as des questions

sinon des remarques sur l'activité ? Est-ce que tu penses avoir fait finalement des mathématiques ?

115 [Mathieu] - Ben... je sais pas trop si c'était des mathématiques.

116 [**Chercheur**] - D'accord, pourquoi ? Est-ce que tu peux développer un peu .

117 [Mathieu] - Ben parce que... par exemple parce que il y avait toujours quatre couleurs sur un truc.

118 [**Chercheur**] - D'accord.

119 [Mathieu] - Il n'y avait pas trois deux un... des trucs comme ça.

120 [**Chercheur**] - Ah ! Parce qu'il n'y a pas de chiffres !

121 [Mathieu] - Ouais.

122 [**Chercheur**] - D'accord,

123 [Mathieu] - On peut additionner quoi, je ne sais pas .

124 [**Chercheur**] - D'accord, euh et euh il n'y a aucun carré que tu n'arrivais à faire correctement ?

125 [Mathieu] - Ben si j'arrivais à les placer, mais c' est toujours le dernier qui bloque.

126 [**Chercheur**] - D'accord. Mais parce que finalement tu as travaillé sur un grand carré !et tu as eu pleins de petits carrés...

127 [Mathieu] - Un grand rectangle.

128 [**Chercheur**] - Mais tu n'as pas essayé de changer la taille, réduire le grand carré en un carré plus petit pour essayer de trouver.

129 [Mathieu] - Ah on pouvait?

130 [**Chercheur**] - Ben oui on pouvait !

131 [Mathieu] - Je ne savais pas.

132 [**Chercheur**] - Ben tu as une réglette! Tu sais, tu avais comme une règle que tu pouvais déplacer.

133 [Mathieu] - Ah... je ne savais pas.

134 [**Chercheur**] - Est-ce-que tu as des remarques ou des questions ?

135 [Mathieu] - Ben faut savoir!

136 [**Chercheur**] - D'accord, faut savoir pour la règle ?

137 [Mathieu] - Ouais.

138 [**Chercheur**] - D'accord. Ok, ben je te remercie, très bien.

139 [Mathieu] - De rien.

6 ENT-EXP-I-6

1 RETRANSCRIPTION Clévos1_6 (Colette et MD 6 min 16 s)
2
3 [Chercheur] - Alors bonjour, est-ce-que vous pouvez me donner donc votre prénom et votre âge ?
4 [Colette] - Colette.
5 [Chercheur] - Colette !
6 [Colette] - Soixante-sept ans.
7 [Chercheur] - D'accord. Vous êtes euh...
8 [Colette] - La mamie.
9 [Chercheur] - La mamie, d'accord...
10 [Colette] - Les jumeaux.
11 [Chercheur] - Super. Alors, la première question c'était de savoir déjà d'essayer de me rappeler euh... pourquoi vous vous êtes inscrite pour cette activité ?
12 [Colette] - Parce que j'avais vu le défi de maths et que bon... ils sont toujours intéressants les... les... comment... tout ce que propose les Clévos c'est intéressant et... ça les sortirait un petit peu et ça les aiderait peut-être pour... pour les maths .
13 [Chercheur] - D'accord, et vous d'un côté un peu plus personnel ?
14 [Colette] - Euh oui moi je...
15 [Chercheur] - Oui...
16 [Colette] - J'aime bien aussi, oui.
17 [Chercheur] - Alors, du coup est-ce que vous pensez avoir fait ce que vous aviez prévu ?
18 [Colette] - Pas moi personnellement parce que je les ai laissé faire.
19 [Chercheur] - D'accord.
20 [Colette] - Je les ai aidés les uns... l'un et l'autre euh pour euh...
21 [Chercheur] - D'accord donc vous, vous n'avez pas spécialement...
22 [Colette] - Non, voilà voilà, mais bon à refaire, ça

serait mieux individuellement. Mais bon je les accompagnais...

23 [**Chercheur**] - Donc concrètement qu'est-ce que vous avez fait... euh lors...

24 [**Colette**] - Je les ai aidés à trouver les couleurs.

25 [**Chercheur**] - Aider à trouver les couleurs dans, dans le jeu ou à positionner les euh...

26 [**Colette**] - Non, non ils me réclamaient des pièces.

27 [**Chercheur**] - D'accord. Donc les aider pour...

28 [**Colette**] - Des pièces avec les couleurs opposées, je les aidais et... voilà.

29 [**Chercheur**] - D'accord, euh... est-ce-que vous avez... si je vous demande d'essayer de me formuler, même si vous n'avez pas spécialement travaillé sur le problème vous avez laissé faire vos... vos petits-enfants, est-ce que vous pouvez essayer de me formuler euh... le problème sur lequel vous avez travaillé ? La question ?

30 [**Colette**] - Moi, j'aurais... enfin j'aurais plus travaillé sur le... comment, de faire les suites... les suites de couleurs.

31 [**Chercheur**] - Les suites de couleur ! ben alors au niveau du problème, quelle est l'activité sur lequel vous avez travaillé ? il y avait plusieurs activités, si je vous demande de décrire l'activité que vous avez faite ? avec vos petits-enfants ?

32 [**Colette**] - ... Euh... les décrire ...

33 [**Chercheur**] - quelle est la question, en fait ? s'il y a une question ?

34 [**Colette**] - ... Moi, je non! je ne vois vraiment pas les...

35 [**Chercheur**] - Alors il me semble, si j'ai écouté votre petit-fils euh vous étiez sur euh les carrés avec des bords...

36 [**Colette**] - Oui !

37 [**Chercheur**] - Colorés.

38 [**Colette**] - Ah! oui oui, ah oui d'accord le jeu là en lui-même... un rectangle...

39 [**Chercheur**] - Alors qu'est-ce qu'il fallait faire ?

40 [**Colette**] - Un rectangle, et il fallait faire les

suites enfin, essayer de faire les suites de de couleurs, et...
41 [**Chercheur**] - Est-ce-qu'on pouvait les mettre n' importe comment ces couleurs ?
42 [**Colette**] - Non !
43 [**Chercheur**] - Non ?
44 [**Colette**] - Non, non, oh non non, il fallait vraiment euh... connaître la stratégie de... pour moi c'était des suites.
45 [**Chercheur**] - Des suites de couleurs...
46 [**Colette**] - Hmm!
47 [**Chercheur**] - D'accord ?
48 [**Colette**] - Des suites, enfin des reproductions !
49 [**Chercheur**] - Des reproductions...
50 [**Colette**] - Des reproductions de... enfin...
51 [**Chercheur**] - Des reproductions...
52 [**Colette**] - De carrés ou de... on a, on a réussi, un petit-fils a réussi à le faire, l'autre n'a pas réussi parce qu'il y avait un un petit souci après de... à la fin quoi! Les deux, deux cases qu'on pouvait pas... qu'on pouvait pas remplir.
53 [**Chercheur**] - D'accord ! et vous pensez que c'est.. euh que c'est toujours possible où...
54 [**Colette**] - Ben oui ! mais faut faut redémonter pour pouvoir euh...
55 [**Chercheur**] - D'accord.
56 [**Colette**] - Oui... c'est...
57 [**Chercheur**] - Il suffit de tout enlever et de recommencer... euh...
58 [**Colette**] - Ben peut-être... peut-être pas ! je veux dire au niveau du bord ou au niveau du... faut essayer d'examiner quoi ! je les ai laissé faire dans leur...
59 [**Chercheur**] - D'accord !
60 [**Colette**] - Parce que sinon en contrariété c'est un peu difficile chez eux en ce moment.
61 [**Chercheur**] - Donc par rapport au problème finalement, vous avez trouvé des fois des choses qui marchaient ?
62 [**Colette**] - Oui !

63 [**Chercheur**] - Donc ça...
64 [**Colette**] - Des fois il a fallu redémonter, pour mais... mais très très peu de fois quand même c'est qu'à la fin...
65 [**Chercheur**] - Vous avez redémonté donc en... vous avez tout enlevé ?
66 [**Colette**] - Non !
67 [**Chercheur**] - Non ! une partie ?
68 [**Colette**] - Oui une partie oui !
69 [**Chercheur**] - Et euh est-ce que vous êtes arrivée à obtenir un résultat ?
70 [**Colette**] - Oui ! oui !
71 [**Chercheur**] - Ca marchait ?
72 [**Colette**] - Oui ça a marché oui. Mais à la fin, ça n 'a pas marché.
73 [**Chercheur**] - Ah ! Donc du coup euh... est-ce que euh ...
74 [**Colette**] - Il aurait fallu re tout redémonter du... enfin...
75 [**Chercheur**] - Alors du coup, le fait qu'il y ait une case qui ne marche pas à la fin, est-ce que du coup ça... ça fonctionne ? est-ce que c'est un résultat ?
76 [**Colette**] - ...
77 [**Chercheur**] - C'est-à-dire, est-ce que vous pensez que vous avez répondu à la question ? sur cette...
78 sur cette... sur cette grille carrée ?
79 [**Colette**] - Ben moi personnellement non !
80 [**Chercheur**] - Non ?
81 [**Colette**] - J'ai, j'ai pas répondu parce que... je suis partie toujours avec la suite. Donc, je les aidais mais... sans vraiment faire ce que moi j' aurais... aimé faire.
82 [**Chercheur**] - Oui, mais quand vous me dites euh à la fin on a démonté...
83 [**Colette**] - hmm hmm !
84 [**Chercheur**] - Et puis après on y est arrivé, mais il restait euh une case... qui ne marchait pas. Est-ce que pour vous le fait qu'il reste une case, c'est pas grave ?
85 [**Colette**] - Ah ben si! quand même!

86 **[Chercheur]** - Si ?

87 **[Colette]** - Si !

88 **[Chercheur]** - Alors du coup est-ce que ça, ça marche ? est-ce-que vous êtes arrivée à répondre à votre question ou est-ce que ça ne fonctionne pas ?

89 **[Colette]** - Ah non ça ne fonctionnait pas.

90 **[Chercheur]** - Ça ne fonctionnait pas. Et donc vous pensez euh... que si on remodifiait encore le choix ...

91 **[Colette]** - Ben oui, ben oui!

92 **[Chercheur]** - Ça marchera tout le temps!

93 **[Colette]** - C'est sûr ça marchera tout le temps oui ! il y a toujours une solution. C'est... je suis vieille mais bon tout ça...

94 **[Chercheur]** - Et du coup est-ce-que vous avez d'autres questions ?

95 **[Colette]** - Hmm non !

96 **[Chercheur]** - Des remarques sur l'activité euh des choses que vous n'auriez peut-être pas compris au premier abord ?

97 **[Colette]** - Euh non non, euh faut vous dire faire et refaire pour pouvoir retrouver des des stratégies, et il y a plein de stratégies en fait... oui ce jeu !

98 **[Chercheur]** - Alors, c'est-à-dire, plein de stratégies ?

99 **[Colette]** - Ben enfin plein de logiques ! plein de logiques plutôt.

100 **[Chercheur]** - Alors, est-ce-que vous pouvez développer un petit peu ?

101 **[Colette]** - Ben...

102 **[Chercheur]** - Quand vous dites plein de stratégies...

103 **[Colette]** - Ben soit euh faire le le contour ou commencer par le milieu, enfin il y a plein de de...

104 **[Chercheur]** - D'accord, donc plein de façons de faire différemment.

105 **[Colette]** - De faire, voilà.

106 **[Chercheur]** - Différentes, d'accord! et sinon au niveau de... est-ce que vous avez compris euh...la, la petite réglette qu'on a mis ?

```
107 [Colette]   - Ah non ! non !
108 [Chercheur] - Vous ne savez pas à quoi ça sert ?
109 [Colette]   - Non !
110 [Chercheur] - Non ?
111 [Colette]   - Il y avait...
112 [Chercheur] - Vous voyez la réglette carrée...
113 [Colette]   - oui, oui, la réglette... l'équerre !
114 [Chercheur] - Est-ce que vous vous en êtes servie de l'équerre ?
115 [Colette]   - Euh non... non !
116 [Chercheur] - Vous ne vous êtes pas servie de l'équerre ?
117 [Colette]   - Non !
118 [Chercheur] - D'accord !
119 [Colette]   - Elle servait à quelque chose ?
120 [Chercheur] - Ben elle servait à faire les contours de la grille.
121 [Colette]   - Ah non on n'a pas bougé du tout le... ni l'un ni l'autre, on n'a pas bougé l'équerre.
122 [Chercheur] - Donc, ok!
```

7 ENT-EXP-I-7

```
1 RETRANSCRIPTION Clévos1_7 (Isabelle et MD 9 min 50 s)
2
3
4 [Chercheur] - Alors, si vous pouvez me donner votre euh...  donc je vais enregistrer hein...
5 [Isabelle]  - Oui !
6 [Chercheur] - Votre prénom ? Donc Isabelle, et votre âge ?
7 [Isabelle]  - Euh 45 ans!
8 [Chercheur] - 45 ans d'accord, je vous remercie. Alors, j'avais une...  quelques petites questions. La première c'était de... d'essayer de  me redire pourquoi finalement  vous êtes inscrits, peut-être d'un point de vue un peu plus personnel, euh...
9 [Isabelle]  - Alors, déjà on suit les... animations des Clévos...
10 [Chercheur] - D'accord !
```

11 [Isabelle] - Donc euh... et on y participe régulièrement...

12 [**Chercheur**] - D'accord !

13 [Isabelle] - Et le fait que ce soit des maths et d'un esprit euh... voilà pour se torturer un petit peu le cerveau.

14 [**Chercheur**] - D'accord !

15 [Isabelle] - Voilà, puisque on aime ça et on fait euh ... euh enfin on en fait aussi euh tout au long de l 'année, donc... de la torture de cerveau.

16 [**Chercheur**] - D'accord, alors du coup par rapport à ce que vous pensiez, est-ce-que vous avez finalement euh... bien visé euh votre souhait ? C'est-à-dire vous torturez le cerveau euh...

17 [Isabelle] - Alors oui, alors en plus, il y avait les photos... des tables...

18 [**Chercheur**] - Oui d'accord !

19 [Isabelle] - Sur le... prospectus, là...

20 [**Chercheur**] - D'accord !

21 [Isabelle] - Du coup on... enfin je savais à quoi m' attendre.

22 [**Chercheur**] - D'accord, et donc euh c'était...

23 [Isabelle] - Ça répondait... voilà... ça répondait aux attentes.

24 [**Chercheur**] - Ça répondait à vos attentes, d'accord. Alors du coup la question c'est qu'est-ce que vous avez fait concrètement pendant ces... cette trentaine de minutes euh...

25 [Isabelle] - Alors, ben... j'ai fait donc la première table... enfin bon peu importe...

26 [**Chercheur**] - Alors vous me dites euh voilà vous me dites ce que vous avez fait euh...

27 [Isabelle] - Ben je me suis torturée le cerveau... euh... oui c'est du raisonnement quoi c'est... voilà.

28 [**Chercheur**] - Du raisonnement ? Alors euh concrètement si je devais vous demander euh de me décrire votre activité...

29 [Isabelle] - Oui...

30 [**Chercheur**] - Pendant euh...

31 [Isabelle] - Alors placer des tuiles avec des contraintes de couleurs.
32 [**Chercheur**] - Alors bon du coup vous avez réfléchi à quel problème, si je vous demande de reformuler le problème mathématique ? Comment...
33 [Isabelle] - Euh...
34 [**Chercheur**] - Si je ne le connais pas...
35 [Isabelle] - Voilà...
36 [**Chercheur**] - Comment vous pourriez me l'expliquer ?
37 [Isabelle] - Donc vous avez une grille avec quatre contraintes couleurs qui sont autour en... périphérie...
38 [**Chercheur**] - D'accord !
39 [Isabelle] - Voilà, euh... et il faut remplir cette grille euh... avec des tuiles euh... qui ont des contr... qui ont quatre couleurs chacune.
40 [**Chercheur**] - Qui ont quatre couleurs chacune, d' accord ! Quatre couleurs distinctes !
41 [Isabelle] - Voilà !
42 [**Chercheur**] - Ok! alors du coup quels sont euh... quel est le résultat que vous avez euh obtenu, est-ce-que vous avez euh une idée euh... ?
43 [Isabelle] - Alors euh ben on n'est pas arrivé jusqu' au bout, on avait un petit trou dans notre grille.
44 [**Chercheur**] - Vous aviez un petit trou dans votre grille !
45 [Isabelle] - Voilà!
46 [**Chercheur**] - Mais alors du coup, vous avez réfléchi sur une grille ?
47 [Isabelle] - Oui.
48 [**Chercheur**] - Alors, la grille, elle était comment, est-ce que c'était une grille où il y avait les mêmes couleurs ?
49 [Isabelle] - Non, les quatre couleurs étaient posées.
50 [**Chercheur**] - Les quatre couleurs étaient différentes ...
51 [Isabelle] - Oui.
52 [**Chercheur**] - D'accord, donc vous avez travaillé sur une grille avec quatre couleurs différentes. Alors ma question c'était de savoir euh... donc vous êtes

euh... vous avez donc euh... essayé de paver, donc de recouvrir...
53 [Isabelle] - Oui.
54 [**Chercheur**] - Avec des tuiles et à la fin, il y en avait une qui ne marchait pas ?
55 [Isabelle] - C'est ça.
56 [**Chercheur**] - Alors du coup, vous avez travaillé que sur une unique grille ?
57 [Isabelle] - Oui.
58 [**Chercheur**] - Sur la la plus grande ?
59 [Isabelle] - Oui, certainement.
60 [**Chercheur**] - D'accord. Et donc à la fin ça ne marchait pas ?
61 [Isabelle] - Oui.
62 [**Chercheur**] - Alors, est-ce que vous êtes sûre que ça ne marche pas ou est-ce-que si on réessaie euh... on peut trouver quelque chose qui fonctionne ?
63 [Isabelle] - Aaaah... puisque ça ne marche pas et que ... c'est que ça, c'est que ça ne peut pas marcher ... non je ne sais pas.
64 [**Chercheur**] - Alors vous aviez...
65 [Isabelle] - Non.
66 [**Chercheur**] - Vous aviez pas de... d'idées... de la raison ...
67 [Isabelle] - Non.
68 [**Chercheur**] - Pourquoi ça ne marche pas ?
69 [Isabelle] - Non.
70 [**Chercheur**] - Le...
71 [Isabelle] - Le... alors le trop de contraintes certainement.
72 [**Chercheur**] - D'accord.
73 [Isabelle] - Euh...
74 [**Chercheur**] - C'est-à-dire que si on mettait n'importe quoi sur les côtés on pourrait euh...certainement ...
75 [Isabelle] - Certainement.
76 [**Chercheur**] - Sûre ?
77 [Isabelle] - Certainement.
78 [**Chercheur**] - Vous êtes sûre ?
79 [Isabelle] - Certainement... je sais... non je suis

pas sûre...
80 [**Chercheur**] - Non, vous n'êtes pas sûre, d'accord.
81 [Isabelle] - Non, je suis pas sûre.
82 [**Chercheur**] - Euh... du coup donc il restait une tuile ...
83 [Isabelle] - Oui.
84 [**Chercheur**] - Et qu'est-ce-que vous avez fait...
85 [Isabelle] - Alors on a...
86 [**Chercheur**] - Quand il restait une tuile ?
87 [Isabelle] - On... a enlevé les lignes quand... parce que on travaillait par colonne...
88 [**Chercheur**] - D'accord.
89 [Isabelle] - Donc on a enlevé les colonnes...
90 [**Chercheur**] - Donc votre stratégie c'était...
91 [Isabelle] - Et on recommençait.
92 [**Chercheur**] - D'accord.
93 [Isabelle] - Et on recommençait une colonne en laissant ce qu'on venait de faire pour ne pas reproduire la même chose.
94 [**Chercheur**] - D'accord, et du coup quoi que vous fassiez...
95 [Isabelle] - Et on est encore retombé sur un trou, ouais.
96 [**Chercheur**] - Vous êtes retombée sur un trou...
97 [Isabelle] - Ouais.
98 [**Chercheur**] - Alors du coup, est-ce-que vous pensez que c'est un résultat, ça ?
99 [Isabelle] - Euh... ben si sur cent pour cent des essais euh, cent pour cent d'échecs euh, on pourrait penser que euh...
100 [**Chercheur**] - Alors est-ce-que du coup vous l'avez prouvé ? c'est-à-dire est-ce-que vous avez un argument infaillible qui permettrait de dire que ça ne marche jamais ?
101 [Isabelle] - Euh non.
102 [**Chercheur**] - Ça se serait plutôt...
103 [Isabelle] - Ça serait la contrainte, voilà,
104 [**Chercheur**] - Ça serait plutôt une...
105 [Isabelle] - Une constatation. Enfin...
106 [**Chercheur**] - Une constatation, d'accord.

107 [Isabelle] - Mais pas une vérification.
108 [**Chercheur**] - D'accord, donc qui serait plutôt une constatation ou vous pensez que sur le plus grand rectangle...
109 [Isabelle] - Ouais...
110 [**Chercheur**] - On ne peut pas avec quatre couleurs différentes...
111 [Isabelle] - Ouais.
112 [**Chercheur**] - On ne peut pas arriver à trouver le...
113 [Isabelle] - Hmm.
114 [**Chercheur**] - Une possibilité, donc c'est pas prouvé, mais c'est une hypothèse que vous faîtes.
115 [Isabelle] - C'est ça !
116 [**Chercheur**] - D'accord. Et, à partir de ce moment là vous ne vous êtes pas dit euh... "tiens je vais essayer de regarder sur ce qui se passe sur des tailles plus petites ?"
117 [Isabelle] - Ah ben quand c'était sur notre dernière colonne où il manquait notre manque... où il y avait le manquant, on finissait s'il n'y avait pas cette dernière colonne.
118 [**Chercheur**] - D'accord. A...
119 [Isabelle] - Ah non ! peut-être pas, parce qu'il y avait la contrainte en code couleur au bout. Non ! alors je peux pas... je ne me souviens pas.
120 [**Chercheur**] - D'accord, ok.
121 [Isabelle] - Non!
122 [**Chercheur**] - Euh... mon autre question c'était au niveau de la réglette, ou...
123 [Isabelle] - Oui.
124 [**Chercheur**] - On vous a donné une réglette...
125 [Isabelle] - Oui.
126 [**Chercheur**] - Est-ce que vous savez à quoi elle a servi cette réglette ?
127 [Isabelle] - Ben il y avait les contraintes de couleurs dessus ?
128 [**Chercheur**] - Il y avait les contraintes de couleurs au Sud...
129 [Isabelle] - Oui.
130 [**Chercheur**] - Et à droite effectivement mais euh...euh

elle était statique pour vous ?
131 [Isabelle] - Non! et en plus, ce qui était écrit dessus était à l'envers.
132 [**Chercheur**] - Oui, d'accord, ok,
133 [Isabelle] - Donc effectivement elle aurait pu aller ailleurs...
134 [**Chercheur**] - Elle aurait pu aller ailleurs et...
135 [Isabelle] - Qu'elle soit... voilà.
136 [**Chercheur**] - Et du coup, pour réduire justement, quand vous êtes arrivée au résultat, j'ai...
137 [Isabelle] - Ah oui !
138 [**Chercheur**] - J'ai fait la plus grande grille...
139 [Isabelle] - Hmm.
140 [**Chercheur**] - Je m'aperçois j'ai... euh j'ai essayé plusieurs fois, ça ne marche pas. Je pense que ça ne marche pas, mais j'ai pas la certitude...
141 [Isabelle] - Oui.
142 [**Chercheur**] - Que ça ne marche pas. Est-ce-que vous avez essayé de réduite ? c'est-à-dire...
143 [Isabelle] - Non.
144 [**Chercheur**] - ... de déplacer la réglette ?
145 [Isabelle] - Non.
146 [**Chercheur**] - Non, et euh est-ce-que vous avez une idée pourquoi vous ne l'avez pas fait ? parce que vous vouliez à tout prix...
147 [Isabelle] - Parce que c'était donné comme ça, et on n'a pas cherché.
148 [**Chercheur**] - D'accord.
149 [Isabelle] - Par contre, euh on a déjà fait sur la deuxième table... pendant que les...
150 [**Chercheur**] - La deuxième table oui.
151 [Isabelle] - Et effectivement il y avait des choses à deux colonnes, à deux lignes...
152 [**Chercheur**] - Oui, oui.
153 [Isabelle] - Donc qui pourraient correspondre à l' autre euh...
154 [**Chercheur**] - Oui.
155 [Isabelle] - ... avec la réglette, si vous voulez...
156 [**Chercheur**] - D'accord.
157 [Isabelle] - Et là ça fonctionne.

158 [**Chercheur**] - Et donc là sur les deux lignes ça fonctionne. Alors est-ce que vous pouvez me parler un peu de ce que vous avez fait sur l'autre activité ? avec ces deux... les deux lignes.

159 [Isabelle] - Alors sur les deux lignes déjà euh ben il y avait moins de contraintes.

160 [**Chercheur**] - Il y avait moins de contraintes.

161 [Isabelle] - Enfin... moins de lignes, du coup...

162 [**Chercheur**] - Oui.

163 [Isabelle] - Donc moins de contraintes, et les tuiles aussi, il y avait moins de contraintes couleurs puisque sur une même tuile il pouvait y avoir deux couleurs... deux fois la même couleur.

164 [**Chercheur**] - Ouais, d'accord. Et donc est-ce que vous avez un résultat à me donner sur euh...

165 [Isabelle] - Ah ben là il y a cent pour cent de réussite.

166 [**Chercheur**] - Cent pour cent de réussite.

167 [Isabelle] - Ben déjà on a éliminé les tuiles qui ne fonctionnaient pas avec parce que...

168 [**Chercheur**] - D'accord.

169 [Isabelle] - Il y avait un piège de couleur...

170 [**Chercheur**] - D'accord.

171 [Isabelle] - Enfin ça ne fonctionnait pas.

172 [**Chercheur**] - D'accord. Et quelle a été votre stratégie euh...

173 [Isabelle] - Euh... d'essayer déjà celles qui pouvaient se mettre ensemble...

174 [**Chercheur**] - D'accord.

175 [Isabelle] - Sur euh quatre cases.

176 [**Chercheur**] - D'accord.

177 [Isabelle] - Et... élimer toutes celles... toutes les couleurs, toutes les tuiles en couleur qui ne pouvaient pas euh... jouer le jeu.

178 [**Chercheur**] - D'accord, et avec ces quatre euh...

179 [Isabelle] - Et enfin...

180 [**Chercheur**] - Ces quatre premières cases, vous avez formé un motif ?

181 [Isabelle] - Voilà.

182 [**Chercheur**] - Et ce motif...

183 [Isabelle] - Et qu'on a reproduit, et qu'on a reproduit sur la ligne. Sur la...
184 [**Chercheur**] - Vous avez reproduit le motif...
185 [Isabelle] - Oui.
186 [**Chercheur**] - D'accord, mais du coup est-ce-que si je vous dis, parce-que là, la la ligne, les deux lignes étaient finies ?
187 [Isabelle] - Oui.
188 [**Chercheur**] - Puisque on arrive au bord de la table...
189 [Isabelle] - C'est ça.
190 [**Chercheur**] - Et si on devait continuer... indéfiniment, infiniment à gauche ou à droite... ?
191 [Isabelle] - Si on a les tuiles nécessaires... si on avait les tuiles, oui, on pouvait continuer.
192 [**Chercheur**] - Vous auriez pu... parce-que...
193 [Isabelle] - Oui.
194 [**Chercheur**] - Il y avait les mêmes couleurs...
195 [Isabelle] - C'est ça.
196 [**Chercheur**] - Sur chaque... sur les bords du motif.
197 [Isabelle] - Ça se retrouvait oui.
198 [**Chercheur**] - D'accord. Ok,
199 [Isabelle] - Ouais.
200 [**Chercheur**] - Euh... donc, ce que vous avez fait, c'est que finalement vous avez d'abord construit euh un carré de type deux...
201 [Isabelle] - Oui, c'est ça.
202 [**Chercheur**] - Deux fois deux...
203 [Isabelle] - deux, Quatre, oui voilà.
204 [**Chercheur**] - Et vous avez regardé qu'il y ait la même couleur à gauche...
205 [Isabelle] - Oui.
206 [**Chercheur**] - Et à droite et vous avez répété le motif ...
207 [Isabelle] - C'est ça.
208 [**Chercheur**] - Pour euh... OK. Et sur la... la bande... de taille un, est-ce-que vous avez eu le temps de regarder ou pas du tout ?
209 [Isabelle] - Oui.
210 [**Chercheur**] - Oui ?
211 [Isabelle] - Ah ben là, il y a zéro contrainte, enfin

zéro, il y a que le noir euh...
212 [**Chercheur**] - Il y a que le noir euh en haut et en bas .
213 [Isabelle] - Voilà. Et il y a pas de contrainte d' utilisée, il y aurait pu avoir la contrainte de faire que, qu'un vert, qu'un bleu...
214 [**Chercheur**] - D'accord.
215 [Isabelle] - Qu'un marron, etc...
216 [**Chercheur**] - Ouais.
217 [Isabelle] - Comme il n'y avait pas cette contrainte là...
218 [**Chercheur**] - Ouais.
219 [Isabelle] - Euh...
220 [**Chercheur**] - On prend euh...
221 [Isabelle] - On, on... voilà.
222 [**Chercheur**] - Vous preniez quoi du coup ?
223 [Isabelle] - Ben... au hasard.
224 [**Chercheur**] - Au hasard.
225 [Isabelle] - Au hasard et on collait euh en fonction du premier qu'on avait mis euh...
226 [**Chercheur**] - Ouais, on... on collait quoi du coup ?
227 [Isabelle] - Euh... Ben que la couleur de côté.
228 [**Chercheur**] - Que la couleur de côté et...
229 [Isabelle] - On ne se fiait qu'à la couleur de côté.
230 [**Chercheur**] - Et est-ce-que avec ces deux euh... ces deux euh... donc ces deux tuiles, ces deux carrés...
231 [Isabelle] - Oui.
232 [**Chercheur**] - Est-ce que ça suffisait pour... pour pouvoir recouvrir... la bande ?
233 [Isabelle] - Oui.
234 [**Chercheur**] - Oui ?
235 [Isabelle] - Ouais.
236 [**Chercheur**] - Alors vous faisiez quoi du coup, après ?
237 [Isabelle] - ... Ben non, on assemblait que les couleurs de côté ! Comme deux marrons, deux verts, deux...
238 [**Chercheur**] - Oui, ok, donc deux marrons...
239 [Isabelle] - Oui.
240 [**Chercheur**] - Deux verts...
241 [Isabelle] - Oui.

242 [**Chercheur**] - Etc, mais ce que je veux dire c'est que euh... est-ce que donc vous arriviez à paver...
243 [Isabelle] - Oui.
244 [**Chercheur**] - Euh...
245 [Isabelle] - On a fait la ligne.
246 [**Chercheur**] - La ligne ?
247 [Isabelle] - Oui.
248 [**Chercheur**] - Mais si je demandais de la prolonger...
249 [Isabelle] - Ben si on...
250 [**Chercheur**] - En gardant le même, le même...
251 [Isabelle] - Le même principe ?
252 [**Chercheur**] - En gardant le même principe...
253 [Isabelle] - Oui.
254 [**Chercheur**] - Et les mêmes tuiles ?
255 [Isabelle] - Oui... ! oui.
256 [**Chercheur**] - Vous êtes sûre ?
257 [Isabelle] - Ben...
258 [**Chercheur**] - Est-ce que la couleur est... la plus à gauche et la couleur la plus à droite, est-ce-que c' était les mêmes ?
259 [Isabelle] - Parce qu'il y avait cette contrainte de faire le... ?
260 [**Chercheur**] - Non...
261 [Isabelle] - Ah!
262 [**Chercheur**] - Mais pour répéter, quand on répète un motif...
263 [Isabelle] - Ah mais là on... j'ai pas répété un motif ?
264 [**Chercheur**] - Vous avez... ah vous avez pris n'importe ...
265 [Isabelle] - N'importe quelle couleur.
266 [**Chercheur**] - Vous avez construit... n'importe quelle couleur...
267 [Isabelle] - Hé oui !
268 [**Chercheur**] - Et vous avez construit une bande ?
269 [Isabelle] - oui!
270 [**Chercheur**] - Finie ?
271 [Isabelle] - Oui !
272 [**Chercheur**] - Donc pour vous le, la bande qu'on avait, qu'on a dessinée sur la table, c'était vraiment

quelque chose de fini, c'est pas quelque chose qui se prolonge euh... indéfiniment ?

273 [Isabelle] - Oui, voilà.

274 [**Chercheur**] - D'accord. Ok... et euh... c'est très bien hein ?

275 [Ha c'est marrant parce que euh votre euh petit Arnaud il ne pensait pas la même chose !]

276 [**Chercheur**] - Et euh du coup si vous aviez des questions, des remarques sur l'activité euh en elle-même ?

277 [Isabelle] - Non pas particulièrement.

278 [**Chercheur**] - Non ?

279 [Isabelle] - Il y en a un qu'elle n'a pas fait là, celui avec les points...

280 [**Chercheur**] - Avec les points ha oui, ça c'est euh... ok, d'accord.

281 [Isabelle] - Voilà.

282 [**Chercheur**] - Et sinon l'histoire de la réglette euh ... ça c'est un problème. Il faut l'expliquer ça, parce que sinon, on fait directement sur la plus grande grille et puis...

283 [Isabelle] - Oui.

284 [**Chercheur**] - Et puis en fait, on s'amuse pas à...

285 [Isabelle] - A la bouger.

286 [**Chercheur**] - Alors que le but, c'est de travailler avec plusieurs tailles de rectangles...

287 [Isabelle] - C'est ça.

288 [**Chercheur**] - Pour avoir plusieurs résultats... différents.

289 [Isabelle] - C'est ça, et on se donne moins de contraintes justement euh...

290 [**Chercheur**] - Ouais.

291 [Isabelle] - En la bougeant.

292 [**Chercheur**] - Ouais, d'accord. Ben je vous remercie.

293 [Isabelle] - Ben de rien, j'y retourne.

294 [**Chercheur**] - Ça marche, merci bien.

8 ENT-EXP-I-8

1 RETRANSCRIPTION Clévos1_8 (Dame et MG 11 min 06 s)

2

3

4 **[Chercheur]** - Euh alors euh pourquoi vous étiez venue vous-même ici ? Pour euh...

5 [Dame] - Alors moi c'est clairement euh pour les euh... pour le défi mathématique, pour les... aux Clévos en général ou là pour cet atelier en particulier ?

6 **[Chercheur]** - Non non pour cet atelier en particulier.

7 [Dame] - Pour le... pour l'atelier mathématique.

8 **[Chercheur]** - D'accord.

9 [Dame] - Pour le principe d'atelier mathématique parce que... on aime beaucoup les mathématiques, on est curieux, on est adepte du Palais de la Découverte de... depuis qui sont tout petit.

10 **[Chercheur]** - Oui.

11 [Dame] - Et euh justement il y avait des ateliers comme ça...

12 **[Chercheur]** - Oui.

13 [Dame] - Qui ont participé vraiment à leur éveil ...

14 **[Chercheur]** - Oui.

15 [Dame] - Et euh...Mais vraiment enfin je veux dire c'est pour ça que je suis pour la diffusion partout...

16 **[Chercheur]** - Oui.

17 [Dame] - Et pas juste très contente qui est ça là . Et heu et après de fil en aiguille quand même ils sont accrochés aux mathématiques et donc on a toujours, on fait la FFJM la...

18 **[Chercheur]** - Oui.

19 [Dame] - Le concours des...

20 **[Chercheur]** - Oui.

21 [Dame] - Tous ensemble, tout ça en famille on y va alors plus scolaire enfin voilà donc on a eu... on aime bien tout ce qui est aussi mathématiques pour les études mais on aime bien tout ce qui est aussi jeux mathématiques, on a le calendrier des mathématiques donc ben voilà.

22 [**Chercheur**] - D'accord.
23 [Dame] - Donc quand j'ai vu ça je me suis dit faut qu'on aille voir ça.
24 [**Chercheur**] - Et là, là vous avez euh... vous avez euh ... pour vous, vous avez fait des mathématiques, c'est des jeux mathématiques ?
25 [Dame] - Moi, moi en fait...
26 [**Chercheur**] - Je parle de vous hein ?
27 [Dame] - Ouais ouais, moi je... moi j'aime bien enfin c'est vrai que c'est avec les enfants que j'ai vraiment pris goût à faire tout ça, tout le temps ...
28 [**Chercheur**] - D'accord.
29 [Dame] - Mais j'ai fait un bac scientifique euh ... à l'époque, voilà après...
30 [**Chercheur**] - Oui mais là, là là précisément là vous avez le sentiment d'avoir...
31 [Dame] - Alors là j'ai pris mes petits carrés tout ça mais comme moi le truc c'est que moi j'ai un côté quand même très empirique...
32 [**Chercheur**] - Oui.
33 [Dame] - Et euh je le vois quand on se fait de la FFJM ou des choses moi j'ai tendance à tout faire alors que je trouve que, parce qu'on partage beaucoup, on aime bien échanger...
34 [**Chercheur**] - Ouais.
35 [Dame] - Eux ont tendance à très rapidement chercher une généralisation qui évite quatre pages de... vous voyez et moi j'aurai eu même là, mais par contre ce que... je progresse parce que... je vois petit à petit que c'est lent... c'est peut-être avec le temps que c'est lent voilà...
36 [**Chercheur**] - Non...
37 [Dame] - Là j'ai pris, par rapport à ce que j'ai fait là ?
38 [**Chercheur**] - Oui.
39 [Dame] - J'ai pris mes petits carrés euh... voilà je me suis aperçue, puis je suis arrivée au bout et .... de ma ligne... et puis j'ai vu que ça bloquait.
40 [**Chercheur**] - Oui.

41 [Dame] - Parce que, parce que j'avais mis mon violet et j'avais pas de violet de l'autre côté pour voilà j'étais bloquée.

42 [**Chercheur**] - Et comment vous... est-ce que vous vous rappelez comment vous avez réagi quand vous avez vu que ça bloquait ?

43 [Dame] - Ah ben quand j'ai vu que ça bloquait je me suis dit j'aurais dû faire mes petits tas, pour savoir qu'est-ce que j'avais à disposition, parce que là j'étais partie... j'ai à disposition euh... le violet dans l'autre sens quoi par exemple... Et en fait non quoi, j'avais... ça collait pas[... non audible 3 min 02], j'ai enlevé et voilà j'ai remis voilà et après du coup j'ai... ben j'ai vu qui avait euh... qu'en fait il fallait que ça s'enchaîne et ...

44 [**Chercheur**] - Les couleurs ?

45 [Dame] - Les couleurs, c'est-à-dire moi j'étais sur les tuiles avec les points là...

46 [**Chercheur**] - Oui.

47 [Dame] - Avec un sens, donc il fallait que j'ai une bande de quatre qui...qui s'enchaîne...

48 [**Chercheur**] - Oui.

49 [Dame] - C'était ceux-là que j'allais dupliquer voilà.

50 [**Chercheur**] - D'accord.

51 [Dame] - Mais je l'ai trouvé, enfin je l'ai constaté en essayant en fait euh... voilà...

52 [**Chercheur**] - Oui mais...

53 [Dame] - Donc voilà et euh... alors que j' entendais bien Jean et Victor qui eux quand même cherchaient à généraliser euh... à généraliser aussi éventuellement se questionner sur, parce qu'il n'y avait pas de sens ?

54 [**Chercheur**] - Hmm Hmm.

55 [Dame] - Des choses comme ça et tout et voilà alors ça m'intéresse mais moi je ne suis pas allée plus loin...

56 [**Chercheur**] - Mais de toute façon là, là vous aviez du matériel...

57 [Dame] - [...]
58 [Chercheur] - Non mais vous aviez du matériel donc c'était...
59 [Dame] - Oui.
60 [Chercheur] - Normal que vous alliez au bout...
61 [Dame] - Oui.
62 [Chercheur] - De ce que vous vouliez faire hein c'est ...
63 [Dame] - Oui oui oui oui.
64 [Chercheur] - Alors...
65 [Dame] - Du coup j'ai pas, par contre par rapport à l'expérience que je peux vous apporter c'est que c'est vrai qu'on a la consigne autour de la table...
66 [Chercheur] - Oui.
67 [Dame] - On a pris les petits trucs...
68 [Chercheur] - Oui.
69 [Dame] - Et je pense que... graduellement j'aurais peut-être pu l'intégrer... j'aurais commencer peut être par la bande droite...
70 [Chercheur] - Oui mais vous n'aviez pas la possibilité parce qu'il y avait déjà quelqu'un c'est ça ?
71 [Dame] - Oui et puis parce que je suis partie là-dedans puis après on part, on... voilà on... c'est tout on est à fond on se dit mais non voilà et ouais... mais peut-être qu'il fallait pas vous pour votre expérience, peut-être que vous vouliez qui ait justement des gens qui arrivent au milieu de ça...
72 [Chercheur] - Nous on essaye d'étudier euh... voilà comment on peut faire...
73 [Dame] - Mais euh... alors faut pas généraliser parce que moi j'étais un peu focaliser là-dessus... je vois eux ils avaient une vision d'ensemble à la table... pourtant chacun faisait un truc...
74 [Chercheur] - Ah oui.
75 [Dame] - Et eux ils voyaient en fait grosso modo ils regardaient un peu ce que je faisais, ils s'auto-regardaient de manière très naturelle.
76 [Chercheur] - D'accord.
77 [Dame] - Parce que moi j'ai pas fait du tout en fait.

78 [**Chercheur**] - Oui D'accord.
79 [Dame] - Moi je suis restée là-dedans.
80 [**Chercheur**] - Je comprends...
81 [Dame] - Donc c'est...voilà faudra prendre d' autres infos voir comment l'autre table... mais a priori... les gens arrivent généralement à voir comme il y en a que trois c'est faisable et puis c' est lié...
82 [**Chercheur**] - Oui vous pensez que c'est lié puisque c' est sur la même table ?
83 [Dame] - C'est sur la même table il y a des... voilà.
84 [**Chercheur**] - Et est-ce que vous pouvez expliciter, dire qu'elle était la question que vous avez traitée ? Quelle était, vous m'avez dit que vous avez posé des rectangles vous voyez, dupliquer... en fait est-ce que vous arrivez à dire quel était le problème que vous étiez en train de traiter ?
85 [Dame] - Ah euh... de manière basique...
86 [**Chercheur**] - Non mais de manière basique, très très matériel...
87 [Dame] - Pour moi c'était est-ce que je peux carreler un sol avec euh... avec des carreaux qu'on me donne là ? Et que ce soit joli...
88 [**Chercheur**] - Et le sol il est, il est... ah joli ?
89 [Dame] - Enfin non mais que ce soit géométrique quoi avec la règle de faire des carrés de couleurs ...
90 [**Chercheur**] - La règle de faire des carrés de couleurs ...
91 [Dame] - Voilà de faire des carrés de couleurs...
92 [**Chercheur**] - Et qu'est ce que vous appelez un carré de couleurs, un motif ?
93 [Dame] - Oui voilà un motif, c'est-à-dire pas les mettre n'importe comment...
94 [**Chercheur**] - Un motif euh...
95 [Dame] - Voilà c'est-à-dire...
96 [**Chercheur**] - Qui se répète c'est ça ?
97 [Dame] - [... 6min 16 non audible] Du coup ça faisait le motif qui se répète et ce qui est indiqué

sur la table avec le oui non.
98 [**Chercheur**] - Hmm Hmm.
99 [Dame] - Voilà le but c'était ça moi j'étais un carreleur et il fallait que je fasse ça et me dire est-ce que... dans quelle... quelle est la configuration, qu'est-ce que je dois faire pour que j'arrive à carreler le plus possible... en surface ?
100 [**Chercheur**] - Donc une surface euh... une surface euh ...
101 [Dame] - Oui une surface...
102 [**Chercheur**] - Avec des limites ou pas ?
103 [Dame] - Alors euh... pour moi toute seule euh... pour moi c'était euh quand j'arrive sur le stand de jeux, c'était il faut que j'utilise tout ça, c'était avec des limites de mes carreaux et de mon... et peut-être du dessin mais comme le dessin il avait ... il avait des bords qui pouvaient partir moi j'avais tendance...
104 [**Chercheur**] - Exactement.
105 [Dame] - A vouloir carreler les bords partis mais par contre j'aurais été satisfaite si j'avais fait toutes mes... si j'avais utilisé tous mes carreaux là...
106 [**Chercheur**] - D'accord.
107 [Dame] - Les deux zozos eux ils ont eu la dimension, alors du coup ça a biaisé la mienne, c'est que eux ils finissaient même pas, parce que eux ils avaient le concept parce qu'ils en font sûrement voilà ils ont carrelé l'infini, ils suffit de réfléchir au truc voilà.
108 [**Chercheur**] - D'accord.
109 [Dame] - Moi je suis peut-être plus le commun des mortels, le but c'était de... pas vraiment effectivement de carreler ma surface puisque y avait pas de bord, y avait des bords à demi.
110 [**Chercheur**] - D'accord.
111 [Dame] - Mais j'ai eu ma première idée, ma première impression euh... ben j'en ai pas, enfin j'en ai plus voilà alors que eux ont traité tout de suite et du coup ils m'ont un peu biaisée parce qu'

ils m'ont dit mais non... on... on fait l'infini quoi...
112 [**Chercheur**] - Ok ah oui, d'accord.
113 [Dame] - Mais pour moi non au départ.
114 [**Chercheur**] - Et donc du coup est-ce que vous pouvez, est-ce que vous pouvez dire que vous avez obtenu un résultat ? C'est-à-dire est-ce que vous avez réussi à dire euh... voilà avec euh... j'ai trouvé un motif que je peux répéter...
115 [Dame] - Voilà j'ai trouvé un motif que je pouvais répéter.
116 [**Chercheur**] - Donc vous avez... pour vous c'est un résultat de ce problème ?
117 [Dame] - Oui.
118 [**Chercheur**] - Ok très et... est-ce que vous avez donc des questions par rapport ou des remarques, vous m'avez déjà fait une remarque par rapport à... à l'interaction que vous aviez qui vous avait influencée. Est-ce que vous avez des remarques sur le matériel ou sur euh... toutes remarques que vous pourriez faire sur ce que vous venez de faire ?
119 [Dame] - Non mais c'est vrai que j'aurai eu tendance sans remélanger les... parce que le fait d'avoir les pions en tas indirectement ça influe la consigne.
120 [**Chercheur**] - Oui.
121 [Dame] - Parce que du coup on se dit ah ben tiens j'en ai peut-être pas deux comme ça pas deux comme ça quand ils sont en... tous mélangés je trouve que c'est mieux parce qu'on part de rien, voilà. C'est-à-dire je vois maintenant ils ont tout remis dans l'ordre pour... dans le bon tas.
122 [**Chercheur**] - Oui.
123 [Dame] - Ils ont tout remis en mélangé...
124 [**Chercheur**] - D'accord.
125 [Dame] - Ils avaient eux leurs petits tas...
126 [**Chercheur**] - Oui.
127 [Dame] - Et euh... ils ont tout remis en mélangé.
128 [**Chercheur**] - D'accord.
129 [Dame] - Donc ça peut-être veiller... enfin je

sais pas qu'elle est votre partie pris...
130 [**Chercheur**] - Non mais si si c'est très bien ça nous intéresse de oui...
131 [Dame] - Ça c'est une réflexion... Honnêtement la notion de frontières finies pas finies euh... moi je pense que ça va bien comme ça justement avec le fait que les bords soient pas finis ça laisse...
132 [**Chercheur**] - Oui.
133 [Dame] - Ça laisse le choix.
134 [**Chercheur**] - D'accord.
135 [Dame] - Mais je la finirai pas par contre parce que si c'est fini on a l'impression qu'on s'amuse juste à faire ça puis et on s'en va.
136 [**Chercheur**] - D'accord.
137 [Dame] - Enfin...
138 [**Chercheur**] - Oui oui mais d'accord, ah oui.
139 [Dame] - Voilà mais c'est un petit peu surprenant de pas avoir de question mais c'est bien enfin...
140 [**Chercheur**] - Mais la question vous avez quand même réussi à me dire qu'elle était la question que vous avez traité.
141 [Dame] - Oui mais ça m'a fait penser au... justement mais c'était au Palais de la Découverte, y 'a la récréation mathématique...
142 [**Chercheur**] - Hmm Hmm.
143 [Dame] - Je sais pas si vous connaissez, y a des tables...
144 [**Chercheur**] - Oui oui bien sûr.
145 [Dame] - Ça m'a fait penser à ça parce qu'on nous laisse aussi dans un coin voilà...
146 [**Chercheur**] - D'accord.
147 [Dame] - Et donc c'est super si ça pouvait être itinérant partout parce que [...]

148 [**Chercheur**] - Hahahaha bon ben merci beaucoup hahahaha .
149 [Dame] - [...]

Annexe J

Transcriptions des entretiens audio de l'expérimentation II

1 ENT-EXP-II-1

```
RETRANSCRIPTION Clévos2_1 (Didier et MG 4 min 07 s)


[Chercheur] - Vas-y !
[Didier]    - Didier Justin
[Chercheur] - Parle fort... alors dis-moi euh donc pourquoi tu étais venu ici ? redis-moi ?
[Didier]     - Euh...   parce que j'aime bien les maths...
[Chercheur] - Ouais.
[Didier]    - Et au lieu de rester à la maison on peut faire des activités.
[Chercheur] - Voilà très bien et dis moi euh... est-ce-que tu penses que euh... tu as fait des maths euh ... ça t'as plu comme maths ? C'était... ouais ?
[Didier]    - C'était bien.
[Chercheur] - C'était bien ?
[Didier]    - Oui.
[Chercheur] - Ok tu vas peut-être pouvoir y retourner. Et qu'est-ce que tu as fait ? Alors est-ce que tu pourrais m'expliquer ce que tu as fait ?
[Didier]    - Euh j'ai fait euh ah les pièces qu'on pouvait mettre les couleurs à côté.
```

16 [**Chercheur**] - Oui alors lesquelles ? Tu vois y avait deux... y avait deux meubles.
17 [Didier] - Avec alors le rectangle
18 [**Chercheur**] - Les rectangles où y avait une... une réglette ?
19 [Didier] - Oui.
20 [**Chercheur**] - Ouais d'accord et alors qu'est-ce-que tu as fait avec cette euh... avec ces rectangles ?
21 [Didier] - Euh...on a.. on a on les a placés euh par... enfin par... on les a mis à côté mais...
22 [**Chercheur**] - Hmm.
23 [Didier] - On les a mis à côté en couleurs.
24 [**Chercheur**] - Oui alors ?
25 [Didier] - Alors couleur par couleur...
26 [**Chercheur**] - Voila.
27 [Didier] - De côté et euh... à la fin on était un peu bloqué.
28 [**Chercheur**] - On était un peu bloqué. Alors tu as fait quoi comme euh rectangle ?
29 [Didier] - Hmm...
30 [**Chercheur**] - Un grand, un petit, un... comment ?
31 [Didier] - Un petit.
32 [**Chercheur**] - Et quelle taille ? Tu te rappelles ?
33 [Didier] - Comme ça.
34 [**Chercheur**] - Ah comme ça... mais en fait est-ce-que tu te rappelles combien de carreaux ?
35 [Didier] - euh... neuf comme ça.
36 [**Chercheur**] - Neuf carreaux ? Neuf carreaux comme ça ? Et comme ça y en avait combien ?
37 [Didier] - Hmm... comme ça ?
38 [**Chercheur**] - Hmm.
39 [Didier] - Euh je crois en avoir mis un de quatre.
40 [**Chercheur**] - Neuf et quatre ?
41 [Didier] - Oui.
42 [**Chercheur**] - Très bien et alors qu'est-ce-que tu as ... est-ce que tu as réussi ?
43 [Didier] - Euh non.
44 [**Chercheur**] - Tu n'as pas réussi ?
45 [Didier] - Non pas tout.
46 [**Chercheur**] - Tu n'as pas tout fait le rectangle, tu t

'es arrêté ? parce que... pourquoi tu t'es arrêté ?
47 [Didier] - Parce qu'on était bloqué et y avait deux pièces qu'on pouvait... deux pièces qu'on pouvait pas mettre.
48 [**Chercheur**] - D'accord et qu'est-ce que tu as fait à ce moment là ?
49 [Didier] - Ben on a arrêté.
50 [**Chercheur**] - tu t'es arrêtée... ok...bon. Et est-ce que tu as... tu as envisagé de faire un autre rectangle ?
51 [Didier] - Euh... non.
52 [**Chercheur**] - Non voilà, tu as fait juste un petit... un rectangle tu m'as dit euh neuf par...
53 [Didier] - Quatre.
54 [**Chercheur**] - Quatre, t'es pas arrivé et tu t'es arrêté là.
55 [Didier] - Hmm.
56 [**Chercheur**] - D'accord. Et... est-ce que tu penses que tu as fait des mathématiques ?
57 [Didier] - Euh... oui.
58 [**Chercheur**] - Oui ? euh... est-ce que tu en fait des fois des mathématiques comme ça à l'école ?
59 [Didier] - Euh oui.
60 [**Chercheur**] - Très bien. Alors qu'est-ce que t'as déjà fait comme mathématiques qui ressemblent à ça à l' école.
61 [Didier] - Euh... on a fait euh... on avait colorié des cases euh... j'ai...la même couleur.
62 [**Chercheur**] - Ouais.
63 [Didier] - Y a... y avait des cases et on devait euh... dans la [...] dans les cases y avait des tous petits carreaux.
64 [**Chercheur**] - Hmm.
65 [Didier] - Et y avait quatre parties et on devait les colorier et ben... comme... comme on l'a fait, enfin on l'a fait... on devait colorier euh bleu, vert...
66 [**Chercheur**] - Hmm hmm.
67 [Didier] - Euh jaune et orange...
68 [**Chercheur**] - Hmm hmm.

69 [Didier] - Et euh du coup on nous faisait les classer comme ce qu'on a fait aujourd'hui.

70 [**Chercheur**] - D'accord, bon est-ce-que... est-ce-que ben finalement euh tu m'as dis que tu t'étais bien amusé, que tu avais donc euh... tu as vu qu'il y avait une petite euh... réglette ?

71 [Didier] - Oui.

72 [**Chercheur**] - Tu l'as bougée ou tu ne l'as pas bougée ?

73 [Didier] - Euh... au début je l'ai bougée et après je l'ai laissée pour... enfin placer une pièce.

74 [**Chercheur**] - D'accord... bon ben écoute je te remercie ha! ha ha ha c'est très bien tu as participé à la recherche hahaha.

2 ENT-EXP-II-2

1 RETRANSCRIPTION Clévos2_2 (Ingrid et MG 4 min 20 s)

2

3

4 [**Chercheur**] - Allons-y !

5 [Ingrid] - Bonjour je je m'appelle Ingrid et j'ai quarante cinq ans.

6 [**Chercheur**] - Voilà. Bon alors re... est-ce que vous pouvez me redire pourquoi vous vous étiez... inscrite ici ?

7 [Ingrid] - Parce que j'habite "Etoiles" et que chaque fois qu'il y a quelque chose aux Clévos on vient.

8 [**Chercheur**] - Voilà... bon quelque soit euh... la la discipline... les sciences...

9 [Ingrid] - Sauf si vraiment ça ne me plaît pas mais sinon oui...

10 [**Chercheur**] - D'accord. Est-ce-que euh alors euh qu' est-ce que vous pensez que vous avez fait là ?

11 [Ingrid] - On a essayé de faire une frise géométrique mais euh... pas réussi il y a quelque chose qu'on n'a pas compris.

12 [**Chercheur**] - Vous étiez sur quel... meuble ?

13 [Ingrid] - Euh celui de gauche avec les petits...

carreaux de couleur les quatre petits triangles de couleur.

14 [**Chercheur**] - D'accord. Et donc vous avez essayé de faire une frise et vous n'avez pas réussi ?

15 [Ingrid] - Non parce que ça commençait bien, ça allait bien et en fait il y avait toujours euh... ben à la fin un morceau qui coinçait on croyait qu' on était bon et la fin non euh... non.

16 [**Chercheur**] - Et c'est c'est quelle euh taille de frise que vous avez euh faite ?

17 [Ingrid] - Ben le... la... cette frise là ! Enfin [...]

18 [**Chercheur**] - Oui ben enfin en fait y en a y en avait trois sur le

19 [Ingrid] - Ah oui ? Ben alors je ne peux pas vous dire si c'est celle du du...

20 [**Chercheur**] - Vous vous rappelez la...les couleurs ?

21 [Ingrid] - Euh vert en bas bleu sur le côté... enfin on... c'est celle où on a mis les cadres nous-mêmes, en bas c'est vert en bas c'est bleu.

22 [**Chercheur**] - Ah d'accord, donc les réglettes là ?

23 [Ingrid] - Oui les réglettes ouais ouais... ouais voilà.

24 [**Chercheur**] - Ah d'accord j'avais pas compris j'ai cru que c'était l'autre meuble...

25 [Ingrid] - Ah non non non ouais les réglettes ouais ouais... il y a deux côtés des couleurs fixes et nous on a rajouté la réglette verte et bleue donc on a pas...

26 [**Chercheur**] - Et vous l'avez positionnée comment cette réglette verte et bleue ?

27 [Ingrid] - Et ben sur les deux côtés il n'y avait rien...

28 [**Chercheur**] - Oui... mais euh... est-ce-que vous l' avez euh... positionnée euh...

29 [Ingrid] - Ben la longueur sur la longueur, la largeur sur... ah on a fait le grand tour...

30 [**Chercheur**] - Le grand ?

31 [Ingrid] - Ouais ouais oui on l'a mis... ben y avait une... un entourage qui existait nous on l'a

mis sur l'autre entourage.

32 [**Chercheur**] - D'accord...

33 [Ingrid] - Symétrique.

34 [**Chercheur**] - D'accord non mais ça de...

35 [Ingrid] - Donc au début ça commençait bien et puis à la fin ben le dernier morceau n'allait plus, donc on a tout redéfait, on a recommençait différemment , ça n'allait plus non plus euh enfin vous voyez au bout d'un moment euh ...

36 [**Chercheur**] - Ca veut dire que vous avez fait plusieurs essais...

37 [Ingrid] - Oui.

38 [**Chercheur**] - Ca ne marchait pas au premier coup vous avez recommencé...

39 [Ingrid] - Oui.

40 [**Chercheur**] - Parce que votre idée c'est quoi ? c'est que c'est possible ou pas c'est pas possible ?

41 [Ingrid] - Je je je pense que c'est possible mais il y a un truc qui nous... échappe peut-être au début, on a essayé de faire euh... toujours la même couleur on va dire enfin... que les petits carreaux rouges, ça ne marchait pas ensuite on va faire du rouge du jaune du vert, du rouge du jaune du vert, ça ne marchait pas non plus euh ... du rouge du jaune du rouge du jaune du rouge du jaune , on n'y est pas arrivé non plus, donc on doit mal commencé ou quelque part au départ euh... du coup après euh ... ça coin... ça coince à un moment, mais c'est sûrement possible hein !

42 [**Chercheur**] - Ah vous pensez que c'est sûrement possible ?

43 [Ingrid] - Oh ben je pense que c'est possible ouais .

44 [**Chercheur**] - Ok... mais...

45 [Ingrid] - Je sais pas comment mais c'est possible hein.

46 [**Chercheur**] - Ha Ha d'accord. Et... alors du coup euh ... euh... ce que vous avez fait là ça s'est passé comment pour vous euh... c'était intéressant, c' était agaçant, c'était... ?

47 [Ingrid] - Ben au au début c'est rigolo, au bout d' un moment ça devient agaçant parce qu'on a l' impression que c'est facile euh... on se... on se... on a tous les pions de toutes les couleurs mais à force de voir les... de tous les voir... on... s' embrouille on sait plus quel pion et quel pion. Donc au début c'est marrant, parce que ça à l'air facile on dit "je vais y arriver" mais au bout d'un moment si ça... ça devient agaçant parce que en fait on n' y arrive pas quoi hein.

48 [**Chercheur**] - Ok Ha ha ha et ... d'accord et euh... euh pfff... vous dites euh... qu'est-ce qui vous fait dire que c'était euh... que ça devait être possible à chaque coup ?

49 [Ingrid] - Oh ben parce que il y a tellement... il y a toutes les formes de couleurs donc je me dis il y a, il y a une tactique, c'est comme tous les jeux, comme le Rubik's cube tout ça hein moi il y a une , une sûrement une astuce, une tactique euh...qui fait qu'on y arrive mais... voilà...

50 [**Chercheur**] - D'accord et est-ce que vous... est-ce que vous avez démarré avec une é... une tactique qui n'a pas marché, que vous pouvez décrire où... ?

51 [Ingrid] - Ben nous on a essayé de faire des... des couleurs, au début on s'est dit on va faire ... au début on a commencé comme ça au pif juste en mettant les couleurs euh les bonne couleurs qui se touchent ... après on a vu que ça n'a pas marché donc là on a réfléchi, on a fait ...

52 [**Chercheur**] - Sur quoi... sur une ligne ?

53 [Ingrid] - Sur un... là ouais c'est sur une ligne.

54 [**Chercheur**] - Une ligne d'accord...

55 [Ingrid] - Ensuite on... alternait les couleurs, ça ne marchait pas, on a fait toutes les mêmes couleurs et... et au début oui au début ça va toujours bien et et puis d'un coup euh... d'un coup ben ça va plus... enfin ...

56 [**Chercheur**] - D'accord.

57 [Ingrid] - Alors est-ce qu'on se rate dès le début ou est-ce qu'on se rate en cours de route parce que

à la fin on n'a plus trop le choix des pièces au début on a le choix des pièces on peut les mettre comme on veut...
[**Chercheur**] - Hmm.
[Ingrid] - Puis à la fin c'est vrai qu'on n'a plus trop le choix donc euh... c'est qu'à la fin ouais ça co... ça coince.
[**Chercheur**] - D'accord... et ben je vous remercie.
[Ingrid] - Et bien merci beaucoup, je vais essayer l'autre.
[**Chercheur**] - Hahaha allez-y !

3 ENT-EXP-II-3

RETRANSCRIPTION Clévos2_3 (Faustine et MG 5 min 59 s)

[**Chercheur**] - Vas-y !
[Faustine] - Faustine onze ans.
[**Chercheur**] - Voilà, alors je... euh... ah ben euh...
[intervention tierce personne] Je suis la mamie.
[**Chercheur**] - Non non non non mais vous je vous interviewerez après hein !
-[intervention tierce personne] Ah bon !
[**Chercheur**] - Oui ha ha ha ha alors euh... redis-moi pourquoi tu étais venue ici ?
[Faustine] - euh ben déjà parce que je suis chez mamie et du coup elle nous a trouvé une activité
[**Chercheur**] - Hmm.
[Faustine] - ... et... euh j'adore les maths parce que ben à l'école on en fait beaucoup même on fait ça au collège mais euh du coup j'aime bien les maths .
[**Chercheur**] - D'accord.
[Faustine] - Et du coup ben j'avais envie de venir le faire.
[**Chercheur**] - Et tu as retrouvé euh... des activités mathématiques que tu connaissais ou c'était un peu nouveau sur le plan mathématique ?
[Faustine] - Euh non c'est... c'est nouveau parce que... ben... on n'a jamais fait euh peut-être le

avec les les carrés euh quand il y avait noir noir en bas et blanc en haut...

17 [**Chercheur**] - Hmm hmm.

18 [Faustine] - Ça je connaissais... mais euh c'était plus petit ce qu'on avait fait, du coup là il y a c' était plus long du coup c'était mieux.

19 [**Chercheur**] - D'accord, et alors du coup euh dis-moi tu t'es intéressée à quelle euh... activité là-bas ?

20 [Faustine] - Et ben on va voir euh... avec mon grand frère mais on a fait un peu... avec une autre personne, on a fait euh sur le... l'ilot euh où il y a euh ou il y a le pavé blanc et noir...

21 [**Chercheur**] - Hmm.

22 [Faustine] - Et donc on a fait tous les exercices...

23 [**Chercheur**] - Hmm hmm.

24 [Faustine] - Il y en a un où c'est... une maman et une mamie qui ont fait...

25 [**Chercheur**] - Hmm hmm... et toi-même vas-y dis-moi toi ce que tu as fait ?

26 [Faustine] - Ben en fait on a un peu tout fait ensemble.

27 [**Chercheur**] - Ouais, alors euh...

28 [Faustine] - C'est-à-dire que le... celui où il fallait faire des bandes de couleurs... ben... on a fait tous ensemble, on cherchait les pièces euh et cetera et...

29 [**Chercheur**] - Et qu'est-ce-que vous avez... fait à ce moment là, vous avez réussi à le...

30 [Faustine] - Oui on a réussi à le faire...

31 [**Chercheur**] - Ok.

32 [Faustine] - Toujours avec le point en haut...

33 [**Chercheur**] - Hmm.

34 [Faustine] - Et après pour euh... pour celui avec le blanc et noir et ben moi comme je l'avais un peu fait à l'école j'ai tout de suite compris qu'il fallait faire ça

35 [**Chercheur**] - hmm hmm.

36 [Faustine] - Du coup ben après avec les garçons euh ... on a on a continué à faire la logique...

37 [**Chercheur**] - Hmm hmm.

38 [Faustine] - Donc c'est-à-dire toujours avec...
39 [Chercheur] - C'est quoi la logique vas-y explique moi ?
40 [Faustine] - Eh ben c'est-à-dire que on devait toujours avoir un triangle blanc en haut pour qu'on consi qu'on pour qui euh... touche le blanc en haut ...
41 [Chercheur] - Hmm hmm.
42 [Faustine] - Et après on devait avoir par exemple si on avait un triangle rouge en bas, on devait euhde en bas de la pièce, on devait obligatoirement avoir en haut de la pièce noire
43 [Chercheur] - Hmm hmm.
44 [Faustine] - Pour que ça touche
45 [Chercheur] - Hmm hmm.
46 [Faustine] - Et pareil pour les côtés
47 [Chercheur] - Hmm hmm.
48 [Faustine] - Et donc euh du coup ben on a trouvé que la logique et ben il fallait toujours avoir euh euh deux couleurs euh du sur les mêmes pièces
49 [Chercheur] - Oui.
50 [Faustine] - Et à des endroits différents.
51 [Chercheur] - D'accord et est-ce que tu as réussi à faire euh
52 [Faustine] - Oui.
53 [Chercheur] - Donc tu as fait des bandes ?
54 [Faustine] - Oui.
55 [Chercheur] - Est-ce que tu t'es arrêtée ou est-ce que tu penses que
56 [Faustine] - Eh ben alors justement...
57 [Chercheur] - Ça peut aller plus loin ?
58 [Faustine] - Eh ben justement on en a fait un mais il restait euh... une case là-bas du coup
59 [Chercheur] - Alors là-bas euh... ha ha...
60 [Faustine] - Ici...
61 [Chercheur] - Ha ha ha...
62 [Faustine] - Non ici.
63 [Chercheur] - A gauche ?
64 [Faustine] - A gauche et euh... du coup et ben on a essayé de voir si on pouvait en faire un autre...

65 [**Chercheur**] - Hmm hmm.
66 [Faustine] - Et on a vu qu'en fait et ben avec les blancs les blancs coïncidaient entre-eux mais ils coïncidaient pas avec les noirs
67 [**Chercheur**] - Hmm hmm.
68 [Faustine] - Du coup ben on a vu que ben ça devait s'arrêter...
69 [**Chercheur**] - Ouais.
70 [Faustine] - Et qu'on pouvait pas continuer.
71 [**Chercheur**] - Donc là tu dis toi c'est impossible... c'est ça ?
72 [Faustine] - Eh ben en fait on peut continuer mais avec les pièces euh qu'on a déjà mis dessus.
73 [**Chercheur**] - Ouais.
74 [Faustine] - On peut pas continuer avec des nouvelles couleurs.
75 [**Chercheur**] - Ah ! D'accord... bon... et donc tu penses que c'est c'est la question que tu as résolue euh... au travers de
76 [Faustine] - Oui je pense.
77 [**Chercheur**] - D'accord euh donc tu n'as pas du tout euh... travaillé sur l'ilot...
78 [Faustine] - Si en fait parce que...
79 [**Chercheur**] - Ah bon
80 [Faustine] - Euh euh il y a... il... les personnes n'arrivaient pas à le faire et comme nous on avait fini le premier ilot ben on est allé voir sur le deuxième ilot...
81 [**Chercheur**] - Alors vas-y raconte moi ce que tu as fait sur le deuxième !
82 [Faustine] - Et alors euh sur le deuxième ilot on a vu que ben une pièce euh... ben la la grande pièce euh pour faire le tour...
83 [**Chercheur**] - Oui.
84 [Faustine] - Pour faire le tour... eh ben on a...
85 [**Chercheur**] - La réglette.
86 [Faustine] - Oui eh ben on a cru qu'en fait déjà il y avait écrit euh maths... euh je ne sais pas ce qu'il y avait écrit d'autre mais maths euh il y a une autre nom qui était à l'envers du coup je me suis

dit ben c'est peut-être mieux de le mettre à l' endroit du coup on l'a retourné et on l'a mis sur les triangles de couleurs...

87 [**Chercheur**] - Hmm hmm.

88 [Faustine] - Alors que les autres personnes avaient en fait fait euh voulu faire tout le tour. C'est-à-dire qu'il y avait écrit... il y avait jaune euh rouge...

89 [**Chercheur**] - Oui.

90 [Faustine] - Vert, bleu et nous on a fait bleu, vert et si on a on sais pas euh... demandé euh...les autres couleurs en fait.

91 [**Chercheur**] -Ahhhh...

92 [Faustine] - Du coup...

93 [**Chercheur**] - Donc du coup tu as fait quoi alors avec ces couleurs ?

94 [Faustine] - Eh ben là on a mis tout le vert, là tout le bleu et après on a fait coïncider euh... ben les triangles entre-eux, pour que ça fasse euh jaune-jaune, ici bleu-bleu...

95 [**Chercheur**] - Oui.

96 [Faustine] - Et... et on a fait tout le... truc...

97 [**Chercheur**] - Et... et l'autre bout de la...

98 [Faustine] - Et l'autre bout et ben là je crois que ça se finissait par rouge... et là par jaune je crois, je sais plus.

99 [**Chercheur**] - Et tu as réussi à le faire ?

100 [Faustine] - Oui on a réussi à le faire.

101 [**Chercheur**] - Donc tu as réussi à le faire al alors et quelle taille il faisait ?

102 [Faustine] - Euh ben il faisait tout le... je pense c 'est un... un rectangle.

103 [**Chercheur**] - Le rectangle qui est... qui était de la même dimension que la réglette ?

104 [Faustine] - Comme ça. Oui.

105 [**Chercheur**] - C'est ça. Donc tu a réussi à prendre les couleurs de la réglette comme ça...

106 [Faustine] - Voilà.

107 [**Chercheur**] - Jaune et bleu euh vert et bleu...

108 [Faustine] - Oui.

109 [**Chercheur**] - Et après tu as fait une autre couleur...
110 [Faustine] - Voilà.
111 [**Chercheur**] - Rouge et jaune.
112 [Faustine] - Voilà, c'est qu'en fait c'était pas les mêmes couleurs que les personnes avaient faits parce que là il y avait... ben par exemple eux ils avaient mis... euh là il y avait rouge et euh jaune ...
113 [**Chercheur**] - Hmm hmm.
114 [Faustine] - Par exemple les couleurs qui étaient euh ...on va dire... écrites sur l'ilot...
115 [**Chercheur**] - Hmm.
116 [Faustine] - Et avec la réglette ils avaient mis le bleu et le vert ou le vert et le bleu, je ne sais plus trop...
117 [**Chercheur**] - Hmm hmm.
118 [Faustine] - Et du coup ils en trouvaient pas avec les pièces il y avait toujours un endroit ou ça coïncidait pas. Et du coup et ben nous on a réussi à faire mais avec la réglette euh... avec d'autres couleurs.
119 [**Chercheur**] - D'accord... donc tu as fait tes deux couleurs et après euh... c'est toi qui as choisi les couleurs de... des deux autres côtés...
120 [Faustine] - Voilà.
121 [**Chercheur**] - Très bien... bon est-ce-que tu as des remarques à faire sur ce que tu as fait euh... ... ce matin euh... est-ce que ce que tu voudrais dire ... rajouter...?
122 [Faustine] - Euh non...
123 [**Chercheur**] - Eh ben je te remercie beaucoup.
124 [Faustine] - Ben de rien.
125 [**Chercheur**] - Ha ha ha merci bien au revoir.
126 [Faustine] - Au revoir.

4 ENT-EXP-II-4

1 RETRANSCRIPTION Clévos2_4 (Lina et MG 5 min 28 s)
2
3 [**Chercheur**] - A allez-y !

4 [Lina] - Lina euh soixante-et-onze ans.
5 [**Chercheur**] - Alors dites-moi euh... redites-moi parce que vous nous l'avez déjà un peu dit...
6 [Lina] - Oui.
7 [**Chercheur**] - Redites-moi pourquoi vous êtes venue vous ?
8 [Lina] - Alors moi je... en fait je suis une habituée du... du Clévos et... pendant les vacances scolaires j'ai souvent mes petits-enfants, et j'ai trouvé toujours euh... dans ce centre là donc des jeux qui leur sont très adaptés et qu'ils aiment bien et... voilà qui sont ludiques à la fois euh donc voilà j'ai... je reçois les mails en permanence
9 [**Chercheur**] - Hmm.
10 [Lina] - Et j'essaie de ben voilà de m'y... de m' y coller et de trouver des places voilà.
11 [**Chercheur**] - Très bien.
12 [Lina] - Hein.
13 [**Chercheur**] - Très bien...
14 [Lina] - Oui.
15 [**Chercheur**] - Alors dites-moi vous vous êtes euh... vous avez travaillé sur quelle euh activité ?
16 [Lina] - En fait moi j'ai plutôt euh peu travaillé si on peut dire ha ha ils étaient tous affairés autour des... tables et je tentais de leur trouver ben de de petits... euh parce que ils ont très vitre compris la logique donc des jeux
17 [**Chercheur**] - Sur quelle table ?
18 [Lina] - Sur la table où il y avait Faustine... là-bas.
19 [**Chercheur**] - Première avec les bandes
20 [Lina] - C'est ça.
21 [**Chercheur**] - Les bandes noir et blanc... oui.
22 [Lina] - Voilà.
23 [**Chercheur**] - Oui,
24 [Lina] - Voilà ils ont tout de suite compris euh donc la logique de... des couleurs...
25 [**Chercheur**] - Hmm hmm.
26 [Lina] - Voilà des points, des pointes, des... et cetera et donc j'ai...

27 [**Chercheur**] - Ben vous aussi d'ailleurs ?
28 [Lina] - Oui.
29 [**Chercheur**] - Ha ! Ha ! Ha ! ...
30 [Lina] - Oui oui oui euh oui oui oui tout à fait ... et je tentais alors euh trouver... un petit peu donc des parce qu'il y a beaucoup de petits... cartons
31 [**Chercheur**] - De pièces oui oui.
32 [Lina] - Voilà de pièces... voilà et puis après j'ai un peu discuté avec la maman de... euh qui était qui accompagnait l'autre petit donc voilà, mais c'est vrai que c'est un esprit euh qui corres ... bien qui correspond bien aux jeunes hein je veux dire moi à mon âge, maintenant, j'ai un peu plus de mal à...à associer donc de... euh ben les couleurs hein c'est c'est foutu chez moi...
33 [**Chercheur**] - Ouais vous pensiez que vous aviez du mal à associer les couleurs ?
34 [Lina] - Euh du mal euh...
35 [**Chercheur**] - C'est-à-dire... c'est-à-dire ?
36 [Lina] - Je suis moins rapide... voilà.
37 [**Chercheur**] - Ah oui mais bon ça c'est pas...
38 [Lina] - Voilà voilà.
39 [**Chercheur**] - C'est pas un souci ça !
40 [Lina] - C'est ça, mais eux ils ont vite euh...
41 [**Chercheur**] - Mais oui... mais vous avez bien compris qu'il fallait mettre euh...
42 [Lina] - Ah oui oui oui... ah oui oui ouides pointes et des couleurs... les... le... la suite ben logique hein de ben de du dessin que l'on commence et...
43 [**Chercheur**] - Hmm hmm.
44 [Lina] - Voilà.
45 [**Chercheur**] - Et est-ce-que vous y êtes arrivée ?
46 [Lina] - Oui !
47 [**Chercheur**] - Tous les dessins ?
48 [Lina] - Alors euh... bon j'ai commencé hein.
49 [**Chercheur**] - Oui.
50 [Lina] - Puisqu'après quand on commence on continue la logique sur tout le... sur toute la

plaque.
51 [**Chercheur**] - D'accord...
52 [Lina] - Voilà.
53 [**Chercheur**] - Donc vous aviez... vous aviez quand même déjà une stratégie ?
54 [Lina] - Ah oui !
55 [**Chercheur**] - Donc vous avez trouvé quelque chose que vous pouviez répéter ?
56 [Lina] - Tout à fait.
57 [**Chercheur**] - C'est ça.
58 [Lina] - Tout à fait.
59 [**Chercheur**] - D'accord.
60 [Lina] - Voilà.
61 [**Chercheur**] - Et... c'était comment ce que vous pouviez répéter ?
62 [Lina] - Ben en fait... comment... ?
63 [**Chercheur**] - C'était quelle taille quelle couleur quelle taille ?
64 [Lina] - Et ben il y avait le donc les verts, les ... euh les marrons les les pointes euh... qui s' associaient avec donc euh
65 [**Chercheur**] - Oui.
66 [Lina] - Ben avec le haut, donc euh voilà.
67 [**Chercheur**] - Et à chaque fois vous avez trouvé un motif qui se répétait ?
68 [Lina] - Oui.
69 [**Chercheur**] - D'accord.
70 [Lina] - Voilà...
71 [**Chercheur**] - Et à chaque fois ça marchait ?
72 [Lina] - En cherchant oui ça marchait.
73 [**Chercheur**] - D'accord.
74 [Lina] - Voilà euh seulement à la table alors là je ne sais pas... mes enfants je ne sais pas ce qu' ils en ils me disent que c'est normal mais à la fin on n'a pas réussi à terminer euh... la bande il manquait deux euh... il manquait des pièces, deux pièces.
75 [**Chercheur**] - D'accord.
76 [Lina] - Alors je ne sais pas si c'est volontaire ou si c'est euh... je ne sais pas... sur la gauche.

77 [**Chercheur**] - D'accord...
78 [Lina] - Voilà.
79 [**Chercheur**] - Vous pensez que c'est un... il manquait du matériel ?
80 [Lina] - Ben il manquait... est-ce que c'était volontaire peut-être de votre part... que euh ... il manquait deux pièces ou est-ce que elles étaient absentes je je ne sais pas. Là je je reste euh... sans réponse.
81 [**Chercheur**] - D'accord.
82 [Lina] - Voilà.
83 [**Chercheur**] - Et est-ce que vous êtes allée voir un... voir l'autre meuble ?
84 [Lina] - L'autre ? voilà mais j'ai moins participé à l'autre.
85 [**Chercheur**] - Vous avez moins participé ?
86 [Lina] - Voilà parce qu'il y avait plus de ...
87 [**Chercheur**] - Il y avait plus de monde ?
88 [Lina] - Plus de doigts qui grattaient donc.
89 [**Chercheur**] - D'accord...
90 [Lina] - C'est...
91 [**Chercheur**] - Là vous êtes restée un peu en retrait !
92 [Lina] - Voilà.
93 [**Chercheur**] - Ok.
94 [Lina] - Voilà tout-à-fait.
95 [**Chercheur**] - Et est-ce-que ça ressem... ce que vous avez fait là est-ce que ça ressemble euh... je ne sais pas... à l'idée que vous aviez des mathématiques euh...
96 [Lina] - Je... j'associe effectivement que les mathématiques ça ça démarre très tôt..
97 [**Chercheur**] - Hmm hmm.
98 [Lina] - Justement je vois par ces... par ces couleurs par ces formes et cetera... et que ça amène à la logique des... des mathématiques.
99 [**Chercheur**] - D'accord...vous avez reconnu... oui...
100 [Lina] - Je pense que c'est une bonne euh une bonne base.
101 [**Chercheur**] - Et vous vous avez... vous-même...
102 [Lina] - Oui.

103 [**Chercheur**] - Vous avez... eu une... enfin l'idée que vous aviez des mathématiques, est-ce que ça correspondait à ça ou... c'était autre chose ?
104 [Lina] - Ben c'est-à-dire moi mes mes mathématiques à l'époque, c'était pas euh... j'avais pas ça hein Ha ha ha.
105 [**Chercheur**] - Ouais voilà ça... vous aviez...
106 [Lina] - Voilà, donc je trouve que tous ces... nouveaux euh... jeux, entre guillemets, donc sont des bonnes méthodes pour développer euh donc euh au niveau des... des enfants, je veux dire et je... on le voit très très bien que très tôt, avec ces jeux ludiques, et donc ils arrivent beaucoup à... à évoluer.
107 [**Chercheur**] - Hmm hmm.
108 [Lina] - Voilà.
109 [**Chercheur**] - Et bien écoutez je vous remercie beaucoup... merci beaucoup de...
110 [Lina] - Merci à vous ha ha ha.
111 [**Chercheur**] - D'avoir participé à la recherche ha ha ha ha.
112 [Lina] - Et... vous pouvez me dire un peu plus ?
113 [**Chercheur**] - On va, on va vous en parlez là-bas...
114 [Lina] - Ah Voilà...
115 [**Chercheur**] - On va vous en parler à tous..
116 [Lina] - Ouais c'est ça.
117 [**Chercheur**] - Merci.
118 [Lina] - C'est intéressant de savoir, merci hein.

5 ENT-EXP-II-5

1 RETRANSCRIPTION Clévos2_5 (Anne et MG 8 min 41 s)
2
3 [**Chercheur**] - Allez-y !
4 [Anne] - Je suis Anne et j'ai cinquante deux ans.
5 [**Chercheur**] - Voilà alors maintenant euh pouvez-vous me redire euh... pourquoi vous êtes venue euh aux Clévos ce matin ?
6 [Anne] - Euh parce que mon garçon aime beaucoup les maths et que je trouvais que cette activité

pouvait être amusante euh il a un rapport assez ludique aux maths...

7 [**Chercheur**] - Hmm hmm.

8 [Anne] - Voilà, et puis l'accompagner parce que, parce qu'en général ça finit un peu en en petit défi ou en en... oui c'est assez ludique quoi voilà et j'aime bien aussi. Je décroche plus vite que lui, beaucoup plus vite que lui mais j'aime bien le voir faire en tout cas.

9 [**Chercheur**] - Donc euh vous vous pensez que vous avez fait des mathématiques ce matin ?

10 [Anne] - Euh... en en tout cas on a choisi ça parce que ça s'appelait défi maths.

11 [**Chercheur**] - Oui.

12 [Anne] - Voilà ça c'est net, je vois bien que l' activité elle est pas euh câblée euh... enfin c'est pas des... on n'a pas résolu des équations euh...

13 [**Chercheur**] - Au revoir Madame

14 [Anne] - Au sens euh académique du terme hein...

15 [**Chercheur**] - Voilà.

16 [Anne] - Ça je... ça j'ai bien vu...

17 [**Chercheur**] - Parce que vous parlez mathématiques " équations" ha ! Ha ! Ha !

18 [Anne] - Dans mon esprit, oui...

19 [**Chercheur**] - Ha! Ha ! Ha ! Oui...

20 [Anne] - C'est là que je décroche en général.

21 [**Chercheur**] - Mais alors justement, les mathématiques c'est surtout pas que les équations hein c'est autre chose bien évidement. Bon, alors du coup est-ce que vous pouvez me di... décrire ce que vous avez fait , vous, tout à l'heure ? D'abord sur quel ilot vous étiez... et qu'est-ce que vous avez euh... obtenu ?

22 [Anne] - Alors euh on était sur l'ilot de droite euh...

23 [**Chercheur**] - De droite en entrant ?

24 [Anne] - Oui.

25 [**Chercheur**] - Oui d'accord.

26 [Anne] - Euh voilà... alors après je voulais pas

trop interférer mais je me fais aspirer par le côté ludique justement et donc euh je me suis intégrée au groupe...

27 [Chercheur] - Oui bien sûr.

28 [Anne] - Euh... voilà, et en fait euh on a quand même essayé avec l'autre euh... voilà l'autre c'est une mamie, je suis la maman, euh on a essayé de cel... de rester un petit peu en retrait de laisser les trois se constituer en groupe et les regarder plus que les aider.

29 [Chercheur] - D'accord...

30 [Anne] - Voilà...

31 [Chercheur] - Ah oui...

32 [Anne] - Ils ont...

33 [Chercheur] - Vous ave...

34 [Anne] - Nous, voilà, nous, on est resté en retrait pour les regarder se coordonner et en fait ça a été très fluide en eux très vite et comme ils étaient bien partis, nous on a pris une petite activité puis on s'est mise à la table toutes les deux.

35 [Chercheur] - Alors qu'est-ce que c'est que cette petite activité ?

36 [Anne] - Celle euh celle où il y avait qu'une ligne.

37 [Chercheur] - Une ligne d'accord,

38 [Anne] - Voilà...

39 [Chercheur] - Et les couleurs c'était quoi ?

40 [Anne] - Euh...

41 [Chercheur] - Les couleurs des bords ?

42 [Anne] - Euh je ne vois... euh je ne sais plus ... euh je sais plus... y a peut-être euh... je crois qu'il y avait noir avec un... point peut-être ?

43 [Chercheur] - Ouais.

44 [Anne] - En haut et en bas je ne me rappelle pas s'il y avait quelque chose.

45 [Chercheur] - Bon et alors sur cette ligne là avec le noir en haut vous avez... vous avez fait quoi en fait ? Qu'est-ce que vous av...

46 [Anne] - On a cherché à retrouver... enfin on avait compris que sur les trois activités de cet ilot là euh on avait une consigne de positionnement et qu'en fait il fallait la répliquer...
47 **[Chercheur]** - Hmm hmm.
48 [Anne] - A partir de ces... pavés qui nous étaient proposés...
49 **[Chercheur]** - Oui.
50 [Anne] - Voilà donc on a re... on a repéré que certains carrés avaient un triangle noir donc faut le mettre en place, et puis à partir de là on a décliner euh sur la couleur de droite on a mis euh quelque chose qui venait euh de manière euh... euh comment dire euh... euh... en miroir.
51 **[Chercheur]** - Hmm hmm.
52 [Anne] - Voilà et puis... euh une fois qu'on a compris que ça ça marchait on a donc décliné jusqu' au bout et ça fonctionnait donc voilà.
53 **[Chercheur]** - Et alors qu'est-ce que c'est qui fonctionne ? Est-ce que vous pourriez résumer finalement...
54 [Anne] - Ben c'était une suite.
55 **[Chercheur]** - Quel est le résultat que vous avez obtenu ?
56 [Anne] - C'était une suite.
57 **[Chercheur]** - Une suite...
58 [Anne] - Une suite de couleurs... sans qu'il y ait... une suite de couleurs.
59 **[Chercheur]** - Une suite de couleurs qui se...
60 [Anne] - Et de formes et qui sont et qui se...
61 **[Chercheur]** - Qui s'agençait bien ?
62 [Anne] - Oui.
63 **[Chercheur]** - Eeeeet ça s'arrête quelque part ou pas ?
64 [Anne] - Non qui pourrait continuer infiniment.
65 **[Chercheur]** - D'accord.
66 [Anne] - Donc y avait... y avait pas de raison là que ça s'arrête.
67 **[Chercheur]** - D'accord...ok.
68 [Anne] - Sauf le nombre de pièces où les emplacements.

69 [**Chercheur**] - Oui...
70 [Anne] - Voilà.
71 [**Chercheur**] - Oui d'accord et donc vous avez obtenu un résultat ?
72 [Anne] - Oui.
73 [**Chercheur**] - Un résultat que vous arriviez à paver cette ligne infinie ?
74 [Anne] - Oui.
75 [**Chercheur**] - Ben voilà... c'est... c'est quand même un résultat hahaha. Et est-ce que vous êtes allée voir le meuble où... le meuble d'à côté ?
76 [Anne] - Oui.
77 [**Chercheur**] - Non ? Anne vous avez déjà fait le meuble d'à côté ?
78 [Anne] - Oui oui oui on l'a fait aussi alors pareil on l'a...
79 [**Chercheur**] - Alors ?
80 [Anne] - On les... en fait euh bon c'est vrai on suivait un peu les enfants... puisqu'on voulait quand même leur laisser la place...
81 [**Chercheur**] - Hmm.
82 [Anne] - Euh de faire leur expérience... euh et très... dans ce groupe très vite y a... y a un des jeunes qui a dit « Oh mais lala le cadre il est pris à l'envers c'est pas logique, faut qu'on le remette à l'endroit ».
83 [**Chercheur**] - Oui.
84 [Anne] - Donc au lieu de se contraindre avec quatre mot... pas des motifs comment des quatre euh ... côtés du rectangle...
85 [**Chercheur**] - Oui...
86 [Anne] - Finalement la contrainte elle était plus que sur deux motifs.
87 [**Chercheur**] - D'accord.
88 [Anne] - Que sur deux côtés pardon.
89 [**Chercheur**] - Oui.
90 [Anne] - Euh... et à partir du moment où ce... il a été posé dans ce sens là eh bien euh... le le la déclinaison de la suite a été possible, ils ont cherché ensemble...

91 [**Chercheur**] - Oui.
92 [Anne] - Euh moi j'ai participé au fait de chercher, trouver le motif qui manque par couleur pour venir l'insérer au bon endroit.
93 [**Chercheur**] - Et est-ce que... et ça s'est fait... fini comment ? Vers les deux autres côtés donc, d'un côté c'était vert et de l'autre côté c'était bleu ...
94 [Anne] - Alors j'ai pas [...]

95 [**Chercheur**] - Alors de l'autre côté, non mais est-ce que vous êtes arrivée à une même couleur ou pas ?
96 [Anne] - Oui oui oui bien sûr oh oui on avait compris que c'était ça la la... était la règle...
97 [**Chercheur**] - D'accord.
98 [Anne] - Ça devait forcement être une couleur unique par côté.
99 [**Chercheur**] - Voilà.
100 [Anne] - Mais pas forcément celle du côté opposé ...
101 [**Chercheur**] - Pas forcément ou c'était absolument pas la même ?
102 [Anne] - Euh alors y avait pas de consigne en bas du coup...
103 [**Chercheur**] - Hmm hmm.
104 [Anne] - Puisque le... cadre qui était mobile on l'a placé en bout...
105 [**Chercheur**] - Oui.
106 [Anne] - Donc y avait pas de consigne en bas on a ... on a abouti sur une couleur... donnée et qui était la même partout.
107 [**Chercheur**] - La même partout sur le...
108 [Anne] - Sur tout... sur tout ce...
109 [**Chercheur**] - Voilà.
110 [Anne] - Sur tout ce... cette bande là...
111 [**Chercheur**] - Et vous ne vous souvenais plus si elle était la même... et si elle était bien différente là et là, là et là ?
112 [Anne] - Euh... je pense mais je n'en suis pas certaine... j'ai pas fait attention.

113 [**Chercheur**] - D'accord.
114 [Anne] - Moi ce qui me... ce que j'avais en tête c'était le fait que ça devait être la même couleur tout du long...
115 [**Chercheur**] - D'accord, donc on peut dire que vous avez réussi à faire un... un pavage... avec le bleu et le vert de la réglette...
116 [Anne] - Oui.
117 [**Chercheur**] - Et des deux autres côtés c'était monochrome...
118 [Anne] - Oui.
119 [**Chercheur**] - Mais vous savez plus quelle couleur.
120 [Anne] - Voilà.
121 [**Chercheur**] - D'accord. Très bien, eh ben c'est... c'est quand même déjà pas mal ça ! Et est-ce que vous avez alors des... questions sur euh... le matériel, sur ce que vous avez fait, d'ordre plus général ?
122 [Anne] - Alors on a... nous, après avec nos garçons, on s'est mis à les trier...
123 [**Chercheur**] - Oui.
124 [Anne] - On lui a... voilà
125 [**Chercheur**] - Tri
126 [Anne] - Et on a observé que y avait moins de caisses que de motifs...
127 [**Chercheur**] - Oui.
128 [Anne] - Pour le pour le tas euh... pour pour les lots qui est à gauche hein...
129 [**Chercheur**] - Oui.
130 [Anne] - Voilà mais pas qu'on s'en sert...
131 [**Chercheur**] - Alors qu'est-ce que vous appelez un motif ?
132 [Anne] - Un agencement de couleurs sur le carré, sur le pavé...
133 [**Chercheur**] - Juste juste une petite tuile, un motif ?
134 [Anne] - Oui sur une tuile.
135 [**Chercheur**] - Oui.
136 [Anne] - On pensait que, nous on est arrivé après sur cet ilot...
137 [**Chercheur**] - Oui.
138 [Anne] - Et on euh... on s'est dit que, il devait

y avoir au départ, un type de motif de tuiles par boi... par boite...

139 [**Chercheur**] - Hmm.

140 [Anne] - On s'est dit ça bon voilà...

141 [**Chercheur**] - Ouais d'accord.

142 [Anne] - Pourquoi on s'est dit ça j'en sais rien, mais on s'est dit ça. Donc euh comme là c'était tout en vrac on se d... pour attendre aussi un peu, lorsqu'on a était sur cet ilot...

143 [**Chercheur**] - Ah toutes les pièces étaient mélangées là-bas ?

144 [Anne] - Voilà.

145 [**Chercheur**] - Ah la la...

146 [Anne] - Et donc on les a toutes triées...

147 [**Chercheur**] - Ah super hahaha.

148 [Anne] - Ha ha ha ha et c'était amusant parce que ... ben du coup nous on a commencé à le faire et puis les deux autres étaient aussi en train de... faire leurs interviews et nous ont rejoints puis se sont mis à trier avec nous aussi...

149 [**Chercheur**] - Ha ha ha ha

150 [Anne] - Et on s'est rendu compte qu'il y avait plus de motifs... de tuiles que de boites..

151 [**Chercheur**] - Oui

152 [Anne] - Donc en fait, y avait pas un motif par boite ?

153 [**Chercheur**] - NNNNNon... peut-être pas ?

154 [Anne] - Ben c'est sûr parce qu'il y a plus de motifs quoi... voilà c'était euh... voilà et puis sinon ce que j'ai trouvé sympa c'est le côté euh... puis là c'est les trois jeunes là ils se sont trouvés euh... ben le frère et la soeur ils se connaissent, ils ont l'habitude de faire ensemble mais... mon garçon est rentré dans ce groupe... voilà et qu'ils ont tout fait ensemble vraiment fait ensemble.

155 [**Chercheur**] - D'accord, et discuter euh...

156 [Anne] - Oui oui et puis c'était... enfin après euh la petite fille elle va super vite hein elle euh ...

157 [Chercheur] - Hmm hmm.
158 [Anne] - Elle euh va très très vite des fois. Mais ils se parlaient... pas beaucoup pour ce ils se comprenaient...
159 [Chercheur] - D'accord.
160 [Anne] - Pour être efficaces.
161 [Chercheur] - D'accord.
162 [Anne] - Et je trouve que c'était intéressant dans le cas qui concerne mon garçon, ça c'est vraiment plus personnel comme réflexion mais euh... lui il avait beaucoup de mal avec les travaux de groupe en général...
163 [Chercheur] - Oui.
164 [Anne] - Mais en fait euh c'est c'est souvent parce qu'il est pas câblé de la même manière...
165 [Chercheur] - Ah oui...
166 [Anne] - Et en fait il arrivait pas à trouver des modes de communication... comme ce matin, alors ce matin c'était mais... c'était son...très fluide...
167 [Chercheur] - D'accord... ah oui.
168 [Anne] - Voilà...
169 [Chercheur] - Ah oui ils avaient l'air d'être sur la même longueur d'onde.
170 [Anne] - Oui.
171 [Chercheur] - D'accord.
172 [Anne] - C'était... c'était... ça pour moi c'est instructif.
173 [Chercheur] - Ha ha ha ha bon ben je vous remercie beaucoup...
174 [Anne] - Merci à vous pour vos efforts pour nous avoir proposé ça.
175 [Chercheur] - Merci pour la recherche.
176 [Anne] - Merci.

6 ENT-EXP-II-6

1 RETRANSCRIPTION Clévos2_6 (Thomas et MD 7 min 02 s)
2
3 [Chercheur] - Alors, tout d'abord bonjour, est-ce que tu pourrais me dire ton prénom s'il te plait ?

4 [Thomas] - Donc je m'appelle Thomas [...] j'ai... je vais avoir quinze ans.

5 [**Chercheur**] - Tu vas avoir quinze ans donc tu es au lycée ?
6 [Thomas] - Voilà je vais rentrer au lycée l'année prochaine.
7 [**Chercheur**] - Super d'accord, alors j'aimerais savoir la première question c'est de me redire euh euh finalement pourquoi tu t'es inscrit ici, qu'est-ce ... pourquoi tu as eu l'envie ...
8 [**Chercheur**] [à une tierce personne] faut pas écouter euh les questions... faut pas écouter euh ...
9 [réponse de la tierce personne] Non non ! ... j' attends.
10 [**Chercheur**] [à une tierce personne] Oui... oui.

11 [Thomas] - Pourquoi je me suis inscrit ici ?
12 [**Chercheur**] - Oui.
13 [Thomas] - Ben en fait euh on a rac... on est souvent en vacances à Malissard et comme j'aime bien les maths et que ma grand-mère a vu qu'il y avait euh une exposition un peu... une activité à à faire en, avec les maths, elle nous a inscrits...
14 [**Chercheur**] - D'accord,
15 [Thomas] - Et du coup ben c'était aujour... c'est tombé aujourd'hui.
16 [**Chercheur**] - Ok super, et est-ce que tu penses du coup euh... avoir fait ce pour lequel tu étais venu euh ici ?
17 [Thomas] - Euh ben oui au fait, hier j'avais un peu regardé le descriptif euh de l'activité et donc, ça parle... enfin ça parlait de des dominos de Wang ...
18 [**Chercheur**] - Oui.
19 [Thomas] - Et donc du coup j'avais vu les différents types d'activité qui pouvaient y avoir et donc je pense qu'on a fait ce qu'il fallait faire en remplissant correctement.
20 [**Chercheur**] - D'accord alors du coup qu'est-ce que tu

as fait concrètement ?

21 [Thomas] - Ben sur le, sur le premier avec les dominos avec un petit point...

22 [**Chercheur**] - Oui alors il y a , il y en avait deux sortes.

23 [Thomas] - Non il y avait ceux avec... il y avait ceux avec un tout petit point noir qu'on devait placer...

24 [**Chercheur**] - Oui.

25 [Thomas] - ... dans un bons sens, donc eux on a essayé de reproduire on... enfin, on voyait souvent qu'il y avait des bandes de couleurs différentes qui se répétaient, du coup on essayait de les placer pour euh faire ces bandes et au final on y est arrivé à bien le remplir...

26 [**Chercheur**] - D'accord.

27 [Thomas] - Alors en fait au début on est parti avec deux couleurs, mais ces deux couleurs elles fonctionnaient pas du coup on a repris un nouveau motif.

28 [**Chercheur**] - D'accord, donc toi tu as travaillé pas sur la petite bande ni sur la bande euh de taille deux, tu as travaillé sur le grand...

29 [Thomas] - Voilà, on a travaillé un peu sur la diagonale. On voyait qu'il y avait des bandes de mêmes couleurs qui se répétaient...

30 [**Chercheur**] - D'accord.

31 [Thomas] - Du coup on a essayé de refaire ces bandes.

32 [**Chercheur**] - D'accord, donc vous avez travaillé sur la diagonale et est-ce que tu as réussi à... à... trouver un motif qui se répétait ?

33 [Thomas] - Oui, oui oui alors j'ai pas retenu mais ça ferait par exemple bande bleue-bande verte-bande jaune-bande rouge et après ça se répète à de plus en plus petit.

34 [**Chercheur**] - Bande bleue- bande verte ok d'accord euh ... donc super et euh du coup est-ce que tu penses ... parce que on avait euh on a délimité une région ...

35 [Thomas] - Oui.
36 [**Chercheur**] - Parce que la table est...
37 [Thomas] - Ouais.
38 [**Chercheur**] - On voit bien qu'elle est euh...
39 [Thomas] - Ouais ouais.
40 [**Chercheur**] - C'est une région finie, est-ce que tu penses que si on veut paver intégralement le plan...
41 [Thomas] - Hmm.
42 [**Chercheur**] - C'est-à-dire que ce soit pas borné par une table hein...
43 [Thomas] - Ouais.
44 [**Chercheur**] - Est-ce que tu penses qu'on peut le faire avec ça ?
45 [Thomas] - Oui avec celui-là je pense que ça doit être... c'est possible, par exemple avec d'autres ça serait impossible parce qu'au bout d'un moment les couleurs euh... elles changent.
46 [**Chercheur**] - Alors, par exemple avec celui-là, pour ... pourquoi c'est possible... est-ce que tu peux me donner un argument pourquoi on pourrait répéter ce... enfin pourquoi on pourrait le faire ?
47 [Thomas] - Ben parce que les pièces en fait, elles ont tout... enfin elles ont toutes le même motif avec les mêmes couleurs, donc si on arrive à assembler euh une première couleur avec les autres, celles qu'on va prendre ensuite elles vont pouvoir euh... elles vont pouvoir se remettre en faisant le même motif et pour recommencer euh de nouveau encore ...
48 [**Chercheur**]- C'est à dire tu veux construire un mot... tu veux construire ton motif...
49 [Thomas] - Voilà, un motif qui utilise...
50 [**Chercheur**] - De base.
51 [Thomas] - Un motif de base...
52 [**Chercheur**] - Que tu euh...
53 [Thomas] - Voilà, et celui-là on le reporterait euh ... dans les
54 [**Chercheur**] - D'accord, ok donc tu pourrais euh... tu pourrais arriver à recouvrir le plan avec ce motif ?

55 [Thomas] - Ouais je pense.
56 [**Chercheur**] - D'accord, et euh... est-ce que tu penses que euh... euh si on avait donné euh... par exemple, est-ce que tu as regardé... tu m'as dit que tu as regardé les diagonales... ?
57 [Thomas] - Ouais.
58 [**Chercheur**] - Mais est-ce que tu as regardé les lignes aussi ?
59 [Thomas] - Ah non par contre ça on n'a pas...
60 [**Chercheur**] - Non, tu n'as pas regardé sur les lignes ?
61 [Thomas] - Non.
62 [**Chercheur**] - D'accord, tu penses que... est-ce que tu ... tu aurais une idée, à ton avis, avec ce qu'on vous a donné, est-ce que euh... si je ... te pose la question, si on arrive à faire une bande.
63 [Thomas] - Hmm hmm.
64 [**Chercheur**] - Juste une bande... horizontale...
65 [Thomas] - Ouais.
66 [**Chercheur**] - Avec ces tuiles, est-ce que tu penses que ça... enfin une bande, je ne sais pas comment vous pouvez... tu peux la faire la bande hein ?
67 [Thomas] - Ouais.
68 [**Chercheur**] - Mais est-ce que tu penses qu'on peut euh trouver une solution... à ce problème ?
69 [Thomas] - Je pense que non, ça ne peut pas se jouer sur une bande, parce que en fait les dominos, sur la deuxième bande, ils sont placés différemment des premiers...
70 [**Chercheur**] - Alors ils sont placé comment ?
71 [Thomas] - Ben en fait non c'est les couleurs qui sont... qui sont a... euh agencées différemment.
72 [**Chercheur**] - Alors c'est à dire, est-ce que tu peux essayer de me dire à peu près euh, avec tes mots hein...
73 [Thomas] - Oui oui.
74 [**Chercheur**] - Euh comment on les agence ces couleurs, comment elles sont agencées ?
75 [Thomas] - Ben pfff...
76 [**Chercheur**] - Par exemple, si je te donne une exemple,

j'ai euh du bleu du rouge le premier domino...

77 [Thomas] - Oui.

78 [Chercheur] - Et le deuxième c'est du rouge et du vert ...

79 [Thomas] - Ouais.

80 [Chercheur] - Du coup en dessous qu'est-ce qu'on aura ?... du bleu et du rouge au début...

81 [Thomas] - Ouais.

82 [Chercheur] - Et après du rouge et du vert, qu'est-ce que j'aurai euh juste en dessous du rouge et du vert ?

83 [Thomas] - Ben il y aura... le vert qui devra coïncider du coup...

84 [Chercheur] - Ouais.

85 [Thomas] - Avec la quatrième couleur c'est le jaune .

86 [Chercheur] - Donc tu dis qu'en fait quand tu regardes en diagonale finalement il y a... il se passe quoi entre chaque ligne ?

87 [Thomas] - Ben entre chaque li... il y a une certaine forme de d'har d'harmonie c'est à dire que les cou... les les dominos qui ont un triangle de même couleur...

88 [Chercheur] - Oui.

89 [Thomas] - Ils se mettent euh ben ils se mettent...

90 [Chercheur] - En diag...

91 [Thomas] - Pour former une diagonale.

92 [Chercheur] - Parfait ok, ben alors du coup...

93 [Thomas] - Ouais.

94 [Chercheur] - Si tu arrives à former... une bande qui se répète...

95 [Thomas] - Hmm.

96 [Chercheur] - Est-ce que tu penses que finalement on peut euh...

97 [Thomas] - Ah oui alors, oui on peut essayer de la répéter euh en dessous et on on...

98 [Chercheur] - Alors en dessous il faut jus... il faut faire quoi du coup si on veut la répéter en dessous ?

99 [Thomas] - Ben la répéter en dessous mais peut-être

en la décalant.

100 [**Chercheur**] - Ouais c'est ça et après tu refais... qu' est-ce que tu fais ?

101 [Thomas] - Ben en décalant encore encore encore...

102 [**Chercheur**] - Voilà et donc du coup à la fin t'arrives à...

103 [Thomas] - A la fin on peut oui ... d'accord.

104 [**Chercheur**] - Ok ben super c'est très bien... euh ensuite ben du coup la la dernière question c'était de savoir euh... euh... finalement euh... est-ce que tu pourrais me me formuler, me mettre euh une question sur ce que tu euh sur l'activité que tu as fait... si tu devais poser une question à quelqu'un ...

105 [Thomas] - Hmm.

106 [**Chercheur**] - C'est à dire qu'il n'y a pas de question dans l'activité, on te pose le problème, le problème euh avec le matériel et on te demande euh de formuler une question ?

107 [Thomas] - Ben...

108 [**Chercheur**] - Qu'est-ce que tu as fait ?

109 [Thomas] - A quoi ça sert de de faire un pavage comme ça... qu'est-ce qui différencie ce pavage des autres ?

110 [**Chercheur**] - Pour toi ça serait ça ce que tu as fait ?

111 [Thomas] - Ouais.

112 [**Chercheur**] - D'accord... et euh ben sinon la dernière question c'était, est-ce que tu as des questions ou des remarque ?

113 [Thomas] - Hmm non.

114 [**Chercheur**] - Non ? ben je te rem...

115 [Thomas] - Mais si alors si...

116 [**Chercheur**] - Oui ?

117 [Thomas] - Pourquoi en fait avec deux couleurs, le violet et le orange...

118 [**Chercheur**] - Oui.

119 [Thomas] - Le pavage il ne fonctionnait pas ?

120 [**Chercheur**] - Ah ben alors je te laisse réfléchir à cette question.

121 [Thomas] - Ok
122 [Chercheur] - Alors, tu as regardé toutes tes tuiles ?
123 [Thomas] - Oui.
124 [Chercheur] - Alors pourquoi le violet est... c'est à dire que tu pouvais pas la mettre ?
125 [Thomas] - Oui en fait quand on essayait de commencer avec le violet, au bout d'un moment on arrivait on n'avait plus de pièce violette, et les autres pièces quand... enfin le le triangle qui devait coïncider avec le le bout violet fonctionnait pas du coup on était obligé de s'arrêter, on pouvait pas terminer le pavage.
126 [Chercheur] - D'accord, donc est-ce que du coup elle t'a servi cette pièce ?
127 [Thomas] - Non du coup on a... nous l'avons mise de côté et on a travaillé avec les autres.
128 [Chercheur] - Très bien.
129 [Thomas] - Donc...
130 [Chercheur] - C'est ça donc elle a était inutile c'est ce que tu m'as dit.
131 [Thomas] - D'accord.
132 [Chercheur] - Super.
133 [Thomas] - Au revoir.
134 [Chercheur] - Au revoir merci encore.

7 ENT-EXP-II-7

1 RETRANSCRIPTION Clévos2_7 (Louis et MD 5 min 59 s)
2
3 [Chercheur] - Alors, tout d'abord euh bonjour, j'aimerai savoir ton prénom s'il te plait ?
4 [Louis] - Louis.
5 [Chercheur] - Louis, tu as quel âge Louis ?
6 [Louis] - J'ai quatorze ans.
7 [Chercheur] - D'accord, très bien. Alors j'aurais voulu savoir euh... si tu pouvais me redire pourquoi finalement tu as voulu venir à cet atelier ? Ton point de vue personnel ?
8 [Louis] - Ben... du point de vue personnel, j'aime beaucoup les maths depuis que je suis assez euh...

depuis que je suis en CP quoi.
9 [Chercheur] - D'accord.
10 [Louis] - Et puis... depuis qu'on a vu une conférence aux Clévos sur les maths, et j'aime beaucoup réfléchir et les petits problèmes que je me pose les trucs comme ça, et du coup quand ma mère elle a vu qu'il y avait un défi en rapport avec les maths...
11 [Chercheur] - D'accord...
12 [Louis] - Ben elle m'a appelé et elle m'a inscrit quoi.
13 [Chercheur] D'accord super, c'est ta mamie ou ta maman qui t'a inscrit ?
14 [Louis] - Maman.
15 [Chercheur] Ta maman, d'accord. Est-ce-que du coup tu penses avoir fait euh ce pour lequel tu étais venu ici aujourd'hui ?
16 [Louis] - Ben... à peu près ouais.
17 [Chercheur] - Alors c'est-à-dire ? qu'est-ce que tu as fait en fait ?
18 [Louis] - Ben je trouvais ça... je trouvais ça sympa de réfléchir un peu... je m'attendais pas vraiment à faire... avec les choses qui aient pas la même couleur...
19 [Chercheur] - Oui...
20 [Louis] - Mais euh... ça reste sympa, ça fait euh ... comment dire [...]
21 [Chercheur] - Est-ce que tu penses que tu as fait des maths ?
22 [Louis] - Ben... de la géométrie pour moi... ben ... voilà.
23 [Chercheur] - De la géométrie, d'accord.
24 [Louis] - Parce-que ça a...c'est des formes, des couleurs, c'est pour ça et...
25 [Chercheur] - D'accord et est-ce que tu pourrais me dire euh finalement sur quel problème tu as réfléchi ? quelle est l'activité en question sur laquelle tu as... tu as réfléchi ? si tu devais me décrire en quelques phrases ? ou quelques mots ?
26 [Louis] - Ce que... vu qu'on devait remplir des

grilles, ce qu'on a fait c'est qu'on réfléchissait à quel symbole on pouvait répéter à chaque fois parce -que...

27 [**Chercheur**] - Alors tu as travaillé... est-ce que tu peux me décrire un peu plus ces grilles ?

28 [Louis] - C'est des grilles avec euh... des euh... les grilles avec vers l'extrémité des triangles de couleurs...

29 [**Chercheur**] - D'accord.

30 [Louis] - Donc il y en a... on les travaille avec deux manières. Soit on met... soit...

31 [**Chercheur**] - Alors et donc du coup tu as travaillé... donc je vois bien l'activité donc sur les rectangles avec les triangles...

32 [Louis] - Ouais...

33 [**Chercheur**] - Sur les bords...

34 [Louis] - Ouais.

35 [**Chercheur**]- Avec des couleurs...

36 [Louis] - Ouais...

37 [**Chercheur**] - D'accord. Comment il fallait agencer ces tuiles ?

38 [Louis] - Eh ben de manière à que chaque tuile donc d'un triangle ...

39 [**Chercheur**] - Oui...

40 [Louis] - Pour euh chaque triangle... couleur ...

41 [**Chercheur**] - Oui.

42 [Louis] - Triangle de couleur de la tuile...

43 [**Chercheur**] - Oui...

44 [Louis] - Soit en contact avec un autre triangle de la même couleur.

45 [**Chercheur**] - D'accord, super. Donc ça c'est euh effectivement les règles du jeu. Et du coup est-ce que tu as vu que sur la table il y avait une réglette ?

46 [Louis] - Ouais...

47 [**Chercheur**] - En forme d'équerre euh... qu'est-ce que tu as fait avec cette réglette ?

48 [Louis] - Eh ben euh...il y a... moi perso, avec le groupe avec lequel j'étais, on l'a hmm, euh on l' a pas utilisée en fait parce que on avait l'

impression que si on la mettait euh ... à l'autre extrémité...pour faire euh... mettre des couleurs sur les [

49 [Chercheur] - Un truc ?
50 [Louis] - Quasiment insoluble... du coup on les a pas mis.
51 [Chercheur] - Alors pourquoi insoluble ?
52 [Louis] - Ben parce que tous les autres [

53 [Chercheur] - Alors du coup est-ce que... alors mais du coup euh ... vous a... donc tu as... là ta réglette tu ne t'en es pas servi ?
54 [Louis] - En fait on l'a superposée sur euh les euh triangles de couleurs déjà existants.
55 [Chercheur] - D'accord, mais alors est-ce que tu as fait attention que sur les trois rectangles qui étaient dessinés sur la table, c'était des couleurs différentes ?
56 [Louis] - Oui.
57 [Chercheur] - Donc du coup quand tu me dis que c'était insoluble pour les deux autres...
58 [Louis] - Ah peut-être pas pour moi...
59 [Chercheur] - Et oui...
60 [Louis] - Oui...
61 [Chercheur] - Peut-être pas pour toi, finalement. Et euh ensuite cette réglette qui était positionnée sur la table, à ton avis, elle te servait à quoi ? Est-ce que tu penses qu'on aurait dessiné une réglette juste pour positionner sur les triangles déjà existants ?
62 [Louis] - Non je ne pense pas mais euh...
63 [Chercheur] - Elle sert à quoi cette réglette ?
64 [Louis] - Ben, je pense qu'elle sert à... à mettre des couleurs sur les autres extrémités...
65 [Chercheur] - Oui ...

66 [Louis] - Mais après...

67 [**Chercheur**] - Mais alors tu penses que si on avait choisi de mettre cette réglette sur l'extrémité du grand rectangle on l'aurait déjà dessinée sur la table ? là la réglette...

68 [Louis] - Ah oui elle peut... ah oui elle peut faire par exemple des euh des petits carrés ou des euh...

69 [**Chercheur**] - Et voilà...

70 [Louis] - Ah oui...

71 [**Chercheur**] - Donc elle sert à ça la réglette, elle sert à effectivement déplacer la réglette pour travailler soit sur le grand rectangle soit sur des carrés plus petits, des carrés deux fois deux, des rectangles trois fois six, trois fois deux, deux fois cinq par exemple etc... et donc là avec ça on peut jouer effectivement, on peut déplacer et construire des rectangles de différents tailles.

72 [Louis] - D'accord.

73 [**Chercheur**] - D'accord, et euh sinon... et donc...et quand... donc tu n'as pas conditionné la réglette, la réglette tu l'as mise donc sur les couleurs déjà existantes...

74 [Louis] - Ouais, et vu que c'était euh les... vu qu'on avait euh la réglette... et bleu et vert et qu 'on avait le carré bleu et vert ben ça servait à rien de... ça servait, ça servait à rien de...

75 [**Chercheur**] - Elle servait à rien de... de la mettre dessus... d'accord, et du coup vous a... tu as donc euh essayé de recouvrir le rectangle...

76 [Louis] - Et euh...

77 [**Chercheur**] - Et donc les bords du bas, du coup ils étaient quelle couleur ?

78 [Louis] - Eh ben ils étaient... de la finalité un ou deux couleurs je ne me rappelle plus...

79 [**Chercheur**] - Ah vous avez choisi euh...

80 [Louis] - Vu que c'était un motif euh en ... en avec quatre, et ben du coup ça faisait une alternance de couleurs.

81 [**Chercheur**] - Et vous... donc vous avez pris un motif

et vous l'avez répété ce motif.
82 [Louis] - C'est ça.
83 [**Chercheur**] - Pour construire le rectangle euh...
84 [Louis] - Vu qu'il y a quatre lignes, on a eu deux motifs différents de...
85 [**Chercheur**] - Deux motifs différents qui coïncidaient avec les couleurs du haut mais par contre celles du bas...
86 [Louis] - Celles du bas non...
87 [**Chercheur**] - Ouais d'accord.
88 [Louis] - Le bas vu qu'il n'y en avait pas, elles étaient
89 [**Chercheur**] - Ok... Alors, très bien je te remercie euh... alors le but euh du problème c'est de recouvrir le rectangle mais avec des couleurs monochromes c'est-à-dire unies...
90 [Louis] - Sur les quatre extrémités ?
91 [**Chercheur**] - C'est-à-dire qu'il y ait qu'une couleur ... comment ?
92 [Louis] - Sur les quatre extrémités.
93 [**Chercheur**] - Sur les quatre extrémités c'est ça.
94 [Louis] - Ah ok.
95 [**Chercheur**] - Voilà. Bon ben... est-ce que tu as des questions ou des remarques ?
96 [Louis] - Non pas spécialement.
97 [**Chercheur**] - Non... bon ben je te laisse s'il y en a un autre tu sais euh... voilà je te laisse euh continuer, merci.

8 ENT-EXP-II-8

1 RETRANSCRIPTION Clévos2_8 (Claudine et MD 1 min 44 s)
2
3 [**Chercheur**] - Alors rappelez moi juste votre nom ?
4 [Claudine] - Claudine quarante cinq ans.
5 [**Chercheur**] - Merci bien. Donc vous êtes retournée après l'interview sur l'activité...
6 [Claudine] - Oui.
7 [**Chercheur**] - ... en question des rectangles...
8 [Claudine] - Oui.

9 [**Chercheur**] - ... avec la réglette, alors du coup qu' est-ce que vous avez fait ?

10 [Claudine] - Ben du coup on l'a réduit, donc on a commencé par faire ben le plus petit euh un un carré ...

11 [**Chercheur**] - Vous y êtes arrivée ou pas ?

12 [Claudine] - On a trouvé un carré ou pas... ? non je ne crois pas qu'on ait trouvé... mais celui d'à côté, la table d'à côté, ils ont trouvé avec un carré. Donc on a essayé de faire six... enfin à quatre on y a réussi. On a essayé de faire plusieurs tailles de...

13 [**Chercheur**] - Voilà.

14 [Claudine] - ... Enfin rectangles, carrés et à... et en faisant un petit carré de deux sur deux euh on a réussi.

15 [**Chercheur**] - Et euh avec d'autres tailles des fois ça marchait ou ça ne marchait pas ?

16 [Claudine] - On a essayé... on a essayé le rectangle deux fois trois...

17 [**Chercheur**] - Et-ce que ça marchait ?

18 [Claudine] - On n'a pas réussi.

19 [**Chercheur**] - Le deux fois trois il ne marchait pas.

20 [Claudine] - Non on n'était... non enfin on n'était plus très patient, on voulait y arriver donc on n'a pas trouvé la tuile donc on a réduit à... à deux fois deux, il marchait peut-être...

21 [**Chercheur**] - D'accord...

22 [Claudine] - Peut-être en voulant... on voulait y arriver là...

23 [**Chercheur**] - Et pour le un fois un ?

24 [Claudine] - Oui...

25 [**Chercheur**] - Euh... vous êtes pas arrivée alors pourquoi ?

26 [Claudine] - Ben on n'a pas trouvé la bonne tuile puisqu'au bout d'un moment on voit plus rien hein ?

27 [Intervention Enfant]- Parce que nous on avait vert bleu et l'autre case elle était vert bleu.

28 [Claudine] - Ah oui d'accord ben ok, ben c'est pour ça alors le pour... le contour était vert bleu, le

cadre était vert bleu, le premier est pas vert vert euh...
29 [Chercheur] - Ok très bien...
30 [Claudine] - Mais la table d'à côté...
31 [Chercheur] - Ça c'est un résultat, est-ce que c'est possible de... d'arriver à recouvrir dans cette configuration ?
32 [Claudine] - Ah ben non, pas notre... pas notre tablette oui.
33 [Chercheur] - Ben non... voilà, donc là c'est impossible effectivement. Et le deux fois trois, je sais plus quelle taille je regarderai sur la vidéo ...
34 [Claudine] - Oui.
35 [Chercheur] - Sur lequel vous avez travaillé, un moment ça marchait pas euh est-ce que vous êtes sûre que ça marche pas euh est-ce que ça peut marcher... euh...
36 [Claudine] - Je je je sais pas on est on est deux on voulait finir...
37 [Chercheur] - D'accord.
38 [Claudine] - Donc c'était une question de d'amour propre, on voulait finir on n'y a pas passer deux heures...
39 [Chercheur] - Ok.
40 [Claudine] - On a choisi une taille pour finir.
41 [Chercheur] - Et ben je vous remercie Madame...
42 [Claudine] - Merci beaucoup.
43 [Chercheur] - Est-ce que vous avez des questions... ?
44 [Claudine] - Non non c'était bien.
45 [Chercheur] - Ben je vous remercie en tout cas.
46 [Claudine] - Merci
47 [Chercheur] - Super, merci, au revoir.
48 [Claudine] - Je crois qu'il faut que j'aille chercher mes affaires...

9 ENT-EXP-II-9

1 RETRANSCRIPTION Clévos2_9 (Claudine et MD 5 min 31 s)
2

3 [**Chercheur**] - Alors tout d'abord est-ce que je peux savoir votre prénom et votre âge si c'est pas indiscret ?

4 [Claudine] - Claudine quarante cinq ans.

5 [**Chercheur**] - D'accord, je vous remercie Madame. Alors déjà la première des choses, donc je pense que vous avez déjà répondu sur le fait de pourquoi vous êtes venue ici...

6 [Claudine] - Oui.

7 [**Chercheur**] - Alors j'aurais voulu savoir du coup sur quelle euh activité vous avez travaillé ?

8 [Claudine] - Sur les deux du coup, on a commencé par celle avec la règle euh... avec les petits...

9 [**Chercheur**] - Voilà donc ça vous... on vous a déjà interviewé par rapport à ça, alors... parlez moi déjà de l'autre activité . Qu'est-ce que vous avez fait sur l'autre activité ?

10 [Claudine] - Et ben on a fait des frises aussi avec euh les petites euh... les petits morceaux de carton colorés...

11 [**Chercheur**] - D'accord.

12 [Claudine] - Là en essayant de respecter les euh les consignes et les couleurs mais du coup comme il y avait d'autre enfants qui l'avait déjà fait, on s' est fait aider par ceux qui avait déjà fait et déjà trouvé.

13 [**Chercheur**] - D'accord, alors qu'est-ce que... quels sont les résultats que vous avez obtenus sur ce... sur ces... sur ces petites grilles ou ces petites bandes...

14 [Claudine] - Ben c'était beaucoup plus facile que l' autre... euh puis du coup il y en a un ça fait des frises de couleurs comme ça... avec le point en haut et l'autre, il y a une seule frise euh enfin ça semblait comparé à la table d'avant, ça semblait super facile...

15 [**Chercheur**] - Alors la dessus vous avez que une seule bande...

16 [Claudine] - Oui...

17 [**Chercheur**] - Alors du coup qu'est-ce que... comment

vous avez fait pour essayer de la retrouver cette euh...

18 [Claudine] - Avec celle-la c'était super bien les... les petits cartons étaient super bien rangés, donc en fait on cherchait le point en haut avec la couleur euh de départ...

19 [**Chercheur**] - D'accord.

20 [Claudine] - ... et le point en haut la deuxième couleur et ainsi de suite... donc ça comme les petits carrés étaient super bien rangés euh ça ça était super rapide.

21 [**Chercheur**] - Et du coup euh alors c'est... vous avez vu que... la table... donc c'est un motif... c'est quelque chose de fini...

22 [Claudine] - Oui...

23 [**Chercheur**] - Nous notre but c'est de recouvrir une bande qui est infinie...

24 [Claudine] - Ah oui ok... ouais je pense que je ne l' ai pas finie ouais...

25 [**Chercheur**] - Euh c'est-à-dire que justement les bords de la table c'est délimité, mais le but c'était d' avoir une bande et de se dire "est-ce que je pourrais paver quelque chose à l'infini" alors du coup est-ce que par rapport à ce que vous avez fait ... est-ce que vous avez essayé de faire quelque chose de spécial dans une stratégie adoptée pour recouvrir la bande... ?

26 [Claudine] - Ah non, il fallait... non pas du tout non non, on a cherché le point la... le point la couleur, le point la couleur euh...

27 [**Chercheur**] - D'accord.

28 [Claudine] - On a enchainé mais on n'a pas fait quelque chose euh d'esthétique ni de symétrique ni de...

29 [**Chercheur**] - D'accord...

30 [Claudine] - Non [...]

31 [**Chercheur**] - Vous n'avez pas essayé des motifs... d' accord.

32 [intervention d'un autre chercheur] Mais si c'était symétrique maman, si c'était symétrique mais on n'a

pas cherché ça, on a pris... on cherchait la couleur qui allait avec la précédente pour que le point soit en haut.

33 [**Chercheur**] - Oui mais alors... du coup vous n'avez pas trouvé un motif qui se répétait à chaque fois ?

34 [intervention autre chercheur] Il se répétait le motif?

35 [Claudine] - Alors il se répétait le motif on peut dire...

36 [**Chercheur**] - Alors du coup si ce motif se répétait...

37 [Claudine] - Oui...

38 [**Chercheur**] - Euh à votre avis, est-ce que on peut euh ... si j'avais fait une bande...

39 [Claudine] - Ah ben après oui euh...

40 [**Chercheur**] - A l'infini...

41 [Claudine] - Ah oui oui si ça se répète si c'est symétrique oui euh c'est non stop hein euh...

42 [**Chercheur**] - D'accord ok et donc vous avez travaillé sur cette bande... sur la bande euh...

43 [Claudine] - Les couleurs euh comme ça où on fait des grandes euh diagonales.

44 [**Chercheur**] - D'accord donc vous avez travaillé sur le plan, ce qu'on appelle le plan...

45 [Claudine] - Oui.

46 [**Chercheur**] - Et donc du coup quels sont vos résultats sur ce... ?

47 [Claudine] - Ben c'est joli parce que ça fait des grandes...ça fait des grandes diagonales comme ça, les couleurs s'enchainent bien enfin moi je trouve que ça ça rendait bien, c'était moins casse-tête que l'autre où il fallait trouver euh...

48 [**Chercheur**] - Alors est-ce que on peut recouvrir intégralement euh le plan ? Quelque chose d'infini avec euh...

49 [Claudine] - Alors moi je n'ai pas réussi il me manquait deux euh... enfin je n'avais plus les petites cartes euh... j'avais deux petits trous avec les couleurs avec lesquelles j'avais commencé mais il restait deux petits trous au bout, euh mais la fille qui avait commencé une autre couleur m'a dit

qu'elle elle a réussi à remplir euh la case en entier.

50 [**Chercheur**] - D'accord et euh vous pensez euh qu'il y a un résultat mathématique derrière ça ?

51 [Claudine] - Alors [...] parce que alors là je ne me suis pas posée la question hein.

52 [**Chercheur**] - Ouais... vous avez euh vous avez posé les tuiles...

53 [Claudine] - Oui.

54 [**Chercheur**] - En assemblant les couleurs...

55 [Claudine] - Oui les couleurs et les points vers le haut...

56 [**Chercheur**] - Les points vers le haut...

57 [Claudine] - Oui...

58 [**Chercheur**] - Donc en respectant l'orientation.

59 [Claudine] - Oui.

60 [**Chercheur**] - Et euh vous avez vu quelque chose, vous vous me montrez avec vos mains quelque chose qui se décale...

61 [Claudine] - Oui ça fait des diagonales en fait ça...

62 [**Chercheur**] - Ca fait des diagonales...

63 [Claudine] - Oui oui ça s'enchaîne euh les euh les couleurs oui il faut qu'on accomplisse ouais qu'on les pose euh enfin qu'on les pose, pas l'une sous l 'autre, ou on les fait... en diagonale...

64 [**Chercheur**] - Alors pourquoi euh on les pose en diagonale du coup ?

65 - Ben parce que ça ça s'enchaîne, je ne sais pas c' est difficile à expliquer parce que ça s'enchaînait bien, parce que c'était facile à repérer les tuiles de couleurs...

66 [**Chercheur**] - D'accord.

67 [Claudine] - Euh après je trouve c'était facile à repérer de les poser en diagonale pour l'autre système c'est vrai qu'on les posait comme ça euh l' autre la première table qu'on a fait c'est vrai qu' on essaye de faire des lignes mais pas des diagonales, mais là avec ce système de couleurs euh la diagonale euh ça semblait plus évident.

68 [**Chercheur**] - Et du coup on peut euh est-ce que vous avez trouvé un motif qui se répète en faisant ce... cette stratégie ?
69 [Claudine] - Alors ça fait... ça fait des diagonales qui s'enchaînent moi j'ai pas essayé de faire un ordre de couleur...
70 [**Chercheur**] - D'accord.
71 [Claudine] - Euh mais oui puisque à la fin ... pourquoi j'ai en... ah oui à la fin j'ai pris rouge et violet mais en fait violet il n'y a pas de point en haut. Donc à la fin j'ai été bloquée avec les tuiles euh...
72 [**Chercheur**] - D'accord.
73 [Claudine] - Violettes donc j'ai changé de couleur pour en prendre une autre...
74 [**Chercheur**] - D'accord.
75 [Claudine] - Mais euh...
76 [**Chercheur**] - Et est-ce que vous avez vu quelque chose sur la diagonale qui se répétait ?
77 [Claudine] - Il y avait quelque chose qui se répétait sur la diagonale ? Il n'y a rien qui m'a sauté euh ...
78 [**Chercheur**] - D'accord.
79 [Claudine] - Rien qui m'a sauté aux yeux.
80 [**Chercheur**] - D'accord ok, et la dernière question c'est est-ce que vous pensez euh... qu'en essayant de recouvrir une bande infinie, juste une bande de largeur un donc euh ...
81 [Claudine] - Oui...
82 [**Chercheur**] - De la taille d'une tuile...
83 [Claudine] - Oui
84 [**Chercheur**] - Euh... est-ce qu'avec ces tuiles on peut ?
85 [Claudine] - ... mais sûrement mais après est-ce que c'est joli, je ne sais pas.
86 [**Chercheur**] - Alors sans... sans parler d'esthétique ...
87 [Claudine] - Oui oui oui
88 [**Chercheur**] - Est-ce qu'on peut ? Moi je voulais sa... je voudrais savoir si vous penser que en en une...

en pavant une bande, est-ce-qu'on peut paver le plan ? Avec ces tuiles ?
89 [Claudine] - Donc il y en a une elle est moitié jaune moitié bleue, donc la suivante elle est moitié bleue moitié verte, moitié verte moitié jaune donc euh... ben oui en enchaînant euh moitié moitié...
90 [**Chercheur**] - On peut répéter euh... on peut répéter ...
91 [Claudine] - Voilà oui...
92 [**Chercheur**] - Cette bande, donc on peut paver la bande infiniment...
93 [Claudine] - Oui oui.
94 [**Chercheur**] - Et du coup est-ce qu'on peut paver le plan ?
95 [Claudine] - ... ben oui, si on après chaque fois on descend oui oui.
96 [**Chercheur**] - Alors vous descendez, mais vous descendez...
97 [Claudine] - Je descends euh comme ça.
98 [**Chercheur**] - En diagonale ?
99 [Claudine] - Oui je descends comme ça.
100 [**Chercheur**] - Oui ah très bien.
101 [Claudine] - Ouais.
102 [**Chercheur**] - Ben je vous remercie...
103 [Claudine] - Voilà.
104 [**Chercheur**] - ... déjà pour ce euh.. cette première inter... enfin cette deuxième interview et euh... alors... je vais...

10 ENT-EXP-II-10

1 RETRANSCRIPTION Clévos2_10 (**Nathan** et MD 5 min 06 s)
2
3
4 [chercheur] - Alors, déjà ma première des choses j' aimerais savoir ton prénom s'il te plait ?
5 [**Nathan**] - **Nathan**.
6 [**Chercheur**] - **Nathan**, tu as quel âge **Nathan** ?
7 [**Nathan**] - Onze ans.
8 [**Chercheur**] - Tu as onze ans, d'accord, super. Alors,

la première chose j'aimerais que tu essayes de me dire pourquoi finalement, vous vous êtes inscrits avec ta grand-mère ?

9 **[Nathan]** - Je crois...

10 **[Chercheur]** - Pourquoi tu as eu envie de venir à cet atelier ?

11 **[Nathan]** - Ben parce que... enfin j'aime bien les maths.

12 **[Chercheur]** - Parce que tu aimes bien les maths.

13 **[Nathan]** - C'est ma matière préférée.

14 **[Chercheur]** - D'accord, c'est ta matière préférée. Et est-ce-que tu penses, en venant ici ce matin, est-ce-que tu penses avoir fait ce que tu vou... étais venu faire ici ?

15 **[Nathan]** - Pas exactement.

16 **[Chercheur]** - Alors, c'est-à-dire ? est-ce-que tu peux développer ?

17 **[Nathan]** - Je ne pensais pas faire ça.

18 **[Chercheur]** - Alors...

19 **[Nathan]** - Assembler toutes les couleurs...

20 **[Chercheur]** - Alors du coup, qu'est-ce-que tu as fait ?

21 **[Nathan]** - Ben faut assembler des couleurs et que ça aille.

22 **[Chercheur]** - Alors il faut assembler des couleurs et que ça aille. Alors, est-ce-que tu pourrais me dire euh finalement sur quel problème tu as réfléchi ? Si tu devais me formuler euh la question, qu'est-ce-qu'il fallait faire en fait ?

23 **[Nathan]** - Fallait remplir une... une grande case avec des petits... carreaux...

24 **[Chercheur]** - Alors, une grande case, c'est le grand ça... rectangle...

25 **[Nathan]** - Oui...

26 **[Chercheur]** - Oui une grande... un grand rectangle...

27 **[Nathan]** - Un grand rectangle avec des carreaux, mais fallait pas que ce... enfin fallait que ça aille, ça corresponde avec les autres carreaux.

28 **[Chercheur]** - D'accord, c'est-à-dire que les couleurs côte à côte doivent être de la même couleur...

29 [**Nathan**] - Oui.
30 [**Chercheur**] - D'accord. Est-ce-que tu es arrivé à le faire justement ce... bah ce... ce grand carreau ?
31 [**Nathan**] - Non.
32 [**Chercheur**] - Non, alors... euh tu sais il y avait une réglette ?
33 [**Nathan**] - Oui.
34 [**Chercheur**] - Tu sais la réglette c'est la petite euh équerre qu'on avait. Qu'est-ce que tu as fait justement avec cette euh réglette ?
35 [**Nathan**] - Ben je l'ai mis en bas... enfin... du rectangle.
36 [**Chercheur**] - Tu l'as mis en bas, en bas de quoi ?
37 [**Nathan**] - Du rectangle.
38 [**Chercheur**] - Du rectangle donc tu as pris le plus grand contour et tu l'as mis en bas?
39 [**Nathan**] - Hmm.
40 [**Chercheur**] - Et est-ce que tu l'as déplacé après pour essayer des choses plus petites ?
41 [**Nathan**] - Non.
42 [**Chercheur**] - Non ? alors euh à ton avis, pourquoi euh , si on avait voulu la positionner uniquement sur le grand rectangle, on aurait euh dessiné la réglette sur la table, par exemple. Pourquoi tu penses que cette réglette on pouvait la... elle était euh... palpable ?
43 [**Nathan**] - Je ne sais pas.
44 [**Chercheur**] - Tu ne sais pas pourquoi ?
45 [**Nathan**] - Non.
46 [**Chercheur**] - Ben je vais... te dire pourquoi, parce qu'on peut la déplacer. Et en fait tu peux construire avec la réglette d'autres rectangles... plus petits.
47 [**Nathan**] - Ah !
48 [**Chercheur**] - Et oui, en la déplaçant tu peux construire d'autres rectangles plus petits et du coup, tu aurais pu regarder ce problème là sur différentes tailles de... rectangle.
49 [**Nathan**] - Oui.
50 [**Chercheur**] - D'accord, donc du coup tu n'es pas

arrivé à...
51 [**Nathan**] - Non.
52 [**Chercheur**] - Et euh c'est à dire... alors est-ce que tu peux développer ce qui t'a bloqué ?
53 [**Nathan**] - Ben à la fin il faut... il fallait forcement un carré qui ait deux fois la même couleur .
54 [**Chercheur**] - D'accord, et donc du coup c'est ? c'est ... on pouvait en trouver une de pièce comme ça ?
55 [**Nathan**] - Non.
56 [**Chercheur**] - Non pourquoi ?
57 [**Nathan**] - Parce qu'il y a une fois chaque couleur sur une... chaque carré.
58 [**Chercheur**] - Ouais d'accord.
59 [**Nathan**] - Et il en fallait deux sur les autres.
60 [**Chercheur**] - D'accord, et euh qu'est-ce que tu as fait quand tu as vu que ça... qu'il y avait cette pièce... qu'est-ce que tu as essayé ? quand il fallait une pièce comme ça qu'est-ce que tu as... est-ce que tu as essayé quelque chose d'autre ?
61 [**Nathan**] - Euh ben oui mais enfin à chaque fois ça refaisait la même chose.
62 [**Chercheur**] - D'accord donc tu as essayé de modifier le... la disposition de certaines pièces et ça faisait toujours la même chose ?
63 [**Nathan**] - Oui.
64 [**Chercheur**] - D'accord, et donc tu ne t'es pas dit, bon ben j'y arrive pas sur celui-là... alors du coup est-ce que tu penses que... il y a une solution ou euh est-ce qu'on peut trouver quelque chose qui marche ?
65 [**Nathan**] - je ne sais pas.
66 [**Chercheur**] - Tu ne sais pas, d'accord, mais toi tu penses... tu penses quoi, tu penses que on peut trouver quelque chose qui recouvre intégralement le grand rectangle ou alors du coup, c'est peut-être euh... pas possible ?
67 [**Nathan**] - Beuh...
68 [**Chercheur**] - Tu penses quoi du coup ?
69 [**Nathan**] - Que c'est pas possible.

70 [**Chercheur**] - Tu penses que c'est pas possible ?... ou tu penses qu'on peut te donner des choses qui pourront ne pas marcher, oui ?
71 [**Nathan**] - Oui.
72 [**Chercheur**] - Et du coup euh... est-ce que là du coup maintenant après cette discussion tu vas essayer euh autre chose ?
73 [**Nathan**] - Euh... je vais essayer.
74 [**Chercheur**] - Tu vas essayer quoi ?
75 [**Nathan**] - Ben autrement.
76 [**Chercheur**] - Ah... autrement c'est-à-dire ?
77 [**Nathan**] - Ben quand un... comme tu l'as dis les petits carrés enfin...
78 [**Chercheur**] - Ah essayer avec la la réglette de déplace carrés... ha oui déjà c'est c'est une bonne chose, mais c'est histoire des petites... des petits carrés, comme tu m'as dit, pour effectivement euh ...euh ben regarder le problème sur d'autres tailles de rectangle, d'accord, euh et puis la la dernière question justement c'était de savoir euh est-ce que tu as une stratégie, une stratégie euh c'est à dire un... une certaine règle que tu as essayé euh essayé de... pour essayer de recouvrir euh le rectangle, est-ce que tu a essayé différentes stratégies ou tu as pris des tuiles euh...
79 [**Nathan**] - Ben je les... j'ai juste pris des tuiles et je les ai mis...
80 [**Chercheur**] - D'accord.
81 [**Nathan**] - j'ai regardé sûr...
82 [**Chercheur**] - D'accord, je te remercie, est-ce que tu as des questions ou des remarques ?
83 [**Nathan**] - Non.
84 [**Chercheur**] - Non ? bon ben je te laisse y retourner hein ? au revoir.
85 [**Nathan**] - Au revoir.
86 [**Chercheur**] - Merci.

Annexe K

Transcriptions des entretiens audio de l'expérimentation III

1 ENT-EXP-III-1

```
RETRANSCRIPTION Savasse 1 (Solan et SG 5 min 20)

[Chercheur] - Alors voilà, bon est-ce que tu peux me dire ton prénom ?
[Solan]     - Je m'appelle Solan
[Chercheur] - Tu as quel âge ?
[Solan]     - J'ai douze ans.
[Chercheur] - Tu es en quelle classe ?
[Solan]     - Euh je suis en cinquième.
[Chercheur] - D'accord euh alors est-ce que tu peux m' expliquer pourquoi tu es venu euh pourquoi t'es venu ici à la médiathèque ?
[Solan]     - Parce que ma maman elle m'avait inscrit, elle m'avait montré un catalogue où dessus y avait des choses pour la fête de la science et du coup ben j'ai trouvé ça qui m'inspirait un peu, du coup ben elle m'a inscrit.
[Chercheur] - D'accord et quand tu dis ça c'est quoi au juste euh qu'est-ce... qu'est-ce qui t'a intéressé, c'est parce que c'était à la médiathèque ou...
[Solan]     - C'est parce que euh hmm c'est un peu casse-tête, casse-tête j'aime bien un peu.
```

13 [**Chercheur**] - D'accord.
14 [Solan] - Ça me paraissait un peu, il fallait réfléchir.
15 [**Chercheur**] - D'accord euh hmm et est-ce que en fait, là t'as passé une grosse demi-heure à réfléchir sur le problème, est-ce que ça correspond à ce que ... à ton attente ?
16 [Solan] - Euh oui ben c'est casse-tête après enfin j'ai pas compris grand chose justement c'est ça qui faut trouver la chose j'aime bien.
17 [**Chercheur**] - Ok ben alors t'as... t'as fait quoi au juste ?
18 [Solan] - J'ai essayé de faire euh des formes qui se suivaient comme une petite fresque euh des choses qui collaient en selon les points avec les couleurs voilà des choses comme ça.
19 [**Chercheur**] - Et c'est quoi que tu appelles des choses ?
20 [Solan] - Des choses, des figures et des couleurs qui collent ensemble.
21 [**Chercheur**] - Mais quoi comme figures ?
22 [Solan] - Des figures géométriques.
23 [**Chercheur**] - Tu peux être plus précis ?
24 [Solan] - Des carrés, des triangles, des vagues euh, des pics euh.
25 [**Chercheur**] - D'accord, et ta forme elle était définie par rapport à quoi ? Y avait quoi comme matériel ? Y avait quoi devant toi ? Tu peux décrire ce qu'il y avait devant toi ?
26 [Solan] - Devant moi y avait euh une fresque où dessus on devait poser des... des petits carreaux... avec des points et des couleurs.
27 [**Chercheur**] - Euh ouais et euh tu les plaçais comment les petits carreaux ?
28 [Solan] - Les petits carreaux je les plaçais sur une bande.
29 [**Chercheur**] - D'accord et tu les plaçais euh, t'avais pas de règle pour les placer, tu les disposais comme tu voulais ?
30 [Solan] - Un peu oui.

31 [**Chercheur**] - C'est-à-dire quand tu mettais euh tes carreaux, si t'en mettais un à un endroit et si tu mettais à côté tu mettais n'importe lequel pour que ça fasse joli ?

32 [Solan] - Ben il fallait essayer de trouver celui qui collait avec ça pour essayer de faire justement comme j'ai dit tout à l'heure des fresques et des choses comme ça.

33 [**Chercheur**] - Mais qu'est-ce que ça veut dire coller le carreau.

34 [Solan] - Coller ça veut dire, je sais pas comment expliquer des... que les couleurs aillent ensemble.

35 [**Chercheur**] - Quand tu dis aillent ça veut dire qu' elles sont les mêmes que par exemple...

36 [Solan] - Elles vont ensemble, elles sont...

37 [**Chercheur**] - Par exemple est-ce que le rouge va avec le bleu ?

38 [Solan] - Non c'est pas ça que je veux dire, c'est que par exemple les carreaux dessus y avait du rouge et du rouge et de l'autre côté du carreau y avait du orange et par exemple je collais le rouge et le orange, ensuite je reprenais un autre avec du rouge et du orange je les assemblais et ça me faisait des figures.

39 [**Chercheur**] - Et en fait le but du problème pour toi c 'était de faire des figures ?

40 [Solan] - Exactement.

41 [**Chercheur**] - N'importe quelles figures ?

42 [Solan] - N'importe lesquelles.

43 [**Chercheur**] - D'accord et t'as obtenu quoi alors du coup comme résultat ?

44 [Solan] - Comme résultat j'ai... je sais pas euh, pas vraiment de grands résultats.

45 [**Chercheur**] - Je te demande pas Haha tu sais de grands résultats spécialement mais est-ce que tu pourrais ben voilà j'ai réussi à faire des triangles ou je sais pas.

46 [Solan] - Oui voilà des... une fresque de vagues, j'ai réussi à en faire une longue, des fresques...

47 [**Chercheur**] - Une fresque de vagues ? C'est quoi ça ?

48 [Solan] - Oui des vagues hmm pointues un trait long et un autre qui repart de l'autre côté à quatre-vingts-dix degrés.
49 **[Chercheur]** - Hmm d'accord.
50 [Solan] - Un pic un peu.
51 **[Chercheur]** - Et ça c'est... ça t'as repéré ça par rapport au matériel qui était à ta disposition, tu as senti que c'était ça le problème qui qui était posé, c'est ça ?
52 [Solan] - Après aussi j'ai réussi à faire des hmm des lignes diagonales... et rayées.
53 **[Chercheur]** - D'accord donc d'accord ok. Hmm donc euh ... Là tu... est-ce que t'as l'impression bon ton objectif c'était de faire des casse-têtes et tout donc là t'as l'impression que ...
54 [Solan] - Oui
55 **[Chercheur]** - Que ça obéit à ça euh... est-ce que euh hmm... est-ce que à ton avis c'est lié aux mathématiques ou pas ?
56 [Solan] - Oui c'est de la géométrie pour moi.
57 **[Chercheur]** - D'accord pour toi c'est clairement identifié comme étant de la géométrie.
58 [Solan] - Oui.
59 **[Chercheur]** - D'accord ok très bien... Bon écoute est-ce que t'as d'autres remarques ?
60 [Solan] - Non pas forcément.
61 **[Chercheur]** - Est-ce que... tu serais intéressé d'avoir encore des activités comme ça, vivre des activités de ce genre.
62 [Solan] - Euh oui pourquoi pas.
63 **[Chercheur]** - Donc là en gros euh quand on va terminer l'interview euh est-ce que tu vas te retourner euh.
64 [Solan] - Oui je vais y retourner pour essayer de de de trouver un nouveau problème.
65 **[Chercheur]** - D'accord, bon ben écoute je pense que voilà moi... j'ai terminé.

2 ENT-EXP-III-2

1 RETRANSCRIPTION Savasse 2 (Nathalie et SG 20 min 14:)

2

3 [**Chercheur**] - C'est alors j'en... ça y est j'ai lancé l'enregistrement, alors pour commencer, je vous demande votre prénom ?

4 [Nathalie] - Nathalie.

5 [**Chercheur**] - Voilà euh votre âge ?

6 [Nathalie] - Cinquante-deux.

7 [**Chercheur**] - Et euh votre profession ou secteur d' activité ?

8 [Nathalie] - Ben je suis dans, je suis acheteuse dans l'industrie.

9 [**Chercheur**] - D'accord alors pourquoi vous êtes venue ici ?

10 [Nathalie] - C'était pour mes enfants, c'est dans le cadre de la fête de la science c'était une animation on habite le village donc c'était l'occasion. On a fait des des animations à Valence, comme celle-là était sur place et voilà, ça semblait ludique... oui .

11 [**Chercheur**] - D'accord vous êtes allée au village de la des sciences ?

12 [Nathalie] - Non on est allé au labo et on est allé aux Clévos.

13 [**Chercheur**] - Oui c'est ça c'était le village des sciences.

14 [Nathalie] - Mais le village je crois qu'il était... ah je sais pas s'il était aux Clévos le village.

15 [**Chercheur**] - Si si c'était le samedi et le dimanche.

16 [Nathalie] - C'est ça.

17 [**Chercheur**] - Ben j'y étais c'est pour ça.

18 [Nathalie] - D'accord.

19 [**Chercheur**] - Ok vous avez fait le parcours ?

20 [Nathalie] - On a fait le parcours Gravity ouais.

21 [**Chercheur**] - D'accord ah vous avez fait Gravity euh donc oui vous me dites parce que c'est la fête de la science mais votre objectif d'être venue spécialement là...

22 [Nathalie] - C'est parce que mes enfants sont toujours sur l'ordinateur et la télé ben depuis un an ils ne veulent plus rien faire d'autres, et donc

je cherche tout ce que je peux pour les faire sortir de la maison et je je on est en retard parce que je les ai trainés ils ne voulaient pas bouger.

23 [**Chercheur**] - D'accord mais par rapport au contenu même de ce... est-ce que vous aviez des attentes par rapport à ce que vous aviez vu ?

24 [Nathalie] - Ben d'un côté c'était du jeu et de l' autre côté c'était des maths sur un gars en thèse, donc c'était...pour moi euh c'était intéressant de voir, pour mes enfants en tout cas, de voir le lien entre les maths et les jeux.

25 [**Chercheur**] - D'accord et est-ce que vous pensez qu' ils ont vu ce lien ?

26 [Nathalie] - Ah je pense pas franchement, ils ont vu ça comme un jeu, moi je me posais la question pourquoi les maths là-dedans et voilà mais eux n'ont pas cherché euh, moi non plus, on a cherché à résoudre le... c'était un quiz ben le le casse-tête ouais.

27 [**Chercheur**] - D'accord est-ce que vous pouvez me décrire le casse-tête sur lequel vous avez cherché ?

28 [Nathalie] - C'était... ça par... ça semblait simple il y a quatre couleurs, non il y a six couleurs, et il faut faire des... des... voilà il faut faire des lo... des losanges avec des couleurs comme le triomino, il faut que... voilà. On essaye moi j'y suis pas vraiment pas bien arrivée, j'étais étonnée alors soit je suis bête, soit mes enfants sont très intelligents, soit il y a autre chose mais ils se sont bien débrouillés par rapport à ce que j'ai réussi à faire et ils se sont amusés surtout je pense.

29 [**Chercheur**] - Hmm d'accord.

30 [Nathalie] - Ils se sont pris au jeu je pensais...et je savais pas si ils s'y intéresseraient.

31 [**Chercheur**] - Euh vous pouvez pas être plus précise dans la description du problème parce que là vous dites j'assemble, je fais des losanges mais...

32 [Nathalie] - Il faut que tout corresponde mais c'est difficile avec seulement six pièces, six agencements

de couleurs. Je comprends pas ce que vous voulez me faire dire.

33 [**Chercheur**] - Je... là pour l'instant je ne vois pas le problème en fait, c'est ça donc les pièces... les pièces elles sont comment ?

34 [Nathalie] - J'ai trouvé que c'était difficile, c'est des pièces carrées avec un quart de couleur chacune .

35 [**Chercheur**] - Oui... Ben si vous voulez moi je connais les pièces et tout mais quand vous me dites ça

36 [Nathalie] - Ouais.

37 [**Chercheur**] - Quand vous me dites ça je me mets dans la position où je ne connaîtrais pas le problème. Ce que je vous demande c'est de me décrire le problème comme si je ne le connaissais pas.

38 [Nathalie] - D'accord donc...

39 [**Chercheur**] - Et là quand vous me dites, la phrase alors comment vous dites, les quarts de pièces...

40 [Nathalie] - Je vois.

41 [**Chercheur**] - Oui mais voilà maintenant imaginez que moi, on a pas le support et je vous demande de décrire à la fois le matériel sur lequel vous avez joué et puis qu'est-ce que vous avez cherché à faire avec ce matériel ?

42 [Nathalie] - Donc le matériel il y a une planche avec euh... c'est une sorte de damier avec euh oui c'est une sorte de damier mais avec une seule couleur de fond et dessus il faut agencer des pièces qui sont carrées et qui ont sur la face supérieure quatre triangles qui ont quatre couleurs différentes, il faut les poser sur le damier, les pièces les unes à côté des autres...

43 [**Chercheur**] - On se mets au soleil parce que j'ai froid...

44 [Nathalie] - Hahaha.

45 [**Chercheur**] - J'ai le courant d'air et tout.

46 [Nathalie] - Il faut agencer les pièces les unes contre les autres et il faut que les quatre couleurs sur chaque pièce correspondent à la couleur de la pièce que vous posez contre la... donc chaque fois

il faut que les quatre couleurs de la pièce correspondent, soient les mêmes que les quatre couleurs des pièces autour, c'est difficile à expliquer.

47 [**Chercheur**] - D'accord.

48 [Nathalie] - Voilà pour moi c'est comme le triomino si vous connaissez le jeu c'est la même chose.

49 [**Chercheur**] - Oui je connais le jeu mais pour moi...

50 [Nathalie] - Vu de l'extérieur et pour un néophyte comme nous, nous voilà c'était...

51 [**Chercheur**] - Donc euh donc euh, on cherche à placer des pièces avec cette contrainte que sur les bords ...

52 [Nathalie] - Sur les bords de ce damier il y a une couleur par bord.

53 [**Chercheur**] - Hmm.

54 [Nathalie] - Sur trois... sur quatre bords.

55 [**Chercheur**] - Sur quatre bords ?

56 [Nathalie] - Euh quatre ou trois je sais plus... au moins trois, le quatrième je ne me souviens pas. Voilà le côté droit et le haut. Voilà après j'ai vu qu'il y a six pièces différentes puisqu'il y a des gommettes sous les pièces et chaque couleur de gommettes correspond à un agencement des quatre couleurs sur la face mais malgré ça j'ai trouvé ça ...

57 [**Chercheur**] - Tout à l'heure vous m'avez dit qu'il y a six couleurs et là vous êtes en train de me dire qu 'il y a six types de pièces.

58 [Nathalie] - Non non il y a six types de pièces voilà qui ont chacune autant...

59 [**Chercheur**] - Vous comprenez.

60 [Nathalie] - Ouais ouais ouais ouais, non non il y a quatre couleurs et six possibilités enfin six pièces où les couleurs sont agencées, enfin je suppose, différemment et je m'en suis doutée parce que au dos des pièces il y a des gommettes qui correspondent à ...

61 [**Chercheur**] - Des types.

62 [Nathalie] - Des types de pièces.

63 [**Chercheur**] - D'accord.

64 [Nathalie] - Et donc avec ces six pièces différentes, avec ces six pièces où les couleurs sont agencées différemment ben c'est pas si facile d'arriver à faire un damier, on peut faire quelques pièces facilement enfin facilement mais faire...

65 [**Chercheur**] - Comment vous procédez justement ? Comment que vous ayez réussi ou pas ?

66 [Nathalie] - Moi j'ai commencé dans l'angle, j'ai commencé dans un angle et j'ai essayé de partir sur le... dans l'angle en bas à droite et j'ai essayé de progresser vers le haut et vers la gauche mais j'ai vu que mes enfants ont commencé, enfin ils vous le diront, ils ont commencé certains par le milieu je sais pas voilà. Ça était plus difficile que je croyais parce que j'ai pas réussi à faire grand chose hahaha.

67 [**Chercheur**] - D'accord et ça vous n'avez pas identifié que ça pouvait être un problème mathématique ?

68 [Nathalie] - Non.

69 [**Chercheur**] - Alors c'est quoi pour vous un problème mathématique ?

70 [Nathalie] - Ben j'aime pas les maths déjà donc je hahahaha.

71 [**Chercheur**] - Oui mais ça...

72 [Nathalie] - Ben un problème mathématique ça peut être euh là pour moi c'est de la manipulation il n'y a pas de logique, il y a peut-être des sui...

73 [**Chercheur**] - Je vous ai demandé comment vous avez fait c'est là où du coup moi...

74 [Nathalie] - Ben j'ai regardé les couleurs.

75 [**Chercheur**] - Oui mais.

76 [Nathalie] - Vert machin

77 [**Chercheur**] - Oui mais quand vous avez dit, je je place une tuile enfin on appelle ça des tuiles les petits carrés colorés.

78 [Nathalie] - D'accord.

79 [**Chercheur**] - Une tuile dans l'angle et je fais comme ça comme ça donc vous entrez dans une espèce de démarche pour essayer de respecter la contrainte et

de remplir.

80 [Nathalie] - D'accord.

81 [**Chercheur**] - Donc vous entamez ce qu'on appellerait une espèce de stratégie de résolution. Donc vous êtes dans...

82 [Nathalie] - Wouaouh.

83 [**Chercheur**] - Vous êtes dans la quête de chercher...

84 [Nathalie] - Ben j'ai pas trouvé hahahaha.

85 [**Chercheur**] - Ben oui ok vous n'avez pas trouvé mais peut-être qu'elle aurait donné des trucs si vous aviez cherché sur d'autres tailles, des trucs comme ça vous voyez ce que je veux dire ? On sait pas, je sais pas parce que j'ai pas vu exactement ce que vous avez fait.

86 [Nathalie] - J'ai pas fait grand chose.

87 [**Chercheur**] - Mais en tout cas vous êtes rentrée, vous avez pas fait je prends cette tuile je prends celle là je fais...

88 [Nathalie] - Ça c'est sûr.

89 [**Chercheur**] - Ben oui donc il y a un moment où on fait au hasard, on fait n'importe quoi et un moment où on structure et c'est ce qu'on, enfin on met en place une stratégie pour essayer de résoudre et donc là c'est là où il se passe des trucs intéressants et c'est là où effectivement on réfléchit à respecter les contraintes et qu'on...

90 [Nathalie] - D'accord.

91 [**Chercheur**] - Voit où le truc devient coince au niveau du problème.

92 [Nathalie] - D'accord.

93 [**Chercheur**] - Donc après vous avez réfléchi à ce problème une grosse demi-heure en gros.

94 [Nathalie] - Déjà ouais j'ai pas vu le temps passer.

95 [**Chercheur**] - Ah.

96 [Nathalie] - Ouais au début ça m'a intéressé quand j'ai vu que j'y arrivais pas j'ai un peu laissé tomber j'ai vu que mes enfants se débrouillaient bien, qui avaient l'air de, qu'ils étaient occupés de voire qui s'amusaient donc j'ai lâché ouais.

97 [**Chercheur**] - Mais les pastilles quand vous avez

identifié les types de carrés et que vous avez vu qu'il y avait des pastilles dessous euh vous l'aviez pas au départ ça ?

98 [Nathalie] - J'avais pas fait attention au départ, enfin j'avais vu qui avait... mais j'avais pas cherché plus loin, c'est quand ça j'ai vu que j'arrivais pas facilement que j'ai essayé de me dire bon oui ben oui y a des pastilles peut-être que chaque pastille correspond à une couleur et je m'en suis mis devant.

99 [**Chercheur**] - Oui mais à un moment je vous ai entendu dire à votre fils quelque chose, alors vous le repériez par rapport aux pastilles mais éventuellement on avait pas besoin du fait qu'il y ait des pastilles, mais vous avez dit...

100 [Nathalie] - Je me souviens pas ce que je lui ai dit.

101 [**Chercheur**] - Vous avez dit ben ça doit se répéter ou quelque chose...

102 [Nathalie] - Je pense de toute façon je, puis on le voit en mettant les tuiles, on voit qui peut pas c'est pas bleu jaune bleu jaune bleu jaune, je pense qu'il doit y avoir des suites de couleurs parce que des fois on voit deux puis un, alors soit c'est très logique c'est une fois bleu une fois ceci une fois cela une fois cela, au-dessus c'est pareil en décalé comme ça, soit...

103 [**Chercheur**] - Là vous voyez que vous êtes en train de parler...

104 [Nathalie] - Je me pose la question parce que pourquoi je n'y arrivais pas j'ai essayé de comprendre pourquoi...

105 [**Chercheur**] - Et là donc du coup vous êtes déjà une euh une euh méthode de...

106 [Nathalie] - De logique.

107 [**Chercheur**] - D'essayer de montrer quand ça marche, c'est-à-dire que vous cherchez quelque chose qui se répétait et cetera, vous l'exprimez avec vos mots d'accord mais c'est bien, c'est bien une façon de résoudre le problème si vous y arrivez.

108 [Nathalie] - Oui ben comme je me disais si c'était

posé sur une vitre, on pose et qu'on voit la couleurs des gommettes dessous alors soit alors là c'est des hypothèses, soit on se dit c'est un truc super logique et les couleurs se suivent donc je vous dis vert, jaune, rouge, bleu, vert, jaune, rouge, bleu au dessus ça peut faire ça sera pas vert-vert après je pense pas donc c'est le vert en face du vert si y a du rouge dessus et que ça se répète, on peut penser que tac quatre trucs plus loin c'est pareil et que c'est tout en décalé. Soit y a un motif et c'est pas la même suite qui se répète donc voilà on sait pas.

109 [**Chercheur**] - Euh.

110 [Nathalie] - Pour le seul but c'est d'arriver...

111 [**Chercheur**] - Celui où ça se répétait comme vous dites une suite c'est aussi un motif ?

112 [Nathalie] - C'est un motif oui.

113 [**Chercheur**] - Plus restrictif vous demandez plus à ce motif que de manière générale.

114 [Nathalie] - Alors soit le motif et toujours le même et est très simple, soit c'est des motifs avec je sais pas des fois on voyait euh quand on assemble...

115 [**Chercheur**] - Et vous avez cherché à en faire des... de créer des motifs ?

116 [Nathalie] - J'ai pas cherché, j'ai cherché juste à arriver...

117 [**Chercheur**] - Parce que c'est vous qui me parlait de ça.

118 [Nathalie] - Ben c'est pour essayer de remplir, mon but c'était essayer d'en remplir le plus possible et comme je n'y arrivais pas juste en mettant, en essayant en essayant, je me disais peut-être que si je savais le motif qui est je chercherais à faire le motif euh parce que j'ai vu que mes enfants à un moment y avait, on voyait quand on prend, quand on se recule on voit qui y a deux rectangles formés par les quatre quarts de rectangles, enfin deux carrés rouges puis un puis un puis deux carrés rouges, peut-être qu'il y a ce genre voilà mais le seul but c'était pour arriver à en faire un peu plus, à remplir

un peu plus la... voilà

119 [**Chercheur**] - Hmm d'accord mais là vous voyez typiquement nous quand on repère ça c'est qu'on se dit vous êtes dans une euh stratégie justement de motifs c'est ce qu'on appelles les pavages par translation des choses comme ça donc vous n'avez pas conscience d'être dans une démarche où vous faites des mathématiques mais c'est bien, se sont bien des mathématiques qui a derrière ça...

120 [Nathalie] - D'accord.

121 [**Chercheur**] - D'accord alors c'est pour ça que je vous ... éventuellement je vous repose la question c'est quoi pour vous les mathématiques parce que ?

122 [Nathalie] - Les mathématiques comme je dis j'étais pas super, j'étais pas nulle mais j'étais pas super bonne en maths donc euh j'ai toujours... pour moi les maths c'est soit la géométrie pfff voilà, soit l 'algèbre pfff ça peut servir... des mathématiques de base peuvent servir tous les jours mais c'est pas un truc, je suis pas une matheuse donc les maths ce que c'est, c'est une contrainte ouais pour moi c'est une contrainte.

123 [**Chercheur**] - Oui mais ça c'est pas comment vous les vivez enfin là vous me répondez comment vous les...

124 [Nathalie] - Je mais je pense que dans la vie dans le monde plein de choses sont régies par les maths euh mais je suis pas assez matheuse pour le voilà le comprendre.

125 [**Chercheur**] - Hmm d'accord, est-ce que sinon vous avez l'habitude d'aller euh dans des euh vous m'avez dit que vous aimez bien amener vos enfants pour qu'ils sortent de l'écran dans différentes activités culturelles

126 [Nathalie] - Bah les écrans ça fait qu'un an ou deux mais depuis tout petit pour qu'ils voient d'autres choses, qu'ils s'ouvrent l'esprit [...]

127 [**Chercheur**] - Et vous avez dit que vous êtes allée à la fête de la science et est-ce que vous avez, et

aux Clévos notamment, et est-ce que par exemple vous allez régulièrement aux Clévos ?

128 [Nathalie] - On y va que pour la fête de la science parce que c'est loin quand même déjà...

129 [**Chercheur**] - Ouais.

130 [Nathalie] - Et euh non on y va que pour la fête de la science.

131 [**Chercheur**] - Est-ce que si vous allez à Paris, vous allez au Palais de la Découverte ou à la Citée des sciences par exemple ?

132 [Nathalie] - Oui on l'a fait ça oui.

133 [**Chercheur**] - D'accord mais est-ce que c'est une démarche systémique ou ?

134 [Nathalie] - C'est que vous voulez dire quand on...

135 [**Chercheur**] - Est-ce que pour vous...

136 [Nathalie] - On va pas à un endroit spécialement pour ou en général...

137 [**Chercheur**] - Enfin bon ça ça pourrait être mais c'est même pas ça...

138 [Nathalie] - Quand on part en vacances, je comprends pas ce que vous voulez me dire.

139 [**Chercheur**] - Oui quand vous partez en vacances et que vous allez dans une ville où y a un centre comme ça , est-ce que c'est tout à fait naturel pour vous d' aller dans ce genre de centre culturel comme vous iriez je sais pas moi, comme quand on va à Paris on va au Louvre et on va voir la Tour Eiffel, est-ce que pour vous c'est naturel d'aller au Palais de la Découverte ?

140 [Nathalie] - Non quand on part en vacances déjà enfin bon on fait pas des vacances touristiques, on essaye de faire du touristico-culturel. Quand on va quelque part on essaye toujours, c'est pour les enfants parce que moi j'ai pas eu cette chance plus tard euh avant et euh ça me manque un peu et depuis toujours, on a fait en sorte que de mélanger de faire du tourisme touristico-culturel.

141 [**Chercheur**] - Hmm d'accord.

142 [Nathalie] - Alors on y va pas exprès mais c'est pour leur ouvrir l'esprit pour leur faire voir autre

chose pour voilà.

143 [**Chercheur**] - Et plus spécifiquement par rapport à l' aspect culture scientifique ?

144 [Nathalie] - Euh...

145 [**Chercheur**] - C'est-à-dire parce que culturel on peut aller bon. Mais est-ce que vous allez facilement dans [...]

146 [Nathalie] - Oui.

147 [**Chercheur**] - D'accord.

148 [Nathalie] - C'est surtout pour les enfants moi de moi-même j'irais pas naturellement mais c'est pour leur ouvrir l'esprit et leur apporter des connaissances.

149 [**Chercheur**] - Par exemple vous vous n'iriez pas dans un musée scientifique de vous-même ?

150 [Nathalie] - Si.

151 [**Chercheur**] - Ah, hahaha, vous m'avez dit le contraire tout à l'heure.

152 [Nathalie] - Non mais...

153 [**Chercheur**] - Hahaha.

154 [Nathalie] - Comment vous dire un musée scientifique ça me comment... les Clévos... je sais pas qu'est-ce qu'on a été voir, faudrait demander aux enfants car moi j'oublie rapidement...

155 [**Chercheur**] - Disons le Palais de la Découverte vous iriez pour vous-même ?

156 [Nathalie] - J'irai pas à Paris pour ça mais...

157 [**Chercheur**] - C'est pas ce que je dis.

158 [Nathalie] - Mais on y est allé euh on a été exprès, enfin quand on était à Paris on avait prévu d'y aller.

159 [**Chercheur**] - Avec les enfants.

160 [Nathalie] - Avec les enfants mais toute seule...

161 [**Chercheur**] - Non mais pour vous voilà ma question c' est ça.

162 [Nathalie] - Ça dépend quoi, ça dépend pour aller voir quoi voilà ou pour aller vivre quoi.

163 [**Chercheur**] - Hmm d'accord et justement par rapport à euh... une offre où on vous invite à manipuler comme là vous avez vécu ça ?

164 [Nathalie] - Ça c'est sympa ouais.
165 [**Chercheur**] - Vous préférez l'invitation à manipuler que quelque chose qui serait plus descriptif ?
166 [Nathalie] - Oui.
167 [**Chercheur**] - D'accord et d'ailleurs un petit mot sur qu'est-ce que vous avez pensé du matériel dans le sens large c'est-à-dire à la fois au niveau convivialité enfin esthétisme éventuellement et puis aussi par rapport au problème comment vous avez perçu, si ça vous a permis de rentrer le problème ou pas ?
168 [Nathalie] - Euh ben j'ai trouvé que c'était très sympa euh les trucs à manipuler les tuiles à manipuler, la planche avec les descriptions un peu sur les côtés, c'était très clair on voyait tout de suite oui non bon on comprenait tout de suite qu'il fallait organiser selon les couleurs, j'ai trouvé ça très sympa euh je... c'est clair c'est qu'au début je me disais qu'est-ce que, bon je comprends tout de suite ce qu'on veut de nous mais pourquoi ? Qu'est-ce qui y a derrière ? C'est ça qui m'a perturbé, pourquoi ? Ça semble tellement simple de de d' organiser ça, qu'est-ce qui y a derrière ? Et c'est la question que je me suis posée tout le long, pourquoi et voir comment on manipule, comment on essaie de résoudre telle couleur telle couleur mais ils sont pas là que pour voir des gamins jouer avec des tuiles donc qu'est-ce qui y a derrière, c'est ça qui me perturbe toujours. J'ai toujours pas compris ce que vous cherchez à comprendre.
169 [**Chercheur**] - Mais euh...
170 [Nathalie] - La résolution de problèmes en équipe tout ça ?
171 [**Chercheur**] - Oui c'est la résolution de problèmes qui y a derrière ça notamment on se posait...
172 [Nathalie] -
173 [**Chercheur**] - Alors non le problème puisque vous nous avez dit j'ai pas réussi à remplir euh.
174 [Nathalie] - Et oui telle couleur telle couleur.
175 [**Chercheur**] - Donc vous n'avez pas résolu le problème

mais vous avez mis en oeuvre des stratégies c'est ça qui nous intéressent. C'est de voir si, avec ce genre, de matériel...

176 [Nathalie] - Des trucs qui sont pas simples.

177 [**Chercheur**] - Oui justement il faut que ce soit assez simple pour que les gens puissent se les approprier. Est-ce que vous êtes, est-ce que vous allez faire des choses qui ressemblent à ce que nous on fait quand on cherche un problème mathématique, c'est-à-dire les professionnels quand je cherche dans mon bureau et ben y a des choses qui sont similaires à ce que vous avez vécu là. Mais, généralement par exemple, vous avez évoqué les Clévos auxquels j'ai participé à la fête de la science généralement c'est pareil on a des jeux où les gens manipulent mais on est là et on est explique et on interagit un peu et là l'idée c'est d'essayer de voir si on peut faire quelque chose sans médiation, alors on aura pas les mêmes ambitions bien entendu au niveau de ce qui va être produit, on peut pas être aussi exigeant quand il y a quelqu'un qui va pouvoir interagir avec la personne, mais qu'au moins on cherche à construire des environnements favorables qui permettent aux gens quand même de rentrer un minimum dans la démarche d'investigation, de recherche et cetera. Et ce que vous avez dit, c'est ok vous n'êtes pas allée jusqu'au résultat, il y en a certains notamment sans doute euh vos enfants ou au moins un des deux qui a obtenu des résultats même partiels qui a obtenu des choses, mais quand même, même dans ce que vous avez dit, il a fallu que je vous l' extirpe, c'est pour ça que c'est difficile de... avec la vidéo on repère des choses et en discutant on en repère d'autres que vous avez mis en place des stratégies de recherche, vous n'avez pas fait n' importe quoi. Il peut arriver...

178 [Nathalie] - Non mais bien sûr.

179 [**Chercheur**] - Quand on met à disposition du matériel dans une salle comme ça ou même des fois dans les classes si on dit rien euh les gamins ou même les

grands ils font des empilements, ils font n'importe quoi, là c'est pas ça qui s'est produit.
180 [Nathalie] - Non mais c'était dessiné sur la planche, c'était dessiné sur le dessin y avait marqué oui et non donc bon.
181 [**Chercheur**] - Oui mais après il faut accepter. Justement nous on peut pas savoir comment ça va être accepté.
182 [Nathalie] - Ahhh.
183 [**Chercheur**] - Et je vais même...
184 [Nathalie] - Mais ça n'a aucun sens de remplir sans regarder les couleurs.
185 [**Chercheur**] - Oui mais par par exemple attendez, quand on l'a mis au début, quand on met les deux carrés côté à côte ça crée un losange avec la bonne couleur ça crée un losange de cette couleur, mais y en a qui ont privilégié le fait de créer ce losange pour faire des choses jolies ou pour faire des fresques, y en a qui ont vu le problème comme ça. Et vous voyez typiquement nous on a le problème en tête et c 'est celui que vous avez décrit des contraintes de positionner deux tuiles si elles ont, elles partagent la couleur ben y a des gens qui ont, ça fait aussi obéir à cette contrainte, mais qui ont vu ont créé des losanges.
186 [Nathalie] - Oui.
187 [**Chercheur**] - Mais du coup ça change la nature du problème, c'est-à-dire on va remplir en créant des losanges et puis après ils veulent faire des bandes, des fresques des trucs comme ça. Donc ils se posent un autre problème qui n'est pas celui euh.
188 [Nathalie] - D'accord.
189 [**Chercheur**] - Donc vous voyez c'est ça qu'on chercher à regarder, c'est pas forcément que la personne qui fait ça est plus bête que celle qui ne l'a pas fait, c'est pas ça d'accord pas du tout parce que c'est pas idiot de se poser cette question... mais c'est justement si nous on veut voir les types de raisonnement est-ce que ça donne ça ou est-ce que du coup les gens vont faire n'importe quoi. C'est ça.

190 [Nathalie] - Mais les gens font... moi ce qui m'a... la plus grande contrainte c'est de respecter les bords mais peut-être qu'on était pas obligé de respecter les bords pour qu'on veut créer quelque chose au centre, c'est ça ?

191 [**Chercheur**] - Alors ce qui se passe c'est là où ça s'est produit ce que je vous ai donné comme exemple, c'était dans le cas qui est sur l'autre mange-debout, je ne dis pas que c'est aujourd'hui hein, et euh où y a... le bord c'est pas tout à fait pareil, peut ne pas avoir de bord d'une certaine manière.

192 [Nathalie] - De toute façon les bords, on est beaucoup plus libre, les bords ça cadre en fait et le cadre ça empêche de sortir du cadre.

193 [**Chercheur**] - Alors que peut-être vous pourrez aller réfléchir justement sur l'autre euh sur les problèmes qui sont sur l'autre mange-debout.

194 [Nathalie] - Ah parce qu'il y en a d'autres, d'accord.

195 [**Chercheur**] - Hahahaha, non ça finit jamais ça hahaha.

196 [Nathalie] - Bon ben ouais je veux bien mais, ouais d'accord.

197 [**Chercheur**] - Bon écoutez est-ce que vous avez des questions euh ?

198 [Nathalie] - Non mais j'aimerais bien comprendre à quoi euh donc c'est juste un support pour vous permettre de voir comment des gens abordent un problème et... les stratégies qui mettent en place pour arriver à résoudre ce problème.

199 [**Chercheur**] - Alors c'est pas...

200 [Nathalie] - C'est juste le support ?

201 [**Chercheur**] - C'est pas tout à fait ça parce que cette question on peut se la poser même dans le cadre d'un enseignement normal euh c'est juste de savoir si c'est possible avec un support sans euh sans intervention humaine...

202 [Nathalie] - Sans consigne.

203 [**Chercheur**] - Avec un minimum de consignes, est-ce que c'est possible que les gens rentrent dans une euh cherchent effectivement, mettent en place des

stratégies pour chercher, trouvent des résultats émettent des conjectures, font comme nous on fait quand on est face à un problème dans notre bureau quoi.

204 [Nathalie] - Ben là dans ce cadre là c'est sympa parce que y a des couleurs, ça parait, c'est pas que ça parait simple c'est ludique donc on a envie, on se dit c'est un défi, ça doit pas être compliqué on se dit j'y vais j'y vais j'y vais et moi au bout d'un moment je me dis bon j'y arrive pas, j'arrête, c'était surtout pour mes enfants mais c'est vrai que ça parait simple et c'est ça qui permet de s'y mettre dedans puis après on est pris par le truc et mince j'aurais dû continuer. C'est l'apparence simplicité je pense qui voilà.

205 **[Chercheur]** - Oui puis y a l'aspect spécifique aussi ...

206 [Nathalie] - Voilà j'allais vous dire les couleurs c'est sympa ça serait truc plus rébarbatif on dirait ouais bon bof mais là c'est sympa puis quatre couleurs bon voilà hahaha.

207 **[Chercheur]** - Bon ben écoutez je pense qu'on va s'arrêter.

3 ENT-EXP-III-3

1 RETRANSCRIPTION Savasse 3 (Myriam et MD 9 min 13)

2

3 **[Chercheur]** - Bonjour euh est-ce que vous pouvez me dire comment vous vous appelez ?

4 [Myriam] - Myriam.

5 **[Chercheur]** - Oui.

6 [Myriam] - Quarante-cinq ans.

7 **[Chercheur]** - Qu'est-ce que vous faites dans la vie Myriam ?

8 [Myriam] - Euh back-office Allemagne ça veut dans une entreprise je fais l'administration des ventes et les réseaux sociaux en allemand.

9 **[Chercheur]** - D'accord, euh j'aimerais pourquoi vous êtes venue ici aujourd'hui, ce matin ?

10 [Myriam] - Ben pour mon fils principalement puisque euh je voulais quand même profiter du week-end de la science et je ramasse les programmes, j'étudie les programmes, donc euh... je pensais que ça irait bien à Solan qui a douze ans et je suis un peu coincée avec lui puisqu'il faut l'accompagner mais du coup j'aime bien aussi les jeux de logique.

11 [**Chercheur**] - Donc c'est pour ça que vous avez choisi cette expérimentation.

12 [Myriam] - Voilà ouais et puis un rayon kilométrique pas trop loin de chez moi voilà.

13 [**Chercheur**] - D'accord et euh, est-ce que vous pensez euh, vous êtes avec, peut-être, des ambitions dans votre esprit ou dans l'esprit de votre enfant, est-ce que vous pensez réellement avoir fait ce pour lequel vous vous êtes inscrite aujourd'hui ?

14 [Myriam] - Oui parce que euh... J'ai pas, j'avais pas d'ambition comme je connaissais pas le domino Wang, c'est ça ? On a juste regardé, Solan a regardé sur Internet il m'a dit de quoi il s'agissait, bon je savais que c'était de logique mais je ne m' attendais pas à plus, je ne me faisais pas un scénario.

15 [**Chercheur**] - D'accord.

16 [Myriam] - J'étais open.

17 [**Chercheur**] - Ok et donc concrètement, qu'est-ce que vous avez fait euh durant ces minutes face à la situation ?

18 [Myriam] - Eh bien j'étais déconcertée parce que il n'y a pas d'objectif et de consigne, on est laissé à soi-même avec des objets, donc euh je sais pas peut-être à tord j'ai cherché une logique dans ces objets et les modèles pré-tracés sur la table de jeux.

19 [**Chercheur**] - D'accord vous avez travaillé sur quelle situation ?

20 [Myriam] - Quelle situation ?

21 [**Chercheur**] - Si je vous demandais de reformuler le problème sur lequel vous avez travaillé ?

22 [Myriam] - Oui.

23 [**Chercheur**] - Qu'est-ce qu'il fallait faire sur ce problème ?

24 [Myriam] - Alors voilà la seule chose qu'on en a compris c'est que on avait à disposition du matériel et une table de jeux et l'objectif c'était de manipuler tout simplement. Personne nous a demandé de suivre la ligne euh de remplir l'une ou l'autre ou remplir complètement, on était laissé à nous-même avec le matériel.

25 [**Chercheur**] - Donc vous avez travaillé sur quelle situation ? Il y avait une table avec trois situations, c'était quelle situation ?

26 [Myriam] - Ben j'ai pensé commencer par la plus simple qui était la une seule ligne.

27 [**Chercheur**] - Ouais d'accord et qu'est-ce que vous avez fait justement sur cette ligne ?

28 [Myriam] - J'ai essayé de faire correspondre les triangles de couleurs comme j'ai pu le lire sur les côtés de la table.

29 [**Chercheur**] - Oui.

30 [Myriam] - J'ai remarqué qu'il y avait des points donc j'ai essayé de faire des suites de points voire d'aligner les points puisque c'est vrai, j'ai discuté avec mon fils aussi ça qui lui avait pas compris ça enfin aurait fait une autre logique, les dames elles auraient fait une autre logique aussi donc moi j'ai essayé de faire suivre faire correspondre les points aussi autant que possible mais c'est pas toujours possible.

31 [**Chercheur**] - Alors du coup vous avez remarqué qui avait des points qui étaient directement mis sur la table.

32 [Myriam] - Voilà ces points là.

33 [**Chercheur**] - Et en fait qu'est-ce qui faut faire avec les dominos ? Quand...

34 [Myriam] - Ben on sait pas ce qui faut faire c'est à nous d'inventer. Moi j'ai essayé de faire correspondre les points comme on a vu qu'il fallait faire correspondre les couleurs.

35 [**Chercheur**] - Donc il faut faire correspondre les

couleurs.

36 [Myriam] - Hmm.

37 [**Chercheur**] - Donc du coup ce que vous avez fait, vous avez fait correspondre les points sur les dominos mais comment vous arrivez à faire correspondre les points sur les côtés nord ?

38 [Myriam] - Eh Ben c'est pas toujours possible, donc on est obligé de faire des suites de couleurs enfin j'ai remarqué que les dominos euh...

39 [**Chercheur**] - Quels sont les résultats que vous avez trouvés ?

40 [Myriam] - D'une telle combinaison de couleurs a le point d'un côté ou de l'autre et donc pour faire suivre les couleurs, il faut arriver à trouver euh ... le domino... chaque triangle sur un domino à deux combinaisons de couleurs possibles, si j'avais eu toutes les pièces donc je choisis la combinaison de couleurs qui me permet de garder le point du même côté.

41 [**Chercheur**] - D'accord donc si par exemple vous vouliez avoir le point qui est toujours en haut, est -ce que vous êtes arrivée à faire quelque chose avec ça ?

42 [Myriam] - Pas complètement.

43 [**Chercheur**] - C'est-à-dire ?

44 [Myriam] - Des suites de maximum cinq.

45 [**Chercheur**] - Et après donc si...

46 [Myriam] - Et après il faut que j'en remette un le rouge je crois qui est à l'envers et qui me permet de remettre le point vers le haut pour les suivants et ça refait une suite de quatre.

47 [**Chercheur**] - Et donc du coup, est-ce que ça marche, est-ce que vous respectez la consigne ?

48 [Myriam] - Non ça marche pas à cent pour cent. Oui mais quelle consigne ? Je fais ce que je veux avec mes points.

49 [**Chercheur**] - Ben la consigne si... si je vous demande , vous dites qu'il faut respecter des conditions sur les couleurs.

50 [Myriam] - J'essaye.

51 [**Chercheur**] - Donc la consigne c'est ce que vous m' avez dit.

52 [Myriam] - Voilà.

53 [**Chercheur**] - Il faut respecter la couleur, donc si vous retournez le domino et que y a pas la couleur noire en haut avec le poinçon blanc vous ne respectez pas la règle du jeu.

54 [Myriam] - Exactement, je peux pas la respecter tout le temps.

55 [**Chercheur**] - Donc si maintenant je reformule la question, si on respecte tout le temps la règle du jeu, est-ce que vous êtes arrivée à recouvrir donc cette bande.

56 [Myriam] - Non.

57 [**Chercheur**] - Non et est-ce que vous savez pourquoi ?

58 [Myriam] - Euh je pense qu'il me manquait des couleurs, des dominos là que je viens de voir qui étaient sur la table d'à côté. Et pourquoi ben parce que euh... y a le bleu orange qui bloque, y a le point dans le mauvais sens. Le orange combine avec une seule couleur en fait.

59 [**Chercheur**] - Et si je vous demande d'essayer de reformuler le problème qu'est-ce que vous avez fait concrètement euh de manière générale, à quoi ça peut servir ce type de bande ? Qu'est-ce que vous pouvez ...

60 [Myriam] - Eh ben la géométrie est dans nos vies je dirai moi j'aime la mosaïque euh, la logique euh...

61 [**Chercheur**] - Est-ce que vous pensez avoir euh...

62 [Myriam] - Je sais pas on peut faire du carrelage qu'est-ce que vous voulez dire ?

63 [**Chercheur**] - Ouais et est-ce que vous pensez avoir fait des maths en faisant ça ?

64 [Myriam] - ... les maths c'est beaucoup de choses, j'étais prof pas de maths mais d'allemand mais on sait très bien enfin y a plus réellement de disciplines carrées comme ça les disciplines sont complémentaires, c'est de la logique, la logique fait partie des maths comme elle fait partie de l' apprentissage d'une langue et puis la logique s'

invente, elle est très personnelle dans les compétences de chacun.

65 **[Chercheur]** - D'accord.

66 [Myriam] - Donc c'est de la logique, est-ce que j' ai fait des maths, j'ai pas spécialement l' impression d'avoir fait des maths sinon.

67 **[Chercheur]** - Et une autre question, est-ce que vous avez l'habitude de venir dans des manifestations scientifiques ou des centres de culture scientifique ? Est-ce que vous êtes confrontée souvent à ce genre...

68 [Myriam] - Pas tout le temps ça dépend des possibilités euh quand mes enfants étaient tout petit on habitait à Paris à un moment donc la Citée des Sciences c'était excellent par exemple.

69 **[Chercheur]** - D'accord.

70 [Myriam] - Mais Hmm mais c'est voilà après on varie les sorties on fait de la balade nature.

71 **[Chercheur]** - Ok.

72 [Myriam] - On fait pas ça tout le temps mais c'est intéressant.

73 **[Chercheur]** - Est-ce que vous avez des remarques sinon sur le matériel, sur le...

74 [Myriam] - Ben je trouve qu'il est très bien fait votre matériel et heu...très pratique je veux dire.

75 **[Chercheur]** - Sur les consignes est-ce que vous avez ...

76 [Myriam] - Sur les consignes, alors celle-là j'ai pas du tout compris, il faut, la consigne elle est assez bien au sens où elle est simple unique y en a qu'une, faire correspondre les triangles de couleurs , c'est pas expliqué avec des mots, je trouve ça bien. C'est intuitif et chacun interprète du coup on est pas obligé non plus de savoir lire la consigne du problème, parce que souvent c'est des blocages.

77 **[Chercheur]** - Ouais.

78 [Myriam] - Je sais que la pratique de la lecture ou la compréhension de la lecture souvent c'est un blocage pour certains. Dès qu'une consigne est visuelle, schématisée c'est très très bien et c'est

```
justement ça que vous voulez exploiter après dans la table de jeux.
[Chercheur] - C'est ça, alors du coup c'est un peu paradoxal...
[Myriam]    - Mais celle-là j'ai pas compris.
[Chercheur] - Ben oui mais c'était par rapport à l' autre.
[Myriam]    - Ah oui on a pas fait la troisième du coup.
[Chercheur] - Oui mais en fait c'est un peu paradoxal ce que vous me dîtes, puisque vous me dîtes que vous avez bien compris le fait qu'il faut bien assembler les couleurs.
[Myriam]    - Ouais.
[Chercheur] - Mais du coup ici là vous respectez pas ...
[Myriam]    - Du coup je suis la règle des points.
[Chercheur] - Oui mais du coup c'est aussi une règle de couleurs, c'est-à-dire qu'ici vous avez un triangle qui est noir et vous l'associez avec un triangle noir avec un poinçon blanc, donc on respecte pas la règle finalement qu'il y a ici.
[Myriam]    - Eh ben moi j'ai respecté la règle des couleurs sauf noir.
[Chercheur] - Ouais.
[Myriam]    - Couleur-couleur.
[Chercheur] - Oui mais c'est toutes les couleurs.
[Myriam]    - Eh ben voilà donc j'ai buté là-dessus.
[Chercheur] - Ok d'accord.
[Myriam]    - Pour moi le noir n'était pas une couleur à assembler.
[Chercheur] - Ok, ça marche ben je vous remercie.
[Myriam]    - Je m'en étais pas rendu compte.
[Chercheur] - Je vous remercie madame.
[Myriam]    - Hahaha.
```

4 ENT-EXP-III-4

```
RETRANSCRIPTION Savasse 4 ( Galtier et MD 5 min 09)
```

3 [**Chercheur**] - Alors comment tu t'appelles ?
4 [Galtier] - Galtier.
5 [**Chercheur**] - Tu as quel âge ?
6 [Galtier] - Dix ans.
7 [**Chercheur**] - Dix ans tu es en quelle classe ?
8 [Galtier] - CM2.
9 [**Chercheur**] - D'accord est-ce que tu pourrais me dire euh pourquoi tu as voulu venir ici ? C'est ta maman qui t'a dit ?
10 [Galtier] - Si c'est ma maman mais aussi j'aime bien les maths, j'aime toutes les matières à l'école.
11 [**Chercheur**] - D'accord ok tu aimes bien les maths et en plus tu aimes toutes les matières à l'école donc tu voulais venir ici. Alors en venant ici tu avais certainement un a priori, c'est-à-dire que tu pensais faire des choses et est-ce que tu penses que finalement tu as fait ces choses là en venant ici ?
12 [Galtier] - Non.
13 [**Chercheur**] - Non.
14 [Galtier] - Je pensais pas que c'était ça.
15 [**Chercheur**] - Tu pensais pas que c'était ça alors c' est-à-dire qu'est-ce que c'était ?
16 [Galtier] - Moi je pensais que c'était par exemple des calculs, des calculs très durs tout ça.
17 [**Chercheur**] - D'accord donc toi tu penses que faire des mathématiques c'est faire des calculs
18 [Galtier] - Hmm.
19 [**Chercheur**] - D'accord et donc est-ce que aujourd'hui tu penses avoir fait des mathématiques ?
20 [Galtier] - Oui... mais...
21 [**Chercheur**] - Oui finalement tu penses avoir fait des maths mais ?
22 [Galtier] - C'était pas les maths que je pensais.
23 [**Chercheur**] - C'était pas les maths que tu pensais alors qu'est-ce que tu as fait aujourd'hui ? Si tu devais m'expliquer, si je ne connaissais pas la situation, si tu devais me décrire ce que tu as fait , qu'est-ce que tu me dirais ?
24 [Galtier] - J'ai fait une sorte de puzzle mais il faut que toutes les couleurs soient quand on

assemble deux pièces les deux couleurs soient pareilles.
25 [**Chercheur**] - Ouais.
26 [Galtier] - Dans un cadre.
27 [**Chercheur**] - Et c'était quoi et c'était quoi donc du coup ça c'était les règles du jeu mais l'objectif ?
28 [Galtier] - L'objectif c'était de mettre des pièces dans tout un rectangle.
29 [**Chercheur**] - D'accord. Il y en avait qu'un de rectangle possible ?
30 [Galtier] - Non il y en avait plusieurs avec une sorte de réglette qu'on pouvait bouger.
31 [**Chercheur**] - D'accord donc tu as bien compris qu'on pouvait bouger la réglette et du coup tu as fait plusieurs rectangles ?
32 [Galtier] - Oui.
33 [**Chercheur**] - Et qu'est-ce que tu as remarqué en déplaçant euh...en regardant sur plusieurs rectangles ?
34 [Galtier] - Que c'était plus dur et moins dur.
35 [**Chercheur**] - Qui avait des choses plus dures et moins dures...
36 [Galtier] - Oui.
37 [**Chercheur**] - Mais alors qu'est-ce que tu appelles moins dur et plus dur ?
38 [Galtier] - Euh par exemple quand il est plus petit ...
39 [**Chercheur**] - Ouais.
40 [Galtier] - C'est un peu plus dur parce qu'on a moins de lignes, donc on voit, on a, ça fait plus rapidement mais...
41 [**Chercheur**] - Alors quand tu dis ça fait plus rapidement...
42 [Galtier] - On le fait.
43 [**Chercheur**] - Est-ce que tu es arrivé à faire un rectangle complet ?
44 [Galtier] - Non.
45 [**Chercheur**] - Complet en réduisant ?
46 [Galtier] - Non parce qu'il n'y avait pas assez de lignes pour mettre bien en face.

47 **[Chercheur]** - Alors c'est-à-dire, est-ce que... c' était quoi le but du problème ?

48 [Galtier] - De fabriquer un rectangle avec des pièces qui sont toujours de la même couleur en face et en face.

49 **[Chercheur]** - D'accord et sur les bords, il fallait qui ait quoi sur les bords ?

50 [Galtier] - Sur les bords il fallait que la couleur soit pareille.

51 **[Chercheur]** - Ouais.

52 [Galtier] - Que la couleur qui est sur les bords.

53 **[Chercheur]** - Ok et est-ce que du coup t'y es arrivé à recouvrir intégralement un rectangle, même un rectangle plus petit ?

54 [Galtier] - Non il me manquait une pièce.

55 **[Chercheur]** - Non il te manquait une pièce à chaque fois ?

56 [Galtier] - Non pas à chaque fois une fois y en avait trois et la dernière j'en ai fait une pièce.

57 **[Chercheur]** - D'accord et du coup est-ce que tu penses que c'est jamais possible ou est-ce que c'est possible ?

58 [Galtier] - Si c'est possible.

59 **[Chercheur]** - Tout le temps c'est possible.

60 [Galtier] - Peut-être pas tout le temps mais je pense que c'est possible.

61 **[Chercheur]** - Tu penses que c'est possible sur ce que tu as fait, tu penses que c'est possible.

62 [Galtier] - Hmm.

63 **[Chercheur]** - Et est-ce que tu as adopté, justement quand ça marchais pas, est-ce que tu as adopté une stratégie ?

64 [Galtier] - Oui j'ai adopté une stratégie, au début j'ai fait comme bon me semble et après j'ai fait ligne par ligne.

65 **[Chercheur]** - D'accord.

66 [Galtier] - Et c'était plus facile mais à un moment quand j'arrivais à la dernière ligne, y a des moment où ça n'allait pas car y avait deux couleurs en face.

67 [**Chercheur**] - D'accord.
68 [Galtier] - Deux mêmes couleurs.
69 [**Chercheur**] - Et donc du coup tu as réagi comment une fois que tu as fait ça ?
70 [Galtier] - Ben quand j'arrivais pas je cherchais un peu une solution qui quand j'en trouvais pas j' enlevais toutes les pièces et je refaisais un autre rectangle plus grand ou plus petit.
71 [**Chercheur**] - D'accord et est-ce que tu penses que euh ... du coup tu m'as un peu répondu mais à la question, mais est-ce que tu penses que celui-là est impossible on y arrive jamais et tu es sûr que c' est impossible ou alors tu penses qu'on peut trouver euh...
72 [Galtier] - On peut trouver une solution.
73 [**Chercheur**] - On peut trouver une solution.
74 [Galtier] - Hmm.
75 [**Chercheur**] - Ouais d'accord.
76 [Galtier] - Mais il faut essayer plusieurs fois.
77 [**Chercheur**] - Il faut essayer plusieurs fois, d'accord donc là t'as pas montré que c'était impossible en fait.
78 [Galtier] - Oui.
79 [**Chercheur**] - Tu penses quand même que ça marche pas mais on peut trouver une solution ?
80 [Galtier] - Oui.
81 [**Chercheur**] - D'accord et euh une dernière question est-ce que tu as des remarques par rapport à cette activité et deuxièmement est-ce que tu penses... est -ce que tu vas souvent dans ce type d'animations ? Est-ce que tu pratiques souvent ce type d'animations , ce type de sortie ?
82 [Galtier] - Oui souvent mais quand il y en a surtout .
83 [**Chercheur**] - D'accord ok et est-ce que tu as des remarques finalement, est-ce que tu as bien compris le problème ?
84 [Galtier] - Oui j'ai bien compris le problème.
85 [**Chercheur**] - D'accord et du coup qu'est-ce que tu en tires de ça ?

86 [Galtier] - Que rien n'est impossible même si on y arrive pas.
87 [Chercheur] - Que rien n'est impossible même si on y arrive pas, c'est-à-dire que même si ça marche pas on peut toujours trouver une solution ?
88 [Galtier] - Oui on peut toujours trouver quelque chose en réessayant.
89 [Chercheur] - En réessayant d'accord.
90 [Galtier] - Oui.
91 [Chercheur] - Bon ben écoute je te remercie Galtier, bonne journée.

5 ENT-EXP-III-5

1 RETRANSCRIPTION Savasse 5 (Alberic et MD 4 min 43)
2
3 [Chercheur] - Donc tout d'abord bonjour est-ce que tu pourrais me dire comment tu t'appelles ?
4 [Alberic] - Alberic.
5 [Chercheur] - Alberic.
6 [Alberic] - Je m'appelle Alberic.
7 [Chercheur] - Tu as quel âge ?
8 [Alberic] - Douze ans.
9 [Chercheur] - Et tu es en quelle classe ?
10 [Alberic] - Cinquième.
11 [Chercheur] - D'accord, est-ce que tu pourrais me dire pourquoi euh tu euh, est-ce que déjà tu avais envie de venir ici ?
12 [Alberic] - Oui.
13 [Chercheur] - Pourquoi tu as choisi de venir ici, est-ce que c'est ta maman, est-ce que c'est toi qui avait envie ?
14 [Alberic] - Oui un peu, j'avais un peu envie de voir ce que c'était parce que on fait pas ça en maths mais ça pourrait m'aider plus tard.
15 [Chercheur] - D'accord alors est-ce que tu sais pourquoi, enfin est-ce que tu pensais en venant ici, est-ce que finalement tu as fait ce que tu pensais ?
16 [Alberic] - Euh... ouais à peu près je pensais un

peu comme les triominos, c'est à peu près ça.
17 [**Chercheur**] - Donc tu pensais faire un jeu comme les triominos ?
18 [Alberic] - Ouais.
19 [**Chercheur**] - D'accord euh maintenant ma question, est-ce que tu pourrais me dire ce que tu as fait concrètement ?
20 [Alberic] - Je voulais mettre les carreaux de même couleur euh pour faire un carré ou un losange à côté mais comme il manque deux sortes de pièces je pense, alors ça marche pas.
21 [**Chercheur**] - Alors tu as travaillé sur quelle situation, est-ce que tu pourrais me décrire la situation ?
22 [Alberic] - Euh ben y avait plusieurs carrés de même couleur et c'est là aussi où ça bloquait là.
23 [**Chercheur**] - Alors est-ce que quand... tu as travaillé sur des rectangles ou des carrés...
24 [Alberic] - Hmm.
25 [**Chercheur**] - Qu'est-ce qui y avait sur la table ?
26 [Alberic] - Plusieurs euh... Y avait les bleus, les jaunes, les verts et les rouges.
27 [**Chercheur**] - D'accord et euh il y avait que ça sur la table à manipuler ?
28 [Alberic] - Si y avait aussi la barre avec les couleurs.
29 [**Chercheur**] - Oui la réglette voilà et euh qu'est-ce que tu as fait avec cette barre ?
30 [Alberic] - Je l'ai bougée plusieurs fois pour trouver le bon emplacement.
31 [**Chercheur**] - Pour trouver le bon emplacement et du coup tu en as trouvé qu'un ?
32 [Alberic] - Oui ben j'ai pas fait, j'ai pas tout fait mais euh...
33 [**Chercheur**] - Donc tu pouvais en faire plusieurs ?
34 [Alberic] - Oui.
35 [**Chercheur**] - Et tu pouvais construire quoi avec cette réglette justement ?
36 [Alberic] - Des rectangles.
37 [**Chercheur**] - Tu faisais des rectangles et donc tu as

travaillé sur quel rectangle ? Est-ce que tu te souviens ?
38 [Alberic] - Non je sais pas le nombre d'espaces euh ...
39 [**Chercheur**] - D'accord donc t'as regardé plusieurs rectangles et est-ce que tu as des rectangles sur lesquels tu es arrivé à faire quelques chose ? C'est -à-dire c'était quoi le but à la fin ?
40 [Alberic] - C'était essayer de faire que tous euh les carrés ou losanges soient de même couleur, que ça fasse ça partout.
41 [**Chercheur**] - D'accord ok et est-ce que t'y es arrivé justement à certains... en déplaçant la réglette euh la petite équerre, est-ce que tu es arrivé à fabriquer un rectangle de manière intégrale ?
42 [Alberic] - Non il manquait deux pièces.
43 [**Chercheur**] - À chaque fois il manquait deux pièces ?
44 [Alberic] - Ben non les euh... la dernière fois que je l'ai fait là j'avais euh cinq pièces je crois ou quatre.
45 [**Chercheur**] - Il manquait cinq pièces ?
46 [Alberic] - Hmm.
47 [**Chercheur**] - D'accord et est-ce que tu penses du coup que c'est impossible à faire ou est-ce qu'on peut trouver une solution ?
48 [Alberic] - On peut trouver une solution mais parce que j'ai pas encore tout fait, j'ai pas fait les tous petits rectangles euh...
49 [**Chercheur**] - Non mais sur ce que tu as fait déjà ?
50 [Alberic] - Non je pense pas parce que sinon il faudrait mettre deux carrés de même couleur et euh je pense pas que ça va marcher.
51 [**Chercheur**] - Et est-ce que tu penses que tu as fait toutes les combinaisons possibles ?
52 [Alberic] - Oui.
53 [**Chercheur**] - Oui.
54 [Alberic] - Je pense oui avec le nombre de pièces.
55 [**Chercheur**] - Donc tu penses qu'il n'y a pas de solution ?
56 [Alberic] - Non.

57 [**Chercheur**] - D'accord, donc tu penses que tu l'as montré ça ?
58 [Alberic] - Oui ben...
59 [**Chercheur**] - Et tu l'as montré comment ?
60 [Alberic] - Ben en ne trouvant pas de pièce euh qui pouvait rentrer là dedans.
61 [**Chercheur**] - Oui mais est-ce que tu as fait tout, tu as tout essayé, donc tu penses que ça marche pas ?
62 [Alberic] - Oui.
63 [**Chercheur**] - D'accord et euh sur des rectangles plus petits tu penses qu'on pourrait trouver euh...
64 [Alberic] - J'ai pas testé mais oui peut-être je pense.
65 [**Chercheur**] - Ouais d'accord ok euh après ma dernière question c'est est-ce que t'as adopté une stratégie qui pourrait te permettre à coup sur de dire que ça ne marche pas ?
66 [Alberic] - J'ai deux... dans le carré qui manque si y a deux mêmes couleurs ça ne marchera pas.
67 [**Chercheur**] - Oui mais si je déplace par exemple d' autres euh si je change de combinaisons, si je change d'emplacement de tuiles et cetera, est-ce que je pourrais trouver quelque chose qui marche ?
68 [Alberic] - Oui peut-être oui.
69 [**Chercheur**] - Peut-être d'accord euh ma dernière question est-ce que finalement tu as des remarques par rapport à ça, est-ce que tu pratiques souvent ce type d'activités ?
70 [Alberic] - Non Non je fais pas beaucoup ça, en mathématiques c'est plutôt les calculs euh tout ça mais...
71 [**Chercheur**] - Et est-ce que tu penses avoir fait des maths finalement ?
72 [Alberic] - Oui un peu.
73 [**Chercheur**] - Qu'est-ce que tu as fait ?
74 [Alberic] - J'ai essayé de combiner des euh des rectangles, je faisais des losanges de même couleur.
75 [**Chercheur**] - Et tu penses que ça c'est une activité mathématique ?
76 [Alberic] - Oui un peu oui.

[Chercheur] - Ok bon ben je te remercie.
[Alberic]   - De rien.

Annexe L

Transcriptions des entretiens audio de l'expérimentation IV

1 ENT-EXP-IV-1

```
TRANSCRIPTION Malataverne 1 (Léna et SG)

[Chercheur] - Alors dis-moi, c'est quoi ton prénom ?
[Lena]      - Léna.
[Chercheur] - Tu as quel âge ?
[Lena]      - Douze ans.
[Chercheur] - Tu es en quelle classe ?
[Lena]      - Cinquième.
[Chercheur] - Ici à Malataverne ou à Montélimar ?
[Lena]      - À Montélimar.
[Chercheur] - Bon, dis-moi, pourquoi tu es venue ici ?
[Lena]      - Euh... je sais pas.
[Chercheur] - C'est-à-dire, quand tu es venue ici, pourquoi, qu'est-ce qui t'as motivé à venir ici ?
C'est ça que je veux dire.
[Lena]      - Je sais pas, ça avait l'air bien du coup .
[Chercheur] - Tu pensais faire quoi, ton apriori avant de venir, tu t'attendais à quoi ?
[Lena]      - Faire des maths.
[Chercheur] - Ok et ça veut dire quoi pour toi faire des maths ?
[Lena]      - Je sais pas des calculs, des formes
```

géométriques...

20 [**Chercheur**] - D'accord, et détends-toi, et tu as l' impression d'avoir fait des maths là alors du coup, quand t'es, ce que tu as fait là ?

21 [**Lena**] - Un peu mais pas beaucoup.

22 [**Chercheur**] - Est-ce que tu peux un peu développer pourquoi ?

23 [**Lena**] - Parce qu'on avait des carrés avec euh... découpés en trian..., en quatre triangles. C'était un peu des maths, mais j'avais pas l'impression de faire beaucoup des maths non plus.

24 [**Chercheur**] - D'accord et tu les identifiais parce que tu avais des carrés découpés en triangles donc c 'est là où tu identifiais les maths dans le problème qui t'a été posé.

25 [**Lena**] - Oui et peut-être parce que euh...après avec maman et **Ambre** on s'est dit que c'était peut-être possible que ça fonctionne qu'on puisse remplir les rectangles de cubes, de carrés que si c'était des multiples de quatre.

26 [**Chercheur**] - Ah tu es allée directement à un résultat , tu es allée un peu vite pour moi. Donc, au début tu m'as dit que tu avais des carrés découpés en triangles mais tu ne m'as pas dit ce que tu faisais avec ces carrés, tu peux...

27 [**Lena**] - On les met dans un grand rectangle et qu 'on essaye d'en faire tenir le plus possible sans qui ait deux couleurs qui se touchent et qui sont pas pareilles.

28 [**Chercheur**] Les couleurs concernant les triangles qui sont colorés dans les petits carrés. OK et donc tu essayes de les mettre, le problème que t'as cherché c'est d'essayer de remplir des rectangles, est-ce que tu as essayé plusieurs tailles de rectangle ?

29 [**Lena**] - Euh oui ! On avait un de douze enfin un de douze carrés, un de trente-deux carrés et un de quinze.

30 [**Chercheur**] - Mais ça c'est ceux qui étaient posés sur la table

31 [**Lena**] - Oui.

32 [**Chercheur**] - Mais est-ce que tu as essayé d'en faire d'autres, d'autres tailles ?
33 [**Lena**] - Euh oui après celui de trente-deux c'est moi qui l'ai fait parce que celui-là il fonctionnait pas parce que celui qui était proposé il était... de trente-six.
34 [**Chercheur**] - D'accord et comment tu as fait pour faire celui de trente-deux ?
35 [**Lena**] - Trente-sept.
36 [**Chercheur**] - Ouais et comment tu as fait pour faire celui de trente-deux ?
37 [**Lena**] - Euh je sais pas j'ai mis les couleurs qui correspondaient, qui pouvaient être à côté.
38 [**Chercheur**] - Tu as vu qu'il y avait une espèce de réglette en L, tu l'as utilisée ?
39 [**Lena**] - Oui.
40 [**Chercheur**] - Et tu l'as utilisée pour faire quoi ?
41 [**Lena**] - Pour caler les couleurs dessus parce que ça commençait avec des couleurs bleues ou vertes.
42 [**Chercheur**] - Mais par rapport à la taille des rectangles, tu l'as pas utilisée cette réglette ?
43 [**Lena**] - Non.
44 [**Chercheur**] - Non c'est pas par rapport à ça.
45 [**Lena**] - Non.
46 [**Chercheur**] - t'as pas bougé, tu l'as pas bougée d' accord, c'est une question qu'on se pose par rapport au matériel c'est pour ça que j'insiste un peu, j' ai insisté un peu là-dessus et du coup tu as...est-ce vous avez réussi, tu m'as dit que tu as réussi le rectangle à trente-deux c'est ça ?
47 [**Lena**] - Oui et douze.
48 [**Chercheur**] - Et douze, d'accord et t'as essayé d' autres tailles, je sais plus la troisième taille que tu as mentionnée.
49 [**Lena**] - C'était quinze.
50 [**Chercheur**] - Quinze, t'y es arrivée ?
51 [**Lena**] - Non.
52 [**Chercheur**] - D'accord et tu as une idée pourquoi tu n 'y es pas arrivée ?
53 [**Lena**] - Après on pense que c'est parce que comme

il y a quatre triangles sur les carrés...
54 [**Chercheur**] - Oui.
55 [**Lena**] - Et que quinze c'est pas un multiple de quatre on peut pas mettre euh... on peut pas faire rentrer tous les carrés dedans sans qu'il y ait deux couleurs qui se touchent.
56 [**Chercheur**] - Hmm d'accord intéressant ce que tu dis, euh ok. Et donc tu penses que c'est pas possible à cause de cette histoire de parité...
57 [**Lena**] - Oui.
58 [**Chercheur**] - Entre le nombre de cases et le fait que t'as quatre...
59 [**Lena**] - Triangles.
60 [**Chercheur**] - Triangles et du coup c'est pour ça qu'à un moment tu m'as dit les rectangles qui sont multiples de quatre, tu as dit comment, tu as dit le terme ?
61 [**Lena**] - Je sais plus.
62 [**Chercheur**] - Tu m'as dit que tu pouvais les partager en quatre ou je sais plus comment t'as dit. Mince alors j'aurais du le reprendre. Alors on pensait que ça marche toujours, c'est ça que tu m'as dit ?
63 [**Lena**] - Oui.
64 [**Chercheur**] - D'accord.
65 [**Lena**] - Que tous les multiples, tous les...
66 [**Chercheur**] - Oui c'est ça, c'est toi qui a dit le mot multiple, tous les multiples de quatre il me semble .
67 [**Lena**] - Oui.
68 [**Chercheur**] - Et alors comment ça pourrait marcher, pourquoi ça pourrait être vrai ça, tu as une idée ?
69 [**Lena**] - Bah je pense que c'est parce que comme les carrés il y a quatre triangles dedans et quatre couleurs différentes, bah c'est sur une base de quatre et il y aurait trois couleurs ça serait sur trois.
70 [**Chercheur**] - Mais donc c'est juste parce que quatre apparaît beaucoup dans ce problème, le chiffre quatre...
71 [**Lena**] - Hmm.

72 [**Chercheur**] - Mais t'aurais pas un moyen de construire une solution par exemple comment t'as construit la solution pour le trente-deux ? Tu me donnes comment tu l'as trouvée la solution ? Est-ce que tu as mis une tuile là une tuile... On appelle des tuiles au fait les petits carrés colorés ça s'appelle des tuiles ok.

73 [**Lena**] - Ah oui, d'accord.

74 [**Chercheur**] - Ok donc tu en as mis une là, une là une là une là, je crois d'ailleurs que c'est marqué quelque part sur la table que ça s'appelle des tuiles, ou t'as fait autrement ?

75 [**Lena**] - Euh.

76 [**Chercheur**] - Tu les as mises au hasard comme ça et puis pouf ça a marché.

77 [**Lena**] - Bah j'ai mis en... pour que ça fonctionnait et que ça coordonnait sur les couleurs.

78 [**Chercheur**] - Oui mais comment tu as commencé par exemple la première tuile tu l'as mise où ?

79 [**Lena**] - Dans l'angle comme ça il y avait deux couleurs, j'étais sûre qui y avait deux couleurs alors que si je la mettais n'importe où il y avait qu'une couleur et j'avais...

80 [**Chercheur**] - Et donc du coup dans l'angle tu pouvais mettre combien de tuiles euh ?

81 [**Lena**] - Euh une.

82 [**Chercheur**] - Il y en avait qu'une qui pouvait aller dans l'angle ?

83 [**Lena**] - Oui je crois.

84 [**Chercheur**] - T'es sûre ?

85 [**Lena**] - Euh...Ahahaha.

86 [**Chercheur**] - À méditer...D'accord en gros tu as commencé dans l'angle et la deuxième tu l'as mise où ?

87 [**Lena**] - À côté.

88 [**Chercheur**] - Alors que t'aurais pu aller dans les autres angles, quatre angles mais t'as choisi de faire comme ça.

89 [**Lena**] - Oui.

90 [**Chercheur**] - Je dis pas que tu te trompes et tout, j'

essaye de comprendre comment tu as cherché, donc à côté, le long d'un côté et après la troisième ?

91 [**Lena**] - je l'ai mise, j'ai fait une ligne comme ça et une ligne vers le haut.

92 [**Chercheur**] - Ah tu as fait un côté comme ça, un L en fait.

93 [**Lena**] - Oui j'ai fait les deux.

94 [**Chercheur**] - Et après tu recommences.

95 [**Lena**] - Oui j'ai recommencé.

96 [**Chercheur**] - Donc tu as cherché à remplir comme ça et tu as réussi avec le trente-deux et tu n'as pas des moments où ça marchait pas et tu as du revenir en arrière.

97 [**Lena**] - Euh ben y a un moment où ça a pas marché parce que j'avais fait le L mais j'avais commencé à remplir ligne par ligne sauf que ça fonctionnait pas parce que... il y avait le motif de couleurs y se répétait un nombre de fois et à un moment, vers la fin, ça fonctionnait plus, et... du coup c'est à partir de là que je me suis rendu compte qu'on pouvait pas faire la dernière colonne...

98 [**Chercheur**] - Ouais.

99 [**Lena**] - Et du coup on pouvait faire que trente-deux cases.

100 [**Chercheur**] - D'accord je suis pas sûr d'avoir compris mais peut-être que en voyant ce que tu as fait en complétant avec la vidéo par rapport à ce que tu as dit peut-être qu'on verra. Dis-moi euh, sinon quand tu es arrivée bon et qu'on a dit qu'on n'était pas là et tout ça, comment t'as, comment t'as trouvé le matériel, est-ce que, comment t'as compris le problème et cetera ?

101 [**Lena**] - Euh pas trop non au début j'ai essayé de mettre les carrés comme ça pouvait, les tuiles comme ça pouvait fonctionner puis après j'ai un peu compris, mais pas trop non plus.

102 [**Chercheur**] - Bah de ce que tu m'as décrit sur le problème je pense que tu as compris le problème, tu as fait des choses aussi mais en fait t'as travaillé avec les gens qui étaient autour enfin c'est ta

famille...
[Lena] - Oui.
[Chercheur] - Qui était autour de toi sur la table vous avez fait des échanges des choses comme ça. Donc tout ça, toute cette activité si c'est pas des mathématiques c'est quoi.
[Lena] - Je sais pas...de la géométrie.
[Chercheur] - Um oui tu peux dire y a un peu de géométrie mais, tu vois par exemple tu as dit, tu as dit dans le coin y a deux couleurs, tu as commencé par le coin en disant j'ai déjà deux contraintes donc je vais la mettre là... donc tu vois ce genre de choses, c'est que t'as un regard sur le problème qui t'est proposé et que tu cherches à le résoudre. Donc là tu travailles, si tu veux c'est une amorce de raisonner les mathématiques. On regarde les objets, on regarde des propriétés sur les objets et on essaye de montrer des choses sur ces objets. Et donc là c'est complètement là dedans, bon tu avais un problème au départ qui était de remplir...Ok, est -ce que tu as des questions, soit par rapport au problème, soit par rapport, je pense que tu rencontres pas tous les quatre matins un thésard et son directeur de thèse donc euh... ce que c'est un chercheur en mathématiques ou je ne sais pas, tu as des questions de cette nature ?
[Lena] - Non par forcément.
[Chercheur] - Non t'as peur, ahah dit-lui que je te laisse tranquille ahahah. Bon en tout cas merci bien et euh.

2 ENT-EXP-IV-2

TRANSCRIPTION Malataverne 2 (Lucas et SG 9 min 44)

[Chercheur] - Donc au début juste pour savoir on va faire ta carte d'identité en quelque sorte c'est quoi ton prénom?
[Lucas] - Je m'appelle Lucas.
[Chercheur] - Tu es en quelle classe ?

6 **[Lucas]** - Je suis en seconde.
7 **[Chercheur]** - Tu es en seconde, t'as quoi t'as quinze ans quatorze.
8 **[Lucas]** - Yes quinze.
9 **[Chercheur]** - T'es anglophone en plus à ce que je vois .
10 **[Lucas]** -
11 **[Chercheur]** - Je vais rapprocher car je sais pas si on entend. Euh alors d'abord dis-moi pourquoi tu es venu ici ?
12 **[Lucas]** - Je suis venu ici parce que mon frère m'a parlé de faire un truc à la bibliothèque.
13 **[Chercheur]** - Qui ton frère euh...
14 **[Lucas]** - Avec qui on a fait l'activité, il m'a proposé de venir et je me suis dit pourquoi pas.
15 **[Chercheur]** - D'accord donc euh... T'es venu avec ta soeur c'est elle qui avait repéré...
16 **[Lucas]** - Non mon frère.
17 **[Chercheur]** - Ton frère qui est pas là ?
18 **[Lucas]** - Si il est là
19 **[Chercheur]** - Ah qui est là, d'accord c'est ton frère qui est là. Ok bon on va y arriver. Ok d'accord et il avait vu ça sur une annonce.
20 **[Lucas]** - Ouais en fait ils lui ont parlé à l' école et y s'est dit que ça pourrait être cool et il m'a proposé de venir. Du coup je me suis dit pourquoi pas.
21 **[Chercheur]** - Et tu t'y attendais à quoi en fait.
22 **[Lucas]** - Bah de base en fait il m'a dit c'est un truc de sciences, du coup de je m'attendais à un truc du style plus physique ou SVT je pensais pas vraiment à des maths.
23 **[Chercheur]** - D'accord et du coup bon, t'as un peu répondu à ma deuxième question qui était, est-ce tu as vécu quelque chose qui répond aux attentes que tu avais en venant ?
24 **[Lucas]** - Ben au début non... Ben ouais.
25 **[Chercheur]** - Non pourquoi ? Au fait que c'était pas vraiment des maths que tu attendais ?
26 **[Lucas]** - Ouais parce que je m'attendais pas à des

maths en fait, moi il m'a dit vraiment c'est de la science.

27 [Chercheur] - Bon les maths c'est une science

28 [Lucas] - Ouais les maths c'est une science mais pour moi science c'est genre euh... je sais pas ça aurait pu être de la SVT, de la physique ou...

29 [Chercheur] - D'accord

30 [Lucas] - Ouais mais je suis pas trop déçu en fait des maths quand même.

31 [Chercheur] - Alors toi tu peux développer.

32 [Lucas] - Ben je sais pas j'aime bien aussi les maths du coup ça me dérange pas trop.

33 [Chercheur] - D'accord, euh hmm...alors sur quel problème tu as travaillé là ...

34 [Lucas] - Ben...

35 [Chercheur] - T'as réfléchi.

36 [Lucas] - Plus sur des types de... Ah comment ça s 'appelle... je sais plus comment ça s'appelle.

37 [Chercheur] - Ah ben je peux pas te le dire parce que c'est ahahahah...Je peux pas dire ce que je crois que t'as envie de dire.

38 [Lucas] - Ouais mais je sais plus comment ça s' appelle c'est comme des bandes de...

39 [Chercheur] - Des bandes.

40 [Lucas] - De... pas des schémas, des suites de formes, de couleurs ou de...

41 [Chercheur] - D'accord.

42 [Lucas] - Pour essayer de faire des... je sais plus comment ça s'appelle.

43 [Chercheur] - Tu as travaillé sur ça

44 [Lucas] - Ouais.

45 [Chercheur] - Le problème c'était ça ?

46 [Lucas] - Ouais pour moi en fait y avait des petits carrés et il fallait essayer de faire des suites de... d'images qui se suivent.

47 [Chercheur] - Ouais mais pourquoi ?

48 [Lucas] - Je sais pas ça paraissait assez, fin moi c'est ce que je me suis dit dans ma tête, dans ma tête y avait des trucs et j'ai essayé de faire des suites en fait avec les carreaux...

49 [Chercheur] - C'est marrant parce que pour décrire le problème, tu me décris le résultat...
50 [Lucas] - Ben oui.
51 [Chercheur] - De ce que tu veux obtenir. Tu me dis pas quel est le...
52 [Lucas] - Ouais mais j'arrive pas à me rappeler comment ça s'appelle.
53 [Chercheur] - Ah non non non c'est pas par rapport au nom du...
54 [Lucas] - Ah.
55 [Chercheur] - T'es en train de me dire y avait des tuiles et je voulais obtenir des... comment t'a dit ?
56 [Lucas] - Des sortes de schémas
57 [Chercheur] - Des schémas machins mais euh... donc le problème de départ c'est juste...
58 [Lucas] - Une frise.
59 [Chercheur] - Des frises voilà voilà, d'accord.
60 [Lucas] - Je cherchais
61 [Chercheur] - Euh... mais le problème c'est ça, on, le problème tel que tu l'as compris là c'est euh... j'ai des tuiles il faut que je construise des frises ?
62 [Lucas] - Ben je me suis dit que y a les carreaux et tout et que vu que c'est... je me suis dit les tuiles elles ont après y a plusieurs sortes enfin des frises avec les petites tuiles et j'ai commencé à poser et je me suis rendu compte que ça commençait à faire une suite avec les carreaux et j'ai continué et à la fin ben je...oui ça va faire une frise.
63 [Chercheur] - Oui mais c'est le résultat que tu as obtenu qui est une frise.
64 [Lucas] - Ouais.
65 [Chercheur] - Mais le problème initial c'était de faire une frise c'est ça ?
66 [Lucas] - Ben pour moi oui.
67 [Chercheur] - D'accord tu as traduit le problème comme étant faire une frise.
68 [Lucas] - Hmm.
69 [Chercheur] - D'accord... ok... et alors t'as réussi à

faire des frises ?
70 [**Lucas**] - Ouais sur deux des trois qui étaient, la troisième on n'a pas réussi.
71 [**Chercheur**] - Alors deux des trois tu peux me dire lesquelles ?
72 [**Lucas**] - Ben sur celle avec les... les carreaux où il y avait pas de point où y avait juste les triangles blancs en haut et les triangles bord nord pour s'aider.
73 [**Chercheur**] - Ouais c'est celui de deux lignes.
74 [**Lucas**] - Euh... oui deux lignes et ce... le grand rectangle.
75 [**Chercheur**] - Y avait un rectangle ?
76 [**Lucas**] - Le quadrillage en fait, les tous petits points en haut.
77 [**Chercheur**] - Ah oui mais c'était un rectangle ça ?
78 [**Lucas**] - Bah ça ressemblait à la fin ça me donnait un rectangle.
79 [**Chercheur**] - D'accord.
80 [**Lucas**] - Ouais un rectangle ouais ça avait la forme d'un rectangle.
81 [**Chercheur**] - D'accord, donc sur ces deux là tu as réussi à faire des frises, tu peux me dire, essayer de me décrire qu'est-ce que c'est que la frise ?
82 [**Lucas**] - Ben sur celle où y a les deux différentes...
83 [**Chercheur**] - Oui on va faire avec celle qui avait les deux lignes.
84 [**Lucas**] - Celle avec les deux lignes du coup ça donnait... un carreau blanc, un carreau bleu, un carreau noir et une bande orange.
85 [**Chercheur**] - Ouais.
86 [**Lucas**] - Et tout ça à l'affiler cinq ou six fois.
87 [**Chercheur**] - Mais ça ça fait qu'une seule ligne, comment tu fais la deuxième ligne ?
88 [**Lucas**] - Oui mais sur les deux lignes, genre avec les deux lignes ça donnait euh...
89 [**Chercheur**] - À un moment le orange il est en bas à un moment il est en haut, c'est ça que t'es en train de dire ?

90 [Lucas] - Ouais, ça fait en gros ça donnait un rectangle bleu, un rectangle blanc et un rectangle noir et après à côté y avait euh une ligne orange et après ça se répétait.
91 [Chercheur] - Hmm d'accord. Et j'ai vu sur le truc que tu dis le rectangle que t'as fait des motifs effectivement on voit un truc et tu sais qu'est-ce que ça veut dire quand justement dans les frises quand le truc qui se répète, tu tu tu connais un peu les termes un peu ?
92 [Lucas] - Non pas trop.
93 [Chercheur] - J'ai dit motif, périodique tout ça ça te dit quelque chose ou pas ?
94 [Lucas] - Non.
95 [Chercheur] - Non d'accord. Euh... et euh dans la troisième situation t'as regardé ?
96 [Lucas] - Ouais on a essayé mais on n'a pas réussi à la... à la faire.
97 [Chercheur] - Ah tu n'as pas réussi à la faire et tu penses que c'est possible ?
98 [Lucas] - Non je pense pas.
99 [Chercheur] - Alors pourquoi ça serait pas possible, qu'est-ce qui ferait en sorte que ça ne puisse pas être possible ?
100 [Lucas] - Les couleurs des carreaux.
101 [Chercheur] - Ouais mais plus précisément.
102 [Lucas] - Parce que du coup y a le point, y a un point blanc en haut enfin les noirs avec un point blanc en haut après y a deux couleurs sur les côtés et en dessus le dernier triangle il est juste noir.
103 [Chercheur] - Ok.
104 [Lucas] - Et du coup ben à force de les aligner ben on se rend compte qu'au bout d'un moment ben ça marche pas si on veut aligner point blanc point blanc, les couleurs et les deux derniers noirs, et sans de les faire suivre en fait sans faire un carré blanc, un carré avec un point blanc en haut ensuite à côté on essaye de faire euh... un carré avec une certaine couleur à côté à nouveau un carré avec une certain couleur et en dessus de nouveau un carré

blanc.

105 [**Chercheur**] - Ouais disons que dans... oui mais est-ce que t'es sûr, est-ce que tu penses que moi j'y arriverai ?
106 [**Lucas**] - Je sais pas, je sais pas c'est...
107 [**Chercheur**] - Tu vois si je t'ai demandé est-ce que j'ai... le statut justement c'est ça qui est important, savoir si c'est possible ou impossible si c'est impossible même moi j'y arriverai pas.
108 [**Lucas**] - Hmm ben oui.
109 [**Chercheur**] Et... par contre et il faut dire pourquoi ? Là ce que tu m'as dit c'est justement que quand t'as essayé t'y es pas arrivé quoi.
110 [**Lucas**] - Ouais c'est ça.
111 [**Chercheur**] Mais ça est-ce que c'est suffisant pour mettre un billet sur la table que je n'y arrive pas, fais attention.
112 [**Lucas**] - Ouais.
113 [**Chercheur**] D'accord bon ok et t'as l'impression du coup d'avoir fait des maths dans toutes ces...en ayant fait tout ça ?
114 [**Lucas**] - Ben ouais parce que dans sa tête faut quand même essayer de faire des calculs se dire si lui là je le pose là, celui-là je le pose là et celui-là je le pose là ça...
115 [**Chercheur**] Ça t'appelle ça des calculs.
116 [**Lucas**] - À peu près ouais c'est un peu du calcul mental.
117 [**Chercheur**] Si tu, si tu fais pas de calculs est-ce que tu fais des mathématiques ?
118 [**Lucas**] - Ben...
119 [**Chercheur**] Est-ce que tu peux faire des mathématiques sans calcul ? C'est plutôt ça ma question.
120 [**Lucas**] - Ah oui je pense.
121 [**Chercheur**] Parce que bon ce que tu as dit moi j'appelle pas ça faire du calcul mais par contre faire ce qu'on appelle une analyse par cas.

122 **[Lucas]** - Ouais.

123 **[Chercheur]** Tu vois si alors je fais ça, d'accord tu vois tu fais tu fais dans ce cas là je fais ça, ça ... D'accord, ok. Et euh... Sinon donc tu m'as expliqué quand t'es rentré tu t'attendais à faire de la physique-chimie sur, qu'est-ce que c'est que ce bazar, mais sinon quand tu as découvert le matériel et tout comment euh... qu'est-ce que t'en penses de ce matériel ?

124 **[Lucas]** - Ben c'est pareil euh je m'attendais pas à trouver ça, parce que du coup euh... je m' attendais à un truc plus euh... je sais pas pour moi quand je suis rentré et qu'on m'a dit maths, du coup je m'attendais un truc avec des calculs ou des ...

125 **[Chercheur]** Hmm hmm.

126 **[Lucas]** - Ou essayer de faire calculs ou des hypothèses certaines choses comme ça.

127 **[Chercheur]** Oui mais là je te parle pas de ton ressenti je te parle de ton appréciation sur le matériel, est-ce que tu penses que ça t'as permis de rentrer dans le problème, qu'est-ce que tu aurais vu qui pouvait changer qui améliorerait à ton sens.

128 **[Lucas]** - Ben oui.

129 **[Chercheur]** Plus par rapport à ça parce qu'après j'ai compris que tu t'attendais pas à faire des maths alors que ce qui m'intéresse dans la dernière phrase que t'as dite, c'est faire des hypothèses, tu en as fait des hypothèses quand même aussi.

130 **[Lucas]** - J'en ai fait quelques-unes.

131 **[Chercheur]** Mais effectivement tu n'as pas vraiment fait du calcul.

132 **[Lucas]** - Non.

133 **[Chercheur]** Donc revenons à la dernière question, le le le matériel donc comment tu l'as appréhendé, est-ce que c'était pratique, est-ce que c'était clair ?

134 **[Lucas]** - Ben c'était assez pratique, ça aide plus à faire certaines choses.

135 **[Chercheur]** Hmm hmm.

136 **[Lucas]** - Par exemple ça aurait été, je sais pas,

je trouve c'est... pour ce qu'on doit faire le matériel c'est pratique en fait.
137 [**Chercheur**] D'accord ça t'as pas gêné pour faire un certain nombre de choses.
138 [**Lucas**] - Non il ne m'a pas vraiment gêné le matériel.
139 [**Chercheur**] D'accord.
140 [**Lucas**] - Je trouve enfin.
141 [**Chercheur**] Ok, ça a pas été trop laborieux pour faire des gros trucs.
142 [**Lucas**] - Non.
143 [**Chercheur**] Ben écoute merci bien on va s'arrêter là.

3 ENT-EXP-IV-3

1 TRANSCRIPTION Malataverne 3 (**Ambre** et MD 3min51)
2
3 [**Chercheur**] - Allez à nous, alors bonjour, comment tu t'appelles ?
4 [**Ambre**] - **Ambre**.
5 [**Chercheur**] - **Ambre**, tu as quel âge **Ambre** ?
6 [**Ambre**] - Dix ans.
7 [**Chercheur**] - Dix ans, tu rentres en quelle classe ?
8 [**Ambre**] - CM2.
9 [**Chercheur**] - CM2, alors dis-moi pourquoi tu es venue à la fête de la science aujourd'hui ?
10 [**Ambre**] - Parce que j'aime bien les maths.
11 [**Chercheur**] - Parce que tu aimes bien les mathématiques et est-ce que tu penses que, t'avais une vision, tu pensais peut-être à quelque chose de particulier en venant euh... à cette fête de la science, est-ce que tu penses avoir fait ce que tu voulais faire aujourd'hui ?
12 [**Ambre**] - J'ai pas fait ce qu'on pensait mais c' est très bien.
13 [**Chercheur**] - Alors tu pensais, tu pensais faire quoi ?
14 [**Ambre**] - Faire des trucs un peu, un peu comme à l 'école.
15 [**Chercheur**] - Faire des trucs un peu comme à l'école ?

16 [**Ambre**] - Enfin on fait des jeux mais sur une fiche.
17 [**Chercheur**] - Ouais alors que là tu manipules des choses.
18 [**Ambre**] - Oui.
19 [**Chercheur**] - Et donc t'as aimé ?
20 [**Ambre**] - Oui.
21 [**Chercheur**] - D'accord et est-ce que tu pourrais me dire un peu plus précisément finalement qu'est-ce que tu as fait ? Sur quel euh... Si tu devais me formuler l'activité que tu as faite, qu'est-ce que tu as fait ?
22 [**Ambre**] - Fallait...
23 [**Chercheur**] - Avec tes mots de façon simple.
24 [**Ambre**] - Fallait remplir des cases avec des carrés.
25 [**Chercheur**] - Des carrés, donc fallait remplir des cases avec des carrés.
26 [**Ambre**] - Il faut que les bonnes couleurs se touchent.
27 [**Chercheur**] - D'accord super ! Et du coup qu'est-ce que tu as obtenu comme résultat ? Tu as travaillé sur lequel ?
28 [**Ambre**] - Moi j'ai pas réussi.
29 [**Chercheur**] - T'as pas réussi, tu as travaillé sur quelle forme géométrique ?
30 [**Ambre**] - Celui où il y en avait quinze.
31 [**Chercheur**] - Celui où il y avait quinze, c'est-à-dire ?
32 [**Ambre**] - Quinze carrés.
33 [**Chercheur**] - C'est-à-dire où il y avait trois de côté de large et cinq de long ?
34 [**Ambre**] - Oui.
35 [**Chercheur**] - Ok donc il y avait quinze petits carrés au total à remplir, et donc ça marchait pas celui-là ?
36 [**Ambre**] - Oui.
37 [**Chercheur**] - Et est-ce que tu as une idée sur pourquoi ça ne marche pas ?
38 [**Ambre**] - Parce que c'était impair.

39 [**Chercheur**] - Alors qu'est-ce qui était impair ?
40 [**Ambre**] - Le nombre de carrés.
41 [**Chercheur**] - Le nombre de carrés était impair, donc l 'aire du carré, la surface du carré était impaire et donc ça marchait pas ?
42 [**Ambre**] - Oui.
43 [**Chercheur**] - Et elle...
44 [**Ambre**] - J'ai réussi à remplir que jusqu'à douze, maman elle a réussi elle en a rempli douze.
45 [**Chercheur**] - Donc tu as fait le trois fois quatre ?
46 [**Ambre**] - Douze.
47 [**Chercheur**] - Donc c'est-à-dire de largeur trois...
48 [**Ambre**] - Maman elle avait deux côtés de...enfin elle avait deux lignes enfin deux comme ça et six comme ça
49 [**Chercheur**] - Ouais.
50 [**Ambre**] - Et euh... Du coup elle elle a réussi à tout remplir et moi j'ai réussi à en remplir que douze.
51 [**Chercheur**] - D'accord.
52 [**Ambre**] - Quatre d'un coté et trois de l'autre.
53 [**Chercheur**] - Quatre d'un coté et trois de l'autre, trois plutôt et quatre en long.
54 [**Ambre**] - Euh.
55 [**Chercheur**] - Oui c'était trois et quatre, du coup les couleurs sur les bords elles étaient comment ?
56 [**Ambre**] - Bah il fallait que je...
57 [**Chercheur**] - Elles étaient toutes différentes ?
58 [**Ambre**] - À la fin y avait un bord bleu.
59 [**Chercheur**] - Ouais.
60 [**Ambre**] - Il fallait que je mette...
61 [**Chercheur**] - Oui mais est-ce que les contours de ton rectangle c'était quatre couleurs différentes ?
62 [**Ambre**] - Euh oui.
63 [**Chercheur**] - Est-ce que t'avais par exemple rouge jaune vert bleu ?
64 [**Ambre**] - Oui c'était différent.
65 [**Chercheur**] - Ok d'accord, donc...
66 [**Ambre**] - À un moment j'ai réussi à en remplir

douze mais ça faisait du bleu et du bleu mais y avait pas de carte avec deux fois la même couleur.
67 [Chercheur] - D'accord mais est-ce que tu penses que c'est possible de trouver une solution ?
68 [Ambre] - Oui
69 [Chercheur] - Oui...tu penses que ça marche tout le temps mais qui faut chercher ?
70 [Ambre] - enfin...
71 [Chercheur] - Non, donc c'est quoi ton hypothèse générale par exemple avec le rectangle qui a des côtés impairs...tu m'as dit quand l'aire est impaire ...
72 [Ambre] - On peut pas réussir, mais après si on touche le truc comme ça en équerre, on peut peut-être réussir.
73 [Chercheur] - Ouais, alors du coup t'as pas modifié t'as pas touché la règle.
74 [Ambre] - Non.
75 [Chercheur] - Ouais, bah essaye de voir ce que ça fait quand tu touches la règle
76 [Ambre] - Ok.
77 [Chercheur] - Pour voir ce que tu peux avoir comme résultat après. Et sinon est-ce que tu as des remarques, t'as bien compris le jeu.
78 [Ambre] - Euh non.
79 [Chercheur] - Ok bon ben super merci **Ambre**.

4 ENT-EXP-IV-4

1 TRANSCRIPTION Malataverne 4 (**Nathan** et MD 8 min 22)
2
3 [Chercheur] - Alors euh déjà bonjour.
4 [Nathan] - Bonjour.
5 [Chercheur] - Comment tu t'appelles ?
6 [Nathan] - **Nathan**.
7 [Chercheur] - Tu t'appelles **Nathan** alors n'hésite pas à parler fort puisque là j'enregistre. Tu as quel âge **Nathan** ?
8 [Nathan] - Dix ans.
9 [Chercheur] - Tu es en quelle classe ?

10 [**Nathan**] - CM2.
11 [**Chercheur**] - CM2 d'accord alors est-ce que tu pourrais me dire pourquoi tu t'es inscrit euh fin pourquoi tu avais envie de venir à la fête de la science.
12 [**Nathan**] - Parce que ça a l'air intéressant.
13 [**Chercheur**] - Ça a l'air intéressant et parce que, juste parce que c'est intéressant ou parce que tu aime aussi...
14 [**Nathan**] - Parce que j'aime bien les sciences.
15 [**Chercheur**] - Et les mathématiques est-ce que tu aimes ?
16 [**Nathan**] - Ben oui.
17 [**Chercheur**] - Oui tu aimes les mathématiques. Et tu avais certainement une vision des choses c'est-à-dire avant de venir ici tu pensais faire des choses et est-ce que tu penses finalement que tu as fait ces choses là en venant ici ?
18 [**Nathan**] - De ce que je pensais faire...
19 [**Chercheur**] - Oui.
20 [**Nathan**] - Non je pensais pas à ça.
21 [**Chercheur**] - Tu pensais faire quoi...
22 [**Nathan**] - Euh.
23 [**Chercheur**] - Comme mathématiques.
24 [**Nathan**] - Je pensais plus des trucs de sciences euh... par exemple des expériences euh.
25 [**Chercheur**] - Des expériences comment physique, manipuler du liquide euh.
26 [**Nathan**] - Oui par exemple.
27 [**Chercheur**] - D'accord mais en mathématiques est-ce que tu penses par exemple est-ce que tu penses avoir fait des maths là ?
28 [**Nathan**] - Ben un peu oui.
29 [**Chercheur**] - Oui alors c'est-à-dire, qu'est ce que tu as fait ? Si je te demandais de me décrire l' activité que tu as faite, est-ce que tu pourrais m' expliquer ce que tu as fait ?
30 [**Nathan**] - Euh... La logique
31 [**Chercheur**] - Alors de la logique, mais alors est-ce que tu peux me raconter ce que tu as fait, sur

quelle activité tu as travaillé ?
32 [Nathan] - Euh celle là-bas.
33 [Chercheur] - Oui mais essaye de me la décrire avec tes mots.
34 [Nathan] - Euh... Euh...
35 [Chercheur] - Si je te demandais d'essayer de me formuler.
36 [Nathan] - Classer des couleurs par couleurs sans hmm...comment dire... sans qu'il y ait euh...des couleurs inverses.
37 [Chercheur] - Quand tu parles de couleurs inverses, c'est sans qu'il y ait des couleurs différentes.
38 [Nathan] - Oui.
39 [Chercheur] - Donc c'est mettre des couleurs côté à côte et il faut qu'il y ait la même couleur à chaque fois et t'as travaillé sur quoi, sur quel, est-ce que tu as travaillé sur quelle forme géométrique.
40 [Nathan] - On peut dire des triangles, des carrés.
41 [Chercheur] - Alors triangles ou carrés ça c'était des tuiles mais après t'as vu après il y avait soit une grande...
42 [Nathan] - Ah des plateformes, des...
43 [Chercheur] - Ce n'est pas, c'est une grande plateforme mais après c'est des bandes et tu as travaillé sur quelle bande, la petite bande, la bande moyenne.
44 [Nathan] - J'ai fait la bande moyenne et la petite.
45 [Chercheur] - Ok, alors sur la petite est-ce que tu as obtenu des résultats.
46 [Nathan] - Non.
47 [Chercheur] - Alors tu n'as pas obtenu de résultat c'est-à-dire.
48 [Nathan] - On n'a pas trouvé comment faire.
49 [Chercheur] - Alors est-ce que tu penses que le fait de pas trouver comment faire c'est pas un résultat ça, si tu avais trouvé est-ce que ça aurait été un résultat ?
50 [Nathan] - Oui.
51 [Chercheur] - Et le fait de pas trouver, le fait de dire que c'est peut-être impossible est-ce que pour

toi c'est un résultat.
52 [Nathan] - Oui aussi.
53 [Chercheur] - Ah donc finalement t'as trouvé quelque chose.
54 [Nathan] - À peu près.
55 [Chercheur] - À peu près, c'est-à-dire ?
56 [Nathan] - Ben on a trouvé quelque chose mais pas exactement.
57 [Chercheur] - Alors c'est-à-dire qu'est-ce que tu as trouvé.
58 [Nathan] - Que c'était impossible.
59 [Chercheur] - Alors est-ce que tu es sûr que c'était impossible ?
60 [Nathan] - Euh oui.
61 [Chercheur] - Alors pourquoi tu es sûr que c'est impossible ?
62 [Nathan] - Parce qu'on a essayé, parce que on a tout essayé.
63 [Chercheur] - Alors tu as tout essayé mais est-ce que tu es sûr que tu as tout essayé ?
64 [Nathan] - Oui.
65 [Chercheur] - C'est-à-dire t'as vraiment mis toutes les tuiles, toutes les possibilités d'assemblage et t'as montré...
66 [Nathan] - Hmmm.
67 [Chercheur] - Quelle que soit la possibilité d' assemblage, on pourra jamais trouver, on pourra jamais recouvrir toute la bande... C'est ça.
68 [Nathan] - Si je pense que si on fait des couleurs inverses euh.
69 [Chercheur] - Oui si on met des couleurs différentes oui effectivement c'est peut-être possible.
70 [Nathan] - Oui mais non pas comme ça mais par exemple là y a un triangle où y a le point et en bas où c'est tout noir mais par exemple si on met où c' est tout noir là où y a le point ça peut marcher.
71 [Chercheur] - Oui effectivement ça c'est effectivement un autre résultat donc t'es allé plus loin que le problème qu'on t'a proposé là ça peut marcher mais dans le cas où on respecte bien euh le point en haut

et le ...
72 [**Nathan**] - On n'a pas trouvé.
73 [**Chercheur**] - Donc vous avez pas trouvé, donc tu penses que c'est un résultat ou un résultat partiel le fait de pas trouver.
74 [**Nathan**] - Partiel.
75 [**Chercheur**] - Et tu penses que y a une solution ?
76 [**Nathan**] - Euh non.
77 [**Chercheur**] - Non, tu penses qu'il n'y a pas de solution et t'es sûr que tu as essayé toutes les combinaisons.
78 [**Nathan**] - Ouais.
79 [**Chercheur**] - Donc ça pour toi c'est un résultat partiel d'accord. Alors que si tu avais trouvé quelque chose, c'est un résultat, c'est un résultat.
80 [**Nathan**] - Oui.
81 [**Chercheur**] - D'accord, euh alors moi je te le dis ce que tu as fait tu as trouvé un résultat et ce n'est pas un résultat partiel, t'as montré que ça ne marchait pas c'est impossible donc l'impossibilité existe aussi et le fait de ne pas avoir de solution et ben c'est un résultat.
82 [**Nathan**] - Hmm.
83 [**Chercheur**] - Et pour la bande du coup de taille deux ... de taille deux c'est-à-dire de largeur deux.
84 [**Nathan**] - Non audible
85 [**Chercheur**] - Alors déjà est-ce que tu as essayé de trouver une petite condition qui permet de recouvrir la bande quand elle est de largeur un, sur les couleurs qu'est-ce qu'il faut à chaque fois.
86 [**Nathan**] - La petite.
87 [**Chercheur**] - Oui
88 [**Nathan**] - La toute petite... Ben je me suis dit que par exemple si on retournait à chaque fois les, les petits carrés eh ben on pouvait obtenir quelque chose Hmm.
89 [**Chercheur**] - Oui mais si par exemple je te dis, je te donne des tuiles.
90 [**Nathan**] - Oui
91 [**Chercheur**] - Comme ça est-ce que tu as essayé de

trouver une condition sur les couleurs qui permet de ... que ça marche tout le temps.

92 [**Nathan**] - Non.

93 [**Chercheur**] - Non tu sais pas, ok. Euh la deuxième question alors sur la bande de largeur deux avec deux...

94 [**Nathan**] - Oui

95 [**Chercheur**] - Alors qu'est-ce que tu as fait ?

96 [**Nathan**] - Eh ben on avait pris toutes les couleurs on a essayé de les mettre côté à côté triangle euh ... carré par carré.

97 [**Chercheur**] - Alors tu as un fait un empilement en fait. Tu as empilé dans, sur la largeur, sur la hauteur pardon et après tu, une fois tu as fait tous les empilements.

98 [**Nathan**] - J'ai classé avec ma mère et mon grand frère.

99 [**Chercheur**] - Ouais les empilements et est-ce que tu y es arrivé du coup ?

100 [**Nathan**] - Oui on a réussi.

101 [**Chercheur**] - Oui et donc du coup c'est un résultat ça .

102 [**Nathan**] - Ouais.

103 [**Chercheur**] - Et comment tu as fait pour réussir ?

104 [**Nathan**] - Ben on a classé couleur par couleur en faisant en sorte que toutes les couleurs se touchent .

105 [**Chercheur**] - Alors tu les as classés comment en prenant les hauteurs ?

106 [**Nathan**] - Euh.

107 [**Chercheur**] - C'est-à-dire en prenant la largeur tu les as classés deux par deux ? C'est-à-dire ici tu as deux carrés... verticalement ou alors tu les as classés comme ça...

108 [**Nathan**] - On a fait.

109 [**Chercheur**] - Donc d'accord, d'abord tu as fait un premier motif vertical.

110 [**Nathan**] - Oui.

111 [**Chercheur**] - Un empilement c'est ce qu'on appelle un

empilement, ensuite qu'est-ce que tu as fait tu as remis un empilement à côté et t'as vérifié que les couleurs coïncidaient.
112 **[Nathan]** - Euh oui qu'elles se touchaient bien.
113 **[Chercheur]** - Et est-ce que t'as, est-ce que ça marche tout le temps sur n'importe quelle bande ça ?
114 **[Nathan]** - Non.
115 **[Chercheur]** - Pourquoi ?
116 **[Nathan]** - Pas sur toutes.
117 **[Chercheur]** - Alors non mais sur de cette longueur euh de cette largeur.
118 **[Nathan]** - Oui
119 **[Chercheur]** - La bande de taille deux, est-ce que là tu vois la table elle est finie
120 **[Nathan]** - Oui.
121 **[Chercheur]** - Mais si je te prends une grande bande est-ce que ça marcherait tout le temps
122 **[Nathan]** - Non.
123 **[Chercheur]** - Pourquoi ça marcherait pas ?
124 **[Nathan]** - Parce que y avait pas assez de carrés.
125 **[Chercheur]** - Oui mais alors imaginons que tu en as une infinité de carrés.
126 **[Nathan]** - Hmm...ben...
127 **[Chercheur]** - Si tu avais une infinité de ces mêmes carrés est-ce que ça marcherait tout le temps ça ?
128 **[Nathan]** - Non.
129 **[Chercheur]** - Pourquoi ?
130 **[Nathan]** - Parce que faut voir vers où les couleurs sont placées et...
131 **[Chercheur]** - Non mais par exemple par rapport à ce que tu as fait, est-ce que tu penses que ce que tu as fait tu peux le faire autant de fois que tu veux.
132 **[Nathan]** - Ben oui.
133 **[Chercheur]** - Alors pourquoi ? Qu'est-ce qui y a de particulier dans ce que tu as fait ?
134 **[Nathan]** - Euh ben, si t'as... si t'as plusieurs carrés de la même et que tu continues à les mettre comme t'as mis au premier eh ben ça te donnera toujours le même résultat.

135 [Chercheur] - Donc en fait tu es parti d'un carré où il y a quatre carreaux et ils ont les mêmes couleurs ...
136 [Nathan] - Oui.
137 [Chercheur] - À gauche et à droite c'est ça ?
138 [Nathan] - Oui il fallait bien les placer.
139 [Chercheur] - Voilà et euh avec ce carré là tu l'as répété en fait ce carré.
140 [Nathan] - Voilà.
141 [Chercheur] - Et donc en fait on pourrait...
142 [Nathan] - Le faire infiniment.
143 [Chercheur] - Infiniment, donc on pourrait paver une bande, si je te dis une bande de taille deux fois mille, si on avait beaucoup de carreaux on pourrait le faire ça ?
144 [Nathan] - Ben oui.
145 [Chercheur] - Et même si on en avait une infinité on pourrait paver jusqu'à l'infini.
146 [Nathan] - Oui.
147 [Chercheur] - Ok d'accord. Bon ben très bien est-ce que tu as des remarques ? Est-ce que ça t'a plu du coup ?
148 [Nathan] - Ouais.
149 [Chercheur] - Ouais, est-ce que t'as regardé autre chose ?
150 [Nathan] - Non.
151 [Chercheur] - Non. Bon ben je te laisse aller regarder autre chose, c'est super merci.

5 ENT-EXP-IV-5

1 TRANSCRIPTION Malataverne 5 (Katia et MD 8 min 27)
2
3 [Chercheur] - Alors bonjour votre prénom s'il vous plaît ?
4 [Katia] - Katia.
5 [Chercheur] - Oui vous avez quel âge ?
6 [Katia] - Trente-six.
7 [Chercheur] - Trente-six ans et vous faites quoi comme métier.

8 [**Katia**] - Pour l'instant en formation.
9 [**Chercheur**] - Ok en formation très bien. Alors la première question c'est de savoir pourquoi vous vous êtes inscrite à cet atelier ?
10 [**Katia**] - Parce que mon dix ans m'a tanné pour venir faire cette activité.
11 [**Chercheur**] - D'accord donc votre enfant voulait faire ...
12 [**Katia**] - Tanné tanné tanné tanné, il voulait absolument la faire.
13 [**Chercheur**] - Qui s'appelle ?
14 [**Katia**] - **Nathan**.
15 [**Chercheur**] - **Nathan** d'accord super euh et du coup est-ce que vous aviez une idée de ce qui vous attendez ?
16 [**Katia**] - Non pas du tout.
17 [**Chercheur**] - Non alors vous saviez quand même que c'était en rapport avec les mathématiques.
18 [**Katia**] - Les sciences.
19 [**Chercheur**] - Les sciences de manière générale.
20 [**Katia**] - Des ateliers sur la science.
21 [**Chercheur**] - Ok et du coup est-ce que par rapport à votre conception euh est-ce que vous, ça rentre dans ce que vous pensiez en venant ici ou c'est complètement décalé ?
22 [**Katia**] - Alors non c'est complètement décalé par contre après avoir fait une première table d'activité oui ça rentre dans le cadre de la science.
23 [**Chercheur**] - Dans la science...
24 [**Katia**] - Des sciences.
25 [**Chercheur**] - D'accord.
26 [**Katia**] - Des sciences.
27 [**Chercheur**] - Et est-ce que vous pensez avoir fait des mathématiques en faisant ça ?
28 [**Katia**] - Ben oui j'ai fait des suites logiques donc oui.
29 [**Chercheur**] - Des suites logiques d'accord euh... alors du coup est-ce que vous pouvez me décrire votre activité lors de ces longues minutes sur la situation, si vous deviez me reformuler l'activité,

me reformuler un problème, c'était quoi comme problème, qu'est-ce que vous avez fait, sur quelle situation vous avez travaillé ?

30 [**Katia**] - En fait j'ai l'impression qu'on a fait des dominos avec euh avec une consigne stricte à savoir couleur avec couleur euh voilà.

31 [**Chercheur**] - D'accord donc il fallait respecter les contraintes mais qu'est-ce qu'il fallait faire ?

32 [**Katia**] - Une suite logique.

33 [**Chercheur**] - Une suite logique mais on les repré...

34 [**Katia**] - Une suite enfin logique mais logique

35 [**Chercheur**] - D'accord mais vous les représentiez où ces dominos ?

36 [**Katia**] - Chaque carré, chaque carré c'était un domino qui devait correspondre avec la face euh... adjacente.

37 [**Chercheur**] - Donc vous aviez euh une surface.

38 [**Katia**] - Oui.

39 [**Chercheur**] - Il fallait faire quoi avec cette surface ?

40 [**Katia**] - La remplir.

41 [**Chercheur**] - Il fallait la remplir d'accord donc vous avez rempli une surface avec des dominos alors sur quelle surface vous avez travaillé ?

42 [**Katia**] - Euh laquelle j'ai faite, euh celle avec les points.

43 [**Chercheur**] - Celle avec les points donc...

44 [**Katia**] - Celle avec les points euh celle avec les gros points.

45 [**Chercheur**] - Avec les gros points...

46 [**Katia**] - La ligne.

47 [**Chercheur**] - La ligne d'accord vous avez travaillé sur la bande et donc...

48 [**Katia**] - J'ai travaillé un petit peu sur les trois mais plus sur la bande.

49 [**Chercheur**] - Alors sur la bande qu'est-ce que vous avez obtenu ? Est-ce que vous pensez déjà avoir obtenu un résultat sur la bande ?

50 [**Katia**] - Alors honnêtement je pense que ce problème n'est pas faisable.

51 **[Chercheur]** - Alors ce problème n'est pas faisable... donc vous pensez qu'il n'est pas faisable ?
52 **[Katia]** - Personnellement non j'ai pas la bosse des maths ou de rien donc mais personnellement j'ai beau essayé toutes les techniques euh...
53 **[Chercheur]** - Alors justement est-ce que vous avez mis en place des stratégies, c'est-à-dire un moyen pour montrer que ça ne marchait pas ?
54 **[Katia]** - Ben j'ai réussi à voir une suite de quatre ou cinq.
55 **[Chercheur]** - Ouais.
56 **[Katia]** - Et ça s'arrête là.
57 **[Chercheur]** - Donc quatre ou cinq dominos.
58 **[Katia]** - Quatre ou cinq oui je crois et après ça s'arrête là, pareil avec le point en haut le noir en bas, la couleur qui se suit, les couleurs qui se touchent et après on se retrouve bloqué, il y en a encore deux à côté qui vont ensemble.
59 **[Chercheur]** - Ouais.
60 **[Katia]** - On a une pièce ou deux je crois que c' est carrément des intrus.
61 **[Chercheur]** - Ouais.
62 **[Katia]** - On sait pas ce qui font là mais bon ils sont là après voilà.
63 **[Chercheur]** - Et donc ça marche pas ?
64 **[Katia]** - Ben pour moi ça ne fonctionne pas.
65 **[Chercheur]** - Vous avez essayé... alors c'est une hypothèse ou vous êtes sûre que ça ne marche pas ?
66 **[Katia]** - Non c'est une hypothèse.
67 **[Chercheur]** - C'est une hypothèse d'accord.
68 **[Katia]** - Après j'ai essayé aussi les... bon je suis pas très logique mais j'ai essayé de faire par exemple sur un domino on a du... du rouge du jaune et on a un orange, on aurait pu se dire forcément si on a du rouge du jaune qui font du orange peut-être que si on met les couleurs mais j'ai pas réussi à aboutir.
69 **[Chercheur]** - D'accord donc vous avez essayé de remplir intégralement la ligne.
70 **[Katia]** - J'ai essayé de la remplir intégralement.

71 [**Chercheur**] - Mais vous n'y êtes pas arrivée au bout de cinq, donc quelle est la raison pour laquelle ça bloque ?
72 [**Katia**] - J'ai plus de couleur.
73 [**Chercheur**] - Vous n'avez plus la bonne couleur ?
74 [**Katia**] - Je n'ai plus la bonne couleur pour associer.
75 [**Chercheur**] - Et donc pour montrer que ça ne marche pas donc vous avez essayé plein de cas différents ?
76 [**Katia**] - C'est ça ?
77 [**Chercheur**] - Et vous êtes toujours bloquée à quatre ou cinq et vous n'y arrivez pas.
78 [**Katia**] - C'est ça.
79 [**Chercheur**] - Donc vous pensez que ça ne marche pas.
80 [**Katia**] - Tout à fait.
81 [**Chercheur**] - Alors justement maintenant c'est la question inverse à quelle condition vous pensez qu'on peut arriver à recourir cette bande ? Quand est-ce que c'est possible par exemple ?
82 [**Katia**] - Ça pourrait être possible si on ne tient pas compte des points.
83 [**Chercheur**] - Ouais.
84 [**Katia**] - Alors je n'ai pas essayé de les faire à l'envers...
85 [**Chercheur**] - D'accord.
86 [**Katia**] - À savoir que je ne tienne compte ni du point ni du noir...
87 [**Chercheur**] - Ouais.
88 [**Katia**] - Et j'essaye de les tourner pour euh j'ai pas essayé mais je pense qu'on n'arrive pas à remplir non plus.
89 [**Chercheur**] - D'accord.
90 [**Katia**] - Je pense, il y a... bon après il y a plein d'autres pièces qui...
91 [**Chercheur**] - Mais si on respecte la consigne et si on fait abstraction des tuiles, des dominos qu'on vous a donnés, est-ce que vous arrivez à exhiber une condition sur les couleurs pour que ça marche tout le temps ? Qu'est-ce qui faudrait sur les tuiles pour qu'on puisse toujours arriver à ...

92 **[Katia]** - Mettre un deuxième point ou enlever le point.
93 **[Chercheur]** - Ah c'est-à-dire qu'on pourrait retourner les tuiles, donc là ça marcherait tout le temps.
94 **[Katia]** - Là ça marcherait tout le temps.
95 **[Chercheur]** - Oui mais on va dire qu'on fixe euh on peut pas retourner les tuiles et on fixe les couleurs est-ce qu'il y a une condition sur les côtés gauches et droites des tuiles pour qu'on puisse toujours recouvrir la bande ?
96 **[Katia]** - Pourvoir intervertir les couleurs. C'est pas possible hahaha.
97 **[Chercheur]** - Oui mais là c'est toujours pareil.
98 **[Katia]** - Alors euh...
99 **[Chercheur]** - Ben ça c'est un résultat effectivement si on a deux tuiles qui ont euh une intervention des couleurs à gauche et à droite effectivement on peut les mettre côté à côté et on peut remplir le motif, mais du coup vous n'avez pas d'idée de manière générale ?
100 **[Katia]** - Non pas tellement.
101 **[Chercheur]** - Ok et donc est-ce que vous pensez que c'est un résultat ce que vous me dites ?
102 **[Katia]** - Ah non je n'aime pas quand c'est pas fini mais cinq me dit que j'ai donné tout ce que je pouvais pour y arriver donc pourquoi pas, on va partir du principe que c'est un résultat.
103 **[Chercheur]** - D'accord donc vous n'êtes pas convaincue, pour vous c'est un peu un résultat partiel.
104 **[Katia]** - Ouais c'est un résultat partiel.
105 **[Chercheur]** - Si vous étiez arrivée à trouver un pavage complet, pour vous c'est un résultat ça ? Le fait de montrer que ça marche
106 **[Katia]** - Oui.
107 **[Chercheur]** - Oui.
108 **[Katia]** - Parce que finalement on a un début et une fin ça doit commencer et ça doit finir.
109 **[Chercheur]** - Alors est-ce que vous pensez déjà que le problème il était posé euh pour une taille précise ou pour quelque chose d'infiniment grand ?

110 [Katia] - Non je me dis que ça peut être plus ou moins une trame.
111 [Chercheur] - C'est une trame c'est-à-dire il y a une continuité ?
112 [Katia] - Après si j'avais plus de dominos j' aurais peut-être pu continuer plus si j'en avais eu moins...
113 [Chercheur] - Si vous aviez eu les mêmes dominos, les mêmes types de dominos même si il y en avait eu plus est-ce que vous auriez pu continuer ?
114 [Katia] - Non.
115 [Chercheur] - Non.
116 [Katia] - Parce que finalement ma suite faisait cinq.
117 [Chercheur] - Voilà mais si par exemple euh on avait quelques chose qui permet de marcher, c'est-à-dire de recouvrir...
118 [Katia] - On pourrait continuer.
119 [Chercheur] - On pourrait continuer à l'infini.
120 [Katia] - Tout à fait.
121 [Chercheur] - D'accord et pour l'autre activité du coup ?
122 [Katia] - Quelle autre activité ? La deuxième table ?
123 [Chercheur] - Vous avez pas regardé ?
124 [Katia] - J'ai pas encore fait la deuxième table.
125 [Chercheur] - Ah ok vous avez fait que ça seulement.
126 [Katia] - Oui.
127 [Chercheur] - Est-ce que vous avez des remarques par rapport au matériel, aux consignes, vous avez bien compris ce qu'il fallait faire dans l'ensemble ?
128 [Katia] - Oui après comme je dis c'est plus ou moins des suites logiques donc on sait que enfin que la consigne est clairement établie ben voilà on respecte on sait que le point sur le problème il est en haut donc la carte du point doit être en haut, on sait que les couleurs doivent être adjacentes donc ça donne la consigne pour la totalité de la table.
129 [Chercheur] - D'accord ok.

130 [**Katia**] - C'est comme ça partout.
131 [**Chercheur**] - OK donc pour vous quand même vous avez eu un résultat partiel sur le fait que ça marchait pas et vous êtes sûre que ça marche pas de toute façon.
132 [**Katia**] - Non.
133 [**Chercheur**] - Ah non vous n'êtes pas sûre.
134 [**Katia**] - Pour moi oui. Pour moi je suis sûre que je ne peux pas aller plus loin. On en a fini deux, le dernier n'est pas abouti.
135 [**Chercheur**] - De toute façon vous avez essayé toutes les combinaisons ?
136 [**Katia**] - Mais on a essayé vraiment toutes les combinaisons.
137 [**Chercheur**] - Mais c'est pas un résultat pour vous ça ?
138 [**Katia**] - Si finalement...
139 [**Chercheur**] - Est-ce que vous pensez que l'impossible ça existe en mathématiques ? Est-ce que ça existe l' impossible ? Est-ce qu'on peut donner des problèmes qui... où il n'y a pas de solution ?
140 [**Katia**] - Non.
141 [**Chercheur**] - Non donc pour vous il y a toujours une solution.
142 [**Katia**] - C'est ça enfin c'est la base des maths pour moi personnellement.
143 [**Chercheur**] - D'accord je vous remercie.
144 [**Katia**] - Pour moi les maths...
145 [**Chercheur**] - Pour vous les maths c'est une science exacte.
146 [**Katia**] - C'est censé être une science exacte, oui avec les maths on est censé pourvoir tout expliquer donc oui les maths sont une science exacte.
147 [**Chercheur**] - Donc il faut toujours avoir une " résultat" positive et non une impossibilité.
148 [**Katia**] - C'est tout à fait ça.
149 [**Chercheur**] - OK et ben je vous remercie.

6 ENT-EXP-IV-6

1 TRANSCRIPTION Malataverne 6 (Colette et MD 8 min 27)

2

3 [Chercheur] - Alors bonjour est-ce que vous pouvez me dire votre prénom ?

4 [Colette] - Bonjour Je m'appelle Colette, j'ai trente-sept ans et je suis chimiste-pâtissière.

5 [Chercheur] - D'accord euh merci d'avoir répondu à cette question. Alors ma première question ça serait de savoir pourquoi vous vous êtes inscrite à cet atelier ?

6 [Colette] - Parce qu'on est joueur et on aime bien les maths euh et que les filles avaient envie de venir.

7 [Chercheur] - D'accord donc vous saviez que c'était un atelier en rapport avec les mathématiques.

8 [Colette] - Oui chaque année on fait la fête des sciences et cette année c'était un peu compliqué donc il y avait la possibilité de le faire à la bibliothèque et on a trouvé ça sympa on est venues pour ça.

9 [Chercheur] - Et vous avez l'habitude de venir dans ce genre de dispositif euh dans des centres culturels scientifiques ?

10 [Colette] - Oui on aime bien.

11 [Chercheur] - Ah d'accord ok. Mon autre question c'est que vous êtes venue certainement pour un but donc c 'était faire des mathématiques, est-ce que vous pensez réellement après cette première expérience ce pour lequel vous êtes venue aujourd'hui ?

12 [Colette] - Ouais c'est ça on s'attendait enfin moi je m'attendais à des tests de logique euh voilà je suis pas sûre qu'on y soit bien arrivées mais c' était sympa.

13 [Chercheur] - D'accord ok. Euh mon autre question c' est de savoir ben si vous deviez reformuler une question un problème, sur quel problème vous avez travaillé, qu'est-ce que vous avez fait concrètement ?

14 [Colette] - Là ce qu'on a fait là ?

15 [Chercheur] - Ouais. Quel était le but, l'objectif de

la situation, est-ce que vous pouvez me décrire ce que vous avez fait ?

16 **[Colette]** - Alors c'est difficile comme question, euh avec des sortes de dominos...

17 **[Chercheur]** - Ouais.

18 **[Colette]** - De quatre côtés, il fallait arriver à voir sur trois emplacements différents, sur trois aires différentes si on pouvait faire une suite logique pour remplir l'intégralité de la surface.

19 **[Chercheur]** - Donc la surface c'était quoi ?

20 **[Colette]** - Il y en avait un où c'était douze carrés , un où...

21 **[Chercheur]** - Sans être précis jusqu'à là, la surface c'était, ça ressemblait à quoi comme figure géométrique ?

22 **[Colette]** - C'était des rectangles

23 **[Chercheur]** - C'était des rectangles d'accord qui avaient des particularités c'était des rectangles euh... ?

24 **[Colette]** - Euh...

25 **[Chercheur]** - Par exemple est-ce que vous avez remarqué quelques chose sur les bords de ces rectangles ?

26 **[Colette]** - Il y avait un côté de deux un côté de deux.

27 **[Chercheur]** - Alors sans les longueurs au niveau des couleurs, est-ce qu'il y avait des contraintes ?

28 **[Colette]** - Ah oui il y avait des contraintes de couleurs et il y en a un pour lequel on est arrivées à le remplir.

29 **[Chercheur]** - Ouais.

30 **[Colette]** - En faisant une suite logique.

31 **[Chercheur]** - Alors quand vous appelez suite logique c 'est-à-dire ?

32 **[Colette]** - Il y avait un motif de quatre carreaux.

33 **[Chercheur]** - D'accord.

34 **[Colette]** - Qu'on pouvait répéter trois fois.

35 **[Chercheur]** - Trois fois.

36 **[Colette]** - Donc ça remplissait l'espace de douze.

37 **[Chercheur]** - D'accord.

38 [**Colette**] - Par contre on n'y est pas arrivées sur l'espace qui... sur les deux autres espaces, on n'y est pas arrivées on a trouvé je sais plus une suite de six...enfin il y a un motif où qui pouvait avoir six carrés...

39 [**Chercheur**] - Ouais

40 [**Colette**] - Qu'on pouvait répéter trois fois je crois et il nous restait une ligne qui faisait que on pouvait arriver à faire coïncider enfin on n'est pas arrivées à faire coïncider les couleurs en fait.

41 [**Chercheur**] - D'accord.

42 [**Colette**] - On se retrouvait avec des carrés impossibles en fait avec deux fois la même couleur.

43 [**Chercheur**] - Sur le carré ? Sur un carré il aurait fallu avoir deux fois la même couleur, c'est ça ?

44 [**Colette**] - Oui pareil sur l'autre.

45 [**Chercheur**] - Et est-ce que vous êtes sûre alors la fois où vous êtes arrivée à exhiber une suite qui se répète, une suite logique comme vous l'appelez qui se répète et donc ça marchait et donc là est-ce que pour vous c'est un résultat ? Est-ce que vous avez montré quelque choses ?

46 [**Colette**] - Ben on a trouvé une logique qui fonctionnait.

47 [**Chercheur**] - Qui fonctionnait mais du coup est-ce que vous avez...

48 [**Colette**] - Oui mais on n'y est pas arrivées sur les autres, oui c'était un résultat qui fonctionnait quoi.

49 [**Chercheur**] - Ok et pour ceux pour lesquels ça ne marchait pas, est-ce que vous pensez que ça marchait pas parce que vous avez pas trouvé la bonne technique ou est-ce qui y a pas de solution ?

50 [**Colette**] - Ah il y a peut-être une solution qu'on n'a pas trouvée mais la solution on se dit que ça peut être que euh ça peut pas être, qu'on ne peut pas le remplir en fait, on s'est dit que la solution c'est peut-être ça.

51 [**Chercheur**] - D'accord donc vous acceptez le fait...

52 [**Colette**] - On accepte le fait que ça soit pas

possible mais on accepte aussi le fait qu'on se soit trompées enfin qu'on n'ait pas vu une solution.

53 [Chercheur] - D'accord et euh est-ce que vous avez une idée sur justement comment montrer parce que quand ça marche qu'est-ce que vous avez fait ?

54 [Chercheur] - Euh qu'est-ce que justement quand vous êtes arrivée à exhiber un remplissage de rectangle, un pavage, quand on n'y est pas arrivé il manquait, il y avait des trous. Donc est-ce si vous acceptez le fait qu'effectivement c'est peut-être pas possible, est-ce que vous avez une stratégie à adopter pour montrer que ça ne marche pas.

55 [Colette] - Euh là la stratégie pour celui qui faisait euh 36 de côté là on avait un dessin de de seize je crois seize carrés, on s'est dit seize fois deux ça fait trente-deux, on n'est pas dans un multiple de seize en fait sur notre rectangle total, est-ce enfin voilà la stratégie c'était on calcule la surface totale et on divise par le nombre de carreaux du motif et si on tombe pas pile c'est pas un multiple.

56 [Chercheur] - Un motif pour vous c'est un motif qui a les mêmes couleurs à gauche et à droite qu'on peut répéter ?

57 [Colette] - Alors le motif c'était un assemblage, un dessin de plusieurs tuiles.

58 [Chercheur] - Qu'on pouvait répéter ?

59 [Colette] - Oui qu'on pouvait répéter.

60 [Chercheur] - Ok d'accord donc...

61 [Colette] - Dans notre logique en tout cas.

62 [Chercheur] - Donc il y a cette répétition de motifs.

63 [Colette] - Il y avait une répétition de motifs.

64 [Chercheur] - OK et est-ce que vous avez essayé d' autres, parce qu'on vous a donné des réglettes, des équerres...

65 [Colette] - Ouais.

66 [Chercheur] - Qui étaient positionnées sur les plateaux...

67 [Colette] - Oui.

68 [**Chercheur**] - Qui étaient positionnées sur des tailles de rectangles spécifiques, est-ce que vous avez regardé que ces tailles là ou vous avez regardé d' autres tailles ?

69 [**Colette**] - Je me suis dit que l'hypothèse de départ c'était de pas toucher cette réglette là.

70 [**Chercheur**] - D'accord parce qu'on l'avait fixée sur euh alors je vous le dis cette réglette c'est pour justement vous preniez conscience que le problème général c'est de savoir, quelle que soit la taille du rectangle est-ce qu'on peut toujours paver ?

71 [**Colette**] - Ah oui.

72 [**Chercheur**] - Et donc du coup la réglette c'est se l' approprier et c'est à vous de déplacer la réglette ...

73 [**Colette**] - Ah ah.

74 [**Chercheur**] - Et de regarder...

75 [**Colette**] - Et de changer l'hypothèse de départ.

76 [**Chercheur**] - Ben en fait c'est vous qui vous appropriez cette variable où vous regardez...

77 [**Colette**] - Mais on n'a pas osé toucher la réglette effectivement si on touche la réglette on peut remplir.

78 [**Chercheur**] - Enfin vous pouvez remplir ou...

79 [**Colette**] - Ou pas.

80 [**Chercheur**] - Ou pas et dans ces cas-là il faut voir si ça marche, si ça ne marche pas et vous pouvez avoir une hypothèse générale sur les côtés de votre rectangle.

81 [**Colette**] - Ouais.

82 [**Chercheur**] - Et du coup effectivement il faut s' approprier cette réglette et changer peut-être les ...

83 [**Colette**] - Peut-être.

84 [**Chercheur**] - Les dimensions.

85 [**Colette**] - Ou trouver un autre motif et après on a fait un motif qui collait à cette réglette là, c'est vrai qu'on aurait pu changer la réglette.

86 [**Chercheur**] - Je continue juste pour la dernière remarque, est-ce que vous avez une remarque sur le

matériel, est-ce que vous avez bien compris ce qu'il fallait faire et cetera ?

87 **[Colette]** - Oui c'était super sympa et je crois qu'on a compris, on avait un peu peur de faire tomber la caméra.

88 **[Chercheur]** - Oui d'accord, oui je comprends.

89 **[Colette]** - À un moment je me suis appuyée sur la tablette ça a bougé j'espère que j'ai pas déréglé vos réglages.

90 **[Chercheur]** - Ouais, bon je pense pas. Bon ben je vous remercie madame.

91 **[Colette]** - Ouais c'était sympa.

92 **[Chercheur]** - Super merci.

93 **[Colette]** - On a le temps de faire l'autre après ?

94 **[Chercheur]** - Oui bien sûr vous pouvez changer il n'y a pas de souci.

Index

Cet index référence les éléments clés de ce travail de thèse. Nous informons également le lecteur ou la lectrice qu'en général seule la pagination de la première occurence du terme est précisée.

A

acceptabilité 29
acteurs directs 80
acteurs indirects 80, 317
action
  $\mathcal{I}$-action 61
  $\mathcal{O}$-action 61
  $\mathcal{O}_d$-action . . . . *voir* $\mathcal{O}$-action
  $\mathcal{O}_s$-action . . . . *voir* $\mathcal{O}$-action
  $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$-action 61
  $\mathcal{T}$-action 61
activité mathématique 11, 53
algorithme de Fleury 196
algèbre des chemins 130
aspect ludique et captivant 49
aspect syntaxique 18
aspect sémantique 21

B

backtracking 160
bande bi-infinie 188
branch and bound 160
breadth first search 127, 193
Brick Wang tiles 136

C

circuit de tuiles 190
collection apériodique 114
concept-problème 45
conflit 41
conjecture de Wang 116
cube de Wang 125

D

depth-first search 127, 193
dialectique d'action 43
dialectique de formulation 43
dialectique de validation 43
dilatation-substitution 174
dimension sociale 52
distance 300
dévolution 44

E

EIAH . . . 29
encodage . . . 64
enoncé contingent . . . 12
ensemble périodique . . . 111
espace-problème . . . 45
Eternity Puzzle . . . 136

F

fasciagraphes . . . 130

H

Hao Wang . . . 106

I

institutionnalisation . . . 44

J

jeu de Culik . . . 122
jeu de Jeandel et Rao . . . 124
jeu de Kari . . . 122
jeu de Laüchli . . . 121
jeu de Mac Mahon . . . 136
Jeu de Robinson . . . 120

M

machine de Turing . . . 115
marqueur occuro-temporel . . . 65
micro-activité . . . 65
modèle ORA de traitement et d'analyse . . . 57, 73
modèle des SiRC . . . 49
modèle du problème transposé . . 29
mot . . . 54, 63
mot périodique . . . 54
motif périodique . . . 108
médiation . . . 31
médiation directe . . . 91
médiation indirect . . . 42
médiation indirecte . . . 91

N

NP . . . 128
NP-complet . . . 128
NP-dur . . . 128

P

parcours en largeur . . . 193
parcours en profondeur . . . 193
pavage apériodique . . . 119
pavage périodique . . . 108
phase . . . 65
potentiel mathématique . . . 13
problème . . . 13
- ∀∃∀-SAT . . . 115
- $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ ou $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ . . . 128
- k-SAT . . . 129
- 2-SAT . . . 129
- 3-SAT . . . 129
- ARRÊT . . . 18, 115
- CIRCUIT . . . 193, 195
- COM-ALG . . . 106, 137
- DEC-ALG . . . 106, 137
- EIN STEIN . . . 125
- ENTSCHEIDUNGSPROBLEM 17, 115
- EULERIEN . . . 196

EULERIEN-WANG-1-BAND196
HAMILTONIEN 198
MAX-CIRCUIT 195
MAX-WANG-1-BANDE 195
MIN-CIRCUIT 195
MIN-WANG-1-BANDE 195
PAVAGE 106, 137
SAT 129
SNAKE 118
VOYAGEUR DE COMMERCE20
WANG-∀-CARRE-MONO-PART 175
WANG-∀-CARRE-MONO-PART⋆ 186
WANG-∀-REC-MONO-PART 177
WANG-∀-REC-MONO-PART⋆ 186
WANG-h-BANDE . 126, 145, 188
WANG-1-BANDE 189, 192
WANG-2-BANDE 198, 200
WANG-BRICK 136
WANG-CARRE-A 166
WANG-CARRE-B 170
WANG-CARRE-C 174
WANG-CARRE-MONO-PART 175
WANG-DIAG 116, 118
WANG-JEU-OPTIMAL 119, 124
WANG-ORIGINE . 116, 118, 125
WANG-PLAN106, 112, 114, 145
WANG-PLAN-$\mathscr{F}_1$ 201
WANG-PLAN-$\mathscr{F}_2$ 202
WANG-PLAN-$\mathscr{F}_3$ 203
WANG-PLAN-$\mathscr{F}_i$ 201
WANG-PLAN-1,2,3-COULEURS 123
WANG-PLAN-PERIODIQUE 118
WANG-REC-k-MONOCH . . 132, 136, 145
WANG-REC-1-MONOCH . . 132, 133
WANG-REC-2-MONOCH . . 134
WANG-REC-3-MONOCH . . 136
WANG-REC-4-MONOCH . . 136
WANG-REC-GEN 127, 128, 131
WANG-REC-MONO-PART . 147
WANG-RECTANGLE-A 148
WANG-RECTANGLE-B 148
WANG-RECTANGLE-C 148
problème décidable 114
problème indécidable 114
PSPACE-complet 127

Q

quantité épistémologique 12

R

raisonnement déductif 11
raisonnement inductif 11
relation de suffisance partielle . . . 47
responsabilité scientifique 12
rotagraphes 130
règle du jeu de Wang 109
résumé 68

S

situation adidactique 43
situation didactique 43
sous-mot 71
stratégie 53
(DE)CONSTRUCTION 220
BACKTRACKING 225
BRANCH_AND_BOUND 225

BRUTE-FORCE 225
DENOMBREMENT 225
EMPILEMENT 226
FORÇAGE 223
MOTIF_PERIODIQUE 219
PARTITION 221
stratégie en compréhension . . 54, 63
stratégie en extension 54, 63

T

tableau des jeux apériodiques . . 125
tableau-résumé complex. algo. . 140
temps 12
tuile de Wang 107

U

univers 45
utilisabilité 29
utilité 29

V

variable
VAR_DID_BANDE_BORDS . . . 231
VAR_DID_DISPOSITION_SITUATION 243
VAR_DID_NBRE_BORDS 228
VAR_DID_PLAN_COLLECTION 241
VAR_DID_RECTANGLE_TAILLE_MAX 229
VAR_DID_RECTANGLE_TYPE 228
VAR_RECHERCHE_RECTANGLE_TAILLE 229
variable de recherche 49, 213
variable didactique 49, 213

Z

zone d'information ($\mathcal{Z}_{\mathcal{I}}$) 53
zone d'outillage ($\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$) 53
zone de travail ($\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$) 53
zone fonctionnelle 51
zoom 47

Table des matières

Résumé v

Remerciements vii

Sommaire xv

Listes des symboles et des abréviations xxi

Liste des problèmes xxv

Liste des tableaux xxix

Table des figures xxxi

Ancrages théoriques et méthodologiques, problématique et questions de recherche 1

I Introduction 3
- 1 Contexte de la recherche et préoccupations 3
- 2 Faire des mathématiques dans les institutions de culture scientifique : utopie ou réalité ? 3

II Définition de l'objet d'étude 7
- 1 Approche épistémologique de l'activité mathématique 8
  - 1.1 Le point de vue des mathématiciens et des didacticiens des mathématiques 8
  - 1.2 Notre acception de l'activité mathématique 11
- 2 Problème : étymologie et définitions 13
  - 2.1 Les travaux de Priolet (2008) et de Rey (2011) 14
  - 2.2 Difficultés à définir le substantif problème dans les ouvrages de mathématiques professionnelles 15

3 Notion de problème dans la sphère des mathématiciens 16
3.1 Syntaxe d'un problème mathématique 18
3.2 Sémantique d'un problème mathématique 21
4 Notion de problème en « éducation mathématique » 22
4.1 Une pluralité d'acceptions 22
4.2 Ce que nous retenons de cette littérature 26
5 Conclusion et ouvertures 27

III Recension des écrits scientifiques sur la médiation des mathématiques dans la communauté didactique 31
1 Nos travaux antérieurs à cette thèse 31
2 Travaux francophones de didactique des mathématiques autour de la médiation en mathématiques 32
2.1 Travaux de thèse et de master en France 32
2.2 Travaux de recherche dans la communauté didactique francophone à partir des actes de l'EMF 33
3 Bilan de cette recension 35

IV Cadre théorique & problématique 37
1 Écologie et évaluation des ressources 37
1.1 L'échelle des niveaux de co-détermination didactique . . . 37
1.2 Modèle du problème transposé pour l'évaluation du potentiel mathématique d'une ressource 38
1.3 Remarques objectives 40
1.4 Phénomènes extérieurs et confrontation à la contingence 41
2 Problématique et questions de recherche 42
3 Modèle du problème transposé dans la conception d'une ingénierie didactique 43
3.1 Situation et ingénierie didactique 43
3.2 Analyse *a priori* par le modèle du problème transposé . . 45
3.3 Caractérisation des zones fonctionnelles du milieu et nouvelle question de recherche 51
3.4 Les stratégies : un moyen pour repérer l'activité mathématique d'individus 53
4 Conclusion et poursuite de notre questionnement 54

V Modèle pour repérer les traces d'activité mathématique d'individus en résolution de problème 57
1 L'usage de la vidéo comme méthode de recueil de données . . 57
1.1 Intérêts et précautions 57
1.2 L'usage de la vidéo en didactique 58

2 Description du modèle au niveau des choix des observables . . 60
2.1 Typologie et choix d'actions 60
2.2 Partition des $\mathcal{O}$-actions en des actions de sélection ou de dépôt d'objet 62
2.3 Stratégies de résolution définies en extension ou en compréhension 63
3 Description du modèle au niveau de la retranscription d'expérience 64
3.1 Encodage des actions élémentaires en un format symbolique 64
3.2 Méthode pour retranscrire les données 65
3.3 Résumé : une photographie enrichie 68
4 Description du modèle au niveau de l'analyse des retranscriptions 71
5 Forces et faiblesses du modèle 74

Analyse écologique **76**

VI Fait-on des mathématiques dans les institutions de culture scientifique ? Une étude de cas en France **79**
1 Les acteurs de la culture scientifique 79
2 État des lieux rétrospectif et réactualisé autour des acteurs directs de la diffusion mathématique 82
2.1 Diffusion des mathématiques grâce aux acteurs de la recherche et de l'enseignement 82
2.2 Les associations et centres de culture scientifique dans la diffusion des mathématiques 85
Premier bilan : existence et émergence des mathématiques dans les centres de culture scientifique 87
3 Historique des courants de communication scientifique dans notre civilisation et la prolifération de nouvelles institutions . 88
3.1 Évolution de la communication scientifique 88
3.2 Naissance d'un nouveau type d'institutions 89
4 Une stratégie unificatrice à l'échelle de notre société 90
4.1 La démarche scientifique au cœur des préoccupations . . 90
4.2 Une condition mais aussi des contraintes à différents niveaux 90
5 Formes de médiation dans les institutions de culture scientifique 91
5.1 Médiation directe 91
5.2 Médiation indirecte 91
5.3 Prise de position soutenue pour des raisons épistémologiques et didactiques 92

5.4 Conditions macro-didactiques favorables à une pratique mathématique . . . 93
6 Exemples de ressources mathématiques proposées dans les institutions de culture scientifique . . . 93
6.1 Institutions visitées . . . 93
6.2 Quelques exemples . . . 94
Second bilan : un manque constaté au niveau des ressources et des perspectives envisageables . . . 101

Analyse épistémologique, mathématique et didactique du problème de Wang 103

VII Analyse épistémologique et historique du problème de Wang 105
1 Introduction au problème de Wang . . . 106
1.1 Présentation du problème dans $\mathbb{Z}^2$ . . . 106
1.2 Exemples illustrant le problème et premiers constats . . . 109
2 De l'indécidabilité aux pavages apériodiques . . . 114
2.1 Indécidabilité du problème de Wang . . . 114
2.2 L'histoire d'une course à la recherche d'un ensemble apériodique optimal . . . 119
3 Décidabilité et complexité sur des régions (semi)-bornées de $\mathbb{Z}^2$ 126
3.1 Décidabilité et complexité dans le cas des bandes bi-infinies $\mathfrak{B}_h$ d'une hauteur $h > 0$ . . . 126
3.2 Décidabilité dans le cas des rectangles de taille $p \times q$ . . . 127
3.3 Complexité du problème de Wang sur les rectangles $p \times q$ 128
3.4 Complexité du problème de Wang sur les rectangles $p \times q$ à bords monochromes . . . 132
4 Univers des problèmes et espace-problème de Wang . . . 137
5 Premier zoom sur l'espace-problème Ω_W . . . 138
5.1 Ω_W construit à partir de notre étude épistémologique et historique . . . 138
5.2 Relations établies entre les problèmes grâce à notre étude épistémologique et historique . . . 140
6 Conclusion et perspectives de recherche . . . 142

VIII Analyse mathématique du problème de Wang 145
1 Le problème de Wang sur des rectangles à bords monochromes pour un certain type de tuiles . . . 146
1.1 Quelques cas particuliers d'existence et d'impossibilité . . 149
1.2 Le cas des bandes de taille $1 \times q$ . . . 150

1.3 Le cas des bandes de taille $2 \times q$ 152
1.4 Quelques remarques pour les bandes $3 \times q$ 157
1.5 Vers une généralisation pour les rectangles de taille $p \times q$. 161
1.6 Vers une généralisation du problème dans le cas où $\mathcal{T}_{\#\mathcal{X} \geqslant 4}$ 178
2 Le problème de Wang sur des bandes bi-infinies de hauteur h fixée : une étude de cas 188
2.1 Rappel des résultats généraux dans le cas des bandes bi-infinies $(\mathfrak{B}_h)_{h>0}$ 188
2.2 Le cas de la bande bi-infinie $\mathfrak{B}_1$ 189
2.3 Le cas de la bande bi-infinie $\mathfrak{B}_2$ 198
3 Le problème de Wang dans le plan $\mathbb{Z}^2$ avec certaines familles $(\mathscr{F}_i)_{i\in\{1,2,3\}}$ 201
3.1 Le cas de la famille $\mathscr{F}_1$ 201
3.2 Le cas de la famille $\mathscr{F}_2$ 202
3.3 Le cas de la famille $\mathscr{F}_3$ 203
4 Deuxième zoom sur l'espace-problème Ω_{W} 208
4.1 Ω_{W} affiné à partir de notre analyse mathématique 208
4.2 Relations établies entre les problèmes grâce à notre analyse mathématique 209
5 Vers la conception d'ingénieries didactiques de l'activité mathématique 211

IX Analyse didactique et conception des situations issues du problème de Wang **213**
1 Épistémologie du problème 214
1.1 Syntaxe des problèmes proposés dans nos situations . . . 214
1.2 Sémantique des problèmes proposés dans nos situations . 215
2 Transposition didactique des problèmes 215
2.1 Connaissances d'ordre I et II mobilisées et visées 216
2.2 Notre intentionnalité didactique 217
2.3 Stratégies de résolution identifiées dans notre étude épistémologique 218
2.4 Les variables didactiques et les variables de recherche et leurs impacts sur les stratégies 228
2.5 Validation des critères du modèle des SiRC 243
3 Construction du milieu, ergonomie et évaluation par inspection 245
3.1 Milieu du sujet, milieu artefactuel et aspect ergonomique 245
3.2 Évaluation par inspection de l'utilité, l'utilisabilité et l'acceptabilité 248
4 Choix des actions et caractérisation des micro-activités 249
4.1 Actions a_i sur les zones fonctionnelles du milieu 249

4.2 Micro-activités et exemples de retranscription et de résumé 250
5 Conclusion sur l'analyse *a priori* 253

Analyse des expérimentations **255**

X Contexte des expérimentations et types de données recueillies **257**
1 Contexte des expérimentations 257
1.1 En amont des expérimentations 257
1.2 Déroulement général des expérimentations 259
2 Informations liées aux entretiens et aux données 260
2.1 Entretiens et codage des transcriptions en annexes 260
2.2 Codage des fichiers vidéo et retranscription des données audiovisuelles en annexes 261

XI Analyse des expérimentations et résultats **263**
1 Analyse du module 1 : le cas des rectangles 264
2 Analyse du module 2 : le cas des bandes et du plan 276
3 Résultats de l'analyse des expérimentations 288
3.1 Dévolution des situations et utilisation effective du matériel disponible 289
3.2 Traces d'activité mathématique relevées chez les individus 290

Conclusion générale **293**

XII Conclusion et perspectives de recherche **295**
1 Un manque constaté au niveau de l'existant 295
2 La pratique de l'activité mathématique est possible dans ces espaces de médiation 296
3 Modèle didactique pour concevoir ces ressources 297
4 Modèle didactique pour décrire et objectiver les traces d'activité mathématique en situation 298
5 Perspectives de recherche 300

Bibliographie **303**

Annexes **314**

A Annexe du chapitre VI **317**
1 État des lieux rétrospectif et réactualisé autour des acteurs indirects de la diffusion mathématique 317
2 Données récoltées pour l'étude (voir tableau A.1, p. 319) . . . 322
2.1 Continent science 322
2.2 Le Journal des sciences 322
2.3 La Méthode scientifique 323
2.4 La conversion scientifique 323

B Annexe du chapitre V **325**
1 Transcription relatif à l'exemple V.7, p. 66 325

C Annexe du chapitre IX : compléments mathématiques liés à des instances spécifiques **327**
1 Le cas de la bande $\mathfrak{B}_1$ avec des instances spécifiques 327
2 Le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$ avec des instances spécifiques 330

D Circulation effective des sujets lors de l'expérimentation I **333**

E Retranscriptions de l'expérimentation I : le cas des rectangles **335**
1 Première retranscription : s_6 et s_8 en activité dans le cas du rectangle de type A 335
1.1 Retranscription du fichier VEXP1_M1_001.mp4 336
1.2 Retranscription du fichier VEXP1_M1_002.mp4 (suite) . . . 338
2 Deuxième retranscription : s_7 et s_8 en activité dans le cas du rectangle de type $|B|$ 339
2.1 Retranscription du fichier VEXP1_M1_001.mp4 339
2.2 Retranscription du fichier VEXP1_M1_002.mp4 (suite) . . . 342
3 Troisième retranscription : s_4 et s_5 en activité dans le cas du rectangle de type C 343
3.1 Retranscription du fichier VEXP1_M1_001.mp4 344
3.2 Retranscription du fichier VEXP1_M1_002.mp4 (suite) . . . 347
3.3 Retranscription du fichier VEXP1_M1_003.mp4 (suite) . . . 349

F Retranscriptions de l'expérimentation I : le cas de la bande $\mathfrak{B}_1$ **351**
1 Première retranscription : s_1, s_2 et s_3 en activité 351
1.1 Retranscription du fichier VEXP1_M2_001.mp4 352
2 Deuxième retranscription : s_4 et s_5 en activité 352
2.1 Retranscription du fichier VEXP1_M2_003.mp4 353
3 Troisième retranscription : s_6 et s_7 en activité 354
3.1 Retranscription du fichier VEXP1_M2_004.mp4 354

G Retranscriptions de l'expérimentation I : le cas de la bande $\mathfrak{B}_2$ 357
1 Première retranscription : s_1 en activité 357
1.1 Retranscription du fichier VEXP1_M2_001.mp4 357
1.2 Retranscription du fichier VEXP1_M2_002.mp4 (suite) . . . 358
2 Deuxième retranscription : s_4 et s_5 en activité 359
2.1 Retranscription du fichier VEXP1_M2_003.mp4 359
3 Troisième retranscription : s_6 et s_7 en activité 361
3.1 Retranscription du fichier VEXP1_M2_003.mp4 361
3.2 Retranscription du fichier VEXP1_M2_004.mp4 362

H Retranscriptions de l'expérimentation I : le cas du plan 367
1 Première retranscription : s_3 en activité 368
1.1 Retranscription du fichier VEXP1_M2_001.mp4 368
2 Deuxième retranscription : s_6, s_7 et s_8 en activité 370
2.1 Retranscription du fichier VEXP1_M2_003.mp4 370
3 Troisième retranscription : s_4 et s_5 en activité 378

I Transcriptions des entretiens audio de l'expérimentation I 381
1 ENT-EXP-I-1 381
2 ENT-EXP-I-2 386
3 ENT-EXP-I-3 393
4 ENT-EXP-I-4 399
5 ENT-EXP-I-5 403
6 ENT-EXP-I-6 410
7 ENT-EXP-I-7 415
8 ENT-EXP-I-8 426

J Transcriptions des entretiens audio de l'expérimentation II 435
1 ENT-EXP-II-1 435
2 ENT-EXP-II-2 438
3 ENT-EXP-II-3 442
4 ENT-EXP-II-4 447
5 ENT-EXP-II-5 452
6 ENT-EXP-II-6 460
7 ENT-EXP-II-7 467
8 ENT-EXP-II-8 472
9 ENT-EXP-II-9 474
10 ENT-EXP-II-10 480

K Transcriptions des entretiens audio de l'expérimentation III 485
1 ENT-EXP-III-1 485
2 ENT-EXP-III-2 488
3 ENT-EXP-III-3 504
4 ENT-EXP-III-4 510
5 ENT-EXP-III-5 515

L Transcriptions des entretiens audio de l'expérimentation IV 521
1 ENT-EXP-IV-1 521
2 ENT-EXP-IV-2 527
3 ENT-EXP-IV-3 535
4 ENT-EXP-IV-4 538
5 ENT-EXP-IV-5 545
6 ENT-EXP-IV-6 552

Index 561

Table des matières 565

Résumé

Dans cette thèse nous montrons l'écart entre le discours de société, formulé par une stratégie nationale de culture scientifique, et l'existant dans les associations ou centres de culture scientifique. Le premier prône la démocratisation de la démarche scientifique alors qu'elle est concrètement absente dans ces institutions de diffusion. Notre étude écologique montre en effet que les ressources proposées dans ces institutions n'ont pas le potentiel mathématique, pour des raisons épistémologiques et didactiques, à faire entrer le public dans l'activité mathématique. À partir de ce constat, nous développons deux modèles didactiques. L'un permet de concevoir (et d'évaluer) des ingénieries didactiques de la pratique mathématique donnant des conditions d'abord épistémologiques, ensuite didactiques et enfin ergonomiques. L'autre propose une méthode de traitement et d'analyse de données audiovisuelles permettant de repérer les traces d'activité mathématique d'individus placés en résolution de problème. À cette occasion, nous avons développé des ingénieries didactiques selon ce premier modèle, s'appuyant sur l'étude épistémologique, mathématique et didactique d'un problème de recherche, en mathématiques discrètes, le problème de pavage de Wang. Cette étude a permis d'élaborer plusieurs situations didactiques qui ont été ensuite proposées lors d'expérimentations dans des conditions cliniques proches du réel : individus volontaires, institutions de culture scientifique, autonomie et responsabilité scientifique des individus, absence de médiateur, temps alloué suffisant... Les résultats de notre étude, s'appuyant sur notre second modèle, montrent l'existence de traces d'activité mathématique d'individus permettant d'inférer qu'une telle pratique est possible dans ces conditions. Ainsi, ces résultats confortent le fait que nos ingénieries proposent des conditions enclines à combler la carence constatée dans certains espaces de médiation, tout en étant en adéquation avec le discours de la noosphère. Enfin, notre modèle de traitement et d'analyse semble offrir des perspectives intéressantes dans le domaine de l'intelligence artificielle, car cela permettrait un recueil de données important pour un nombre conséquent d'utilisateurs et sur une durée potentiellement élevée.

Abstract

In this thesis we show the gap between the discourse of society, formulated by a national strategy of scientific culture, and what exists in the associations or centres of scientific culture. The former advocates the democratisation of the scientific process, whereas it is concretely absent in these dissemination institutions. Our ecological study shows that the resources proposed in these institutions do not have the mathematical potential, for epistemological and didactic reasons, to bring the public into the mathematical activity. Based on this observation, we develop two didactic models. One allows the design (and evaluation) of didactic engineering of mathematical practice, providing first epistemological, then didactic and finally ergonomic conditions. The other proposes a method of processing and analysing audiovisual data to identify the traces of mathematical activity of individuals placed in problem solving. On this occasion, we developed didactic engineering according to this first model, based on the epistemological, mathematical and didactic study of a research problem in discrete mathematics, the Domino Problem. This study allowed the elaboration of several didactic situations which were then proposed during experiments in clinical conditions close to reality: voluntary individuals, institutions of scientific culture, autonomy and scientific responsibility of the individuals, absence of mediator, sufficient allocated time... The results of our study, based on our second model, show the existence of traces of mathematical activity of individuals allowing to infer that such a practice is possible in these conditions. Thus, these results support the fact that our engineering designs propose conditions that are likely to fill the gap observed in certain mediation spaces, while being in line with the discourse of learned societies (noosphere). Finally, our processing and analysis model seems to offer interesting perspectives in the field of artificial intelligence, as it would allow the collection of important data for a significant number of users and over a potentially high duration.